

幻方

幻 方

鄺恂立 汪以麟 編纂

壽孝天 駱師曾 校訂

商務印書館發行

序

幻方爲假定之新名詞。給以定義。乃謂雜寫諸數。列成方形。將方形中各縱行諸數各相加。各橫列諸數各相加。兩對角線諸數各相加。其加得之和數。無不一一相等者也。合此定義之數圖。在吾國以洛書爲最古。然自古但傳其數其圖。不傳造之之法。二十餘年前。亞泉雜誌中。始載其造法。擴大洛書之範圍。凡行數爲奇不爲偶者。皆可於頃刻中。用其法以造成與洛書同規律之數圖。十餘年前。不佞於東方雜誌。投載縱橫對角等和之研究一篇。於亞泉誌載葉譜人君偶行造法以外。又別得偶行造法。此外如崔朝慶君編之數學雜誌中。有四四方陣圖。教育雜誌學生雜誌中。時時有關乎縱橫對角等和之投稿。雖未用幻方之名。實皆爲幻方之研究。雖各爲幻方之研究。而東鱗西爪。尙未有薈萃各類編成幻方之專書。今鄺君恂立。汪君以麟。博考西藉。輯成是書。書中於方形圖以外。有多邊形圖。有立方形圖。有圓形圖。球形圖。星形圖。圖不限於平方。總稱曰幻方。所謂假定之名詞。圖稱舉便利云爾。竊念吾國人研究幻方造法。不及三十年。西人之研究之者。已積成歷史。豈果羣衆之腦力不逮彼耶。智識之濬發。大都從增高繼長而來。譬如積薪。後來者未必不居上。得是書以供研究。或幻方之妙理。待吾國人而發明者。正復不少也。抑書中各圖之數。間亦有疑義存留。以急於出書。未及詳加校訂。閱是書者。倘認覆核亦爲研究中事。肯推敲而是正之。則校者亦與編者同深感幸矣。

民國十一年夏紹興壽孝天識於商務印書館編譯所

目 錄

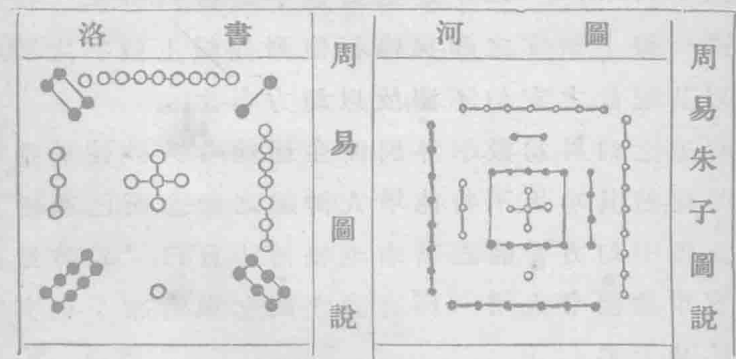
第一章	導言	1-3
第一節	幻方之歷史	1
第二節	幻方之性質	2
第三節	幻方之種類	2
第二章	多邊形之幻方	4-38
第一節	正方形幻方概論	4
第二節	古代之幻方	5
第三節	造奇數次幻方之古法	6
第四節	造奇數次幻方之新法	8
第五節	偶數次幻方及其作法	12
第六節	富蘭克令之幻方	19
第七節	同心幻方	31
第八節	幻方之各部亦爲幻方	32
第九節	特別情形之幻方	33
第十節	其他多邊形之幻方	35
第三章	幻立方	39-54
第一節	奇數次幻立方	39
第二節	偶數次幻立方	44
第四章	幻圓幻球幻星	55-75
第一節	幻圓	55
第二節	幻球	60
第三節	幻星	64
第五章	各種幻方作法之圖式	76-85

幻 方

第一章 導言

第一節 幻方之歷史

當上古榛榛狉狉之時，吾國已傳伏羲氏發見河圖洛書之說。其時蓋在西曆紀元前二千八百五十八至二千七百三十八年之間。嗣後孔子贊易，亦論及之。其時約為西曆前五百年左右。當此時也，西哲匹散谷拉氏，方僅發明數為要物之一耳。讀者試觀下圖，河圖姑置不論，洛書內之九數，適使各行列上及對角綫上諸數之和，皆為十五，故實即一「三次幻方」也。



第 一 圖

歐人所發明之幻方，始見於一著名之彫刻上，其名曰

Melancholia, 爲名手 Albrecht Dären 手刊, 其圖爲一四次之平方, 方中共含一至十六之數, 其行列及對角綫上諸數之和, 皆爲三十四。(第二圖)

16	3	2	13	第二圖
5	10	11	8	
9	6	7	12	
4	15	14	1	

其後若希臘人 Moschopalus, 若數學家 Michael Stife, 若 Bachet de Meziriac, 若 Athanasius Kircher, 若法人 De la Hire 及 Sauveur 等諸大家, 悉曾致力於此, 皆與幻方發明之歷史有關, 最近則有 Scheffler 教授, 爲 Brunswick 之大數學家, 獨能集其大成, 發明亦甚多。

第二節 幻方之性質

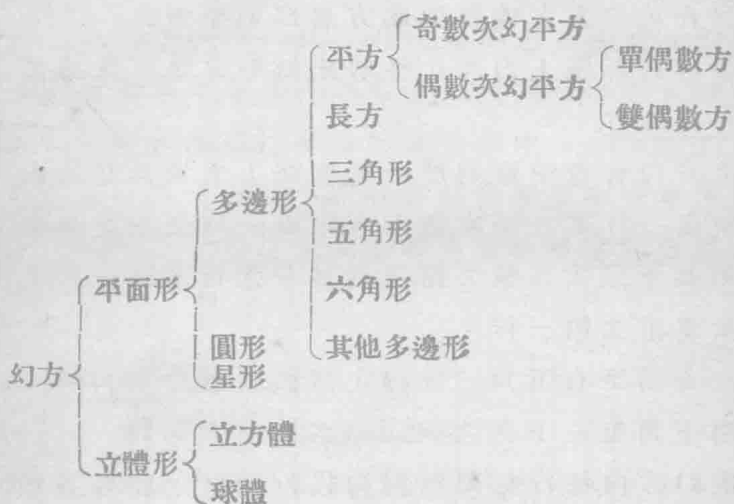
幻方每爲一種圖形, 內以數字實之, 而數字大抵互相連續, 如 1, 2, 3, 4, ... 以下是也, 其數字之排列, 每使一行一列或一線上數字之和, 與他行他列他綫上數字之和相等, 以其配置之玄幻不測, 故以幻方名之。

幻方之幻異, 爲數學界別開生面, 能令人神往於造物之神祕, 然其功用, 不特能增人神祕之觀念而已, 英國百科全書中幻方一節之著者毛根博士, 曾曰, “幻方雖似鮮實用, 然能令人增一種有益之觀念與考察”, 則其爲用已甚大矣。

第三節 幻方之種類

本書所述之幻方, 可大別爲平面幻方及立體幻方兩

大類。平面形有平方，長方，多邊形，圓，及星形等之別。立體形則立方，及球形兩者是也。平方形之幻方，最為普通。故本書所述亦最詳。餘皆較為僻異，又至為複雜，故僅就大體述之而已。茲將幻方類別表列於後。



第二章 多邊形之幻方

第一節 正方形幻方概論

一正方形內分爲若干方格，每格中各含一數，其數字之排列合於幻方之性質，則此方名曰幻平方。

幻平方內每邊上均含 n 格，則此幻平方爲 n 次，或簡稱爲 n 次幻方。

幻平方內有若干格列於一縱直綫上者，則此諸格內諸數，組成一行，其在橫直綫上者，組成一列，最上之列，名第一列，其下以次爲第二第三列，最左之行，名第一行，其右以次爲第二第三行。

自左上角至右下角一直綫上諸數，組成左對角綫。

自右上角至左下角之對角綫，名曰右對角綫。

n 次幻方內，每行每列每對角綫上諸數之和，各各相等，或皆等於公式 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ 。故如 n 爲 3，則諸數之和皆等於十五。 n 爲 4，則諸數之和皆等於三十四，餘類推。

同以若干之數組成相異之幻方，其數甚多。本書所舉者，其一二耳。如四次幻方，卽以一至十六諸數，可組成相異之方八百八十式。若六次方，則可組成數百萬以上之幻方。七次幻方，則可有三萬六千三百九十一萬六千八百個之多。至七次以上，則讀者試比例觀之，可想見其數當不知若何之鉅也。

第二節 古代之幻方

古代幻方，恆甚簡單，每含自一至九之九數，如第三圖所示者是也。其中各綫上諸數之和，皆為十五。因十五之數常自二，七，六；或九，五，一；或四，三，八；或二，九，四；或七，五，三；或六，一，八；或二，五，八；或六，五，四之三個數相加而得。故祇須方中諸數之排列，能令同行列及同對角綫上之三數，屬於上列之任何一組，即可組成一幻方。然幻方雖可造成多種相異之形，而五字必置於正中一格內。除第三圖外，尚可組成三次方之幻方七式，讀者試自造之，茲不贅列。

2	7	6
9	5	1
4	3	8

第三圖

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

第四圖

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

第五圖

古代又有四次幻方，其造法甚為奇特。先以十六數依次列入方內。（第四圖）次令四角上四數，及中央四數，仍而不動，其餘諸數，則以十七減去原數後代入其地。（即以十五代二，十四代三，十二代五，九代八，八代九，五代十二，三代十四，及二代十五是也。）結果為第五圖，即所求之幻方也。此方內每行，每列，及每對角綫上諸數，皆為三十。

四,不特此也,凡合成一正方形,或一長方形之四數,亦等於三十四,如 $1, 4, 13, 16^1$, $6, 7, 10, 11^1$, $14, 2, 3, 15^1$, $12, 9, 5, 8^1$, $15, 8, 2, 9^1$, $14, 12, 3, 5^1$, 等和皆為三十四。

第三節 造奇數次幻方之古法

(一)羅伯氏法

先以 1 字置於第一列之中格,然後以數次第向右斜上一格列入,如應在一行列之一端,而此端已無餘格,則將此數移入此行,或列,之彼端一格內,(如六圖中 1 上為 2,以無位置,乃移入第五行之下端,是其例也,)如應入之格內,已被他數所據,則置於上一數之下格,然後再依次列入,(如 8 應由 7 斜上,因已為 1 所據,故改置於下格,而 9 以下則仍舊進行,)讀者試參觀六圖,當知此法之易易。

此圖行列對角線皆 175

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

第六圖

(二)羅伯氏法之擴張

第一法所示者,不過其一例耳,非必須向右斜上一格也,即向右斜上二格,三格,亦無不可,(如七八兩圖)或向右平行二行,再向上直行一格,(第九圖)或逕任加變化,但能不脫第一法之原則,皆可藉以造一幻方也。

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

第七圖

23	12	1	20	9
4	18	7	21	15
10	24	13	2	16
11	5	19	8	22
17	6	25	14	3

第八圖

24	15	1	17	8
5	16	7	23	14
6	22	13	4	20
12	3	19	10	21
18	9	25	11	2

第九圖

又 1 非必須置於第一列之中格，即置於第一格，第二格，或任何一格內，皆可依法以次造成幻方。然中數

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

第十圖

15	1	17	8	24
23	14	5	16	7
6	22	13	4	20
19	10	21	12	3
2	18	9	25	11

第十一圖

必須置於正中一格內。中數云者，如五次方內之數，爲一至二十五，則中數爲十三是也。十及十一兩圖，皆例也。十圖向右斜行二格，十一圖向左斜行一格。

(三)白謙氏法

此法爲 Bachet de Meziriac 所發明，乃最著稱而又最簡便之造法也。先將各數以次斜列，如第十二圖。其數之已在方內者，可置之不動。其在方外者，則移入同行或同列中對面之空格內。如 3 移至 28 下，及 35 移至 4 下是也。空格既實，幻方亦成矣。其結果即第十三圖也。

				7					
			6		14				
			5		13		21		
		4		12		20		28	
	3		11		19		27		35
2		10		18		26		34	42
1		9		17		25		33	41
	8		16		24		32		40
		15		23		31		39	47
			22		30		38		46
				29		37		45	
					36		44		
						43			

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

第十三圖

第十二圖

第四節 造奇數次幻方之新法

下述一法，爲哈耶氏 De la Hire 所發明，而最近又爲斯區夫勒教授所完成者也。試舉五次幻方爲例，以說明之。

先作兩個附方。(十四十五兩圖) 第一附方含 1 至 5 五數各五個，第二附方則含 5 之乘數，即 0, 5, 10, 15, 20 五數各五個。其故因欲使 1 至 5 五數，依適當之配置，加入 0, 5, 10, 15, 20 內，即可得 1 至 25 諸數。而欲得此結果，必使兩附方內每行，每列，及每對角綫上，不可含相同二數，則二方相合，必能令各綫上之和，皆爲六十五。因 1 至 5 五數之和爲十五，再加其他 0, 5, 10, 15, 20 五數，則六十五也。

至行列上各數之置法，次序必不可亂，如一行上之數，

爲1,3,2,5,4,則他行必或爲3,2,5,4,1,或爲5,4,1,3,2,等等而不可紊。列上亦然。又兩附方相加時,不使某某二數相加至二次以上,否則一數將二見於一幻方內矣。下列十四,十五兩圖,即二附方。十六圖爲二方之和,即所求之五次方也。

3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3
1	2	3	4	5

第十四圖

0	10	20	5	15
5	15	0	10	20
10	20	5	15	0
15	0	10	20	5
20	5	15	0	10

第十五圖

3	14	25	6	17
10	16	2	13	24
12	23	9	20	1
19	5	11	22	8
21	7	18	4	15

第十六圖

茲更述一例,以示附方之作法。先於第一附方內,以3字置左上角內,更以餘數任置第一列諸格內,然後以同數向右斜下一格,次第列下。即得第一附方。(第十七圖)次於第二附方內,以0,5,10,15,20五數依前法列入,所異者,惟以中數置於右上角內,而各數皆向左斜下一格列入。(第十八圖)最後二方之和,(第十九圖)即所求之幻方也。

3	4	1	5	2
2	3	4	1	5
5	2	3	4	1
1	5	2	3	4
4	1	5	2	3

第十七圖

15	0	20	5	10
0	20	5	10	15
20	5	10	15	0
5	10	15	0	20
10	15	0	20	5

第十八圖

18	4	21	10	12
2	23	9	11	20
25	7	13	19	1
6	15	17	3	24
14	16	5	22	8

第十九圖

吾人用此法以造幻方，祇須將二附方略加變化，即有甚多之幻方可以造成。且造成之方，又有一種幻質，即平行於對角綫，而對立於該綫兩旁之五數，相加亦得六十五。如十六圖之「3, 7, 11, 20, 24」, 「10, 14, 18, 22, 1」, 及「21, 14, 2, 20, 8」等等皆等於六十五是也。且若將此幻方若干式，先後並列，則凡廿五數所成之方，皆為幻方，而排列皆互異焉。第二十圖深綫所表之二方，其例也。至於較大奇數次之幻方，亦無不可依此法成之。如廿一，廿二兩圖，為十一次幻方之附方，而第廿三圖，則二方之和，亦即十一次之幻方也。

20	1	12	23	9	20	1	12	23	9
22	8	19	5	11	22	8	19	5	11
4	15	21	7	18	4	15	21	7	18
6	17	3	14	25	6	17	3	14	25
13	24	10	16	2	13	24	10	16	2
20	1	12	23	9	20	1	12	23	9
22	8	19	5	11	22	8	19	5	11
4	15	21	7	18	4	15	21	7	18
6	17	3	14	25	6	17	3	14	25
13	24	10	16	2	13	24	10	16	2
20	1	12	23	9	20	1	12	23	9

第 二 十 圖

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3
6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9

第 廿 一 圖

0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
33	44	55	66	77	88	99	110	0	11	22
66	77	88	99	110	0	11	22	33	44	55
99	110	0	11	22	33	44	55	66	77	88
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	0
44	55	66	77	88	99	110	0	11	22	33
77	88	99	110	0	11	22	33	44	55	66
110	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99
22	33	44	55	66	77	88	99	110	0	11
55	66	77	88	99	110	0	11	22	33	44
88	99	110	0	11	22	33	44	55	66	77

第 廿 二 圖

1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121
36	48	60	72	84	96	108	120	11	12	24
71	83	95	107	119	10	22	23	35	47	59
106	118	9	21	33	34	46	58	70	82	94
20	32	44	45	57	69	81	93	105	117	8
55	56	68	80	92	104	116	7	19	31	43
79	91	103	115	6	18	30	42	54	66	67
114	5	17	29	41	53	65	77	78	90	102
28	40	52	64	76	88	89	101	113	4	16
63	75	87	99	100	112	3	15	27	39	51
98	110	111	2	14	26	38	50	62	74	86

第 廿 三 圖

第五節 偶數次方之幻方及其作法

凡偶數次之幻方，其方次數大於 2 者，皆適用下述二法。今於述作法之前，先定數名詞之義如下。

一列與頂列之距離，與他列與底列之距離相等，則二列互爲補列。

一行與最左行之距離，與他行與最右行之距離相等，則二行互爲補行。

二格同列，而分在二補行上者，則二格有平行之關係。

二格同行，而分在二補列上者，則二格有垂直之關係。

二格在補列，而又在補行上者，則二格有交互之關係。

故如廿四圖中 a, b, c, d 四格, (a, c) (b, d) 有平行之關係, (a, b) (c, d) 有垂直之關係, (a, d) (b, c) 有交互之關係, 則 a, b, c, d 四格合爲一有關係之組。

a			c
b			d

第廿四圖

(一) 第一作法

試舉六次方爲例, 以便解釋。先以 1 至 36 諸數, 依天然次序, 列入方中。(第廿五圖) 依本章第一節所述, 六次幻方每邊上諸數之和, 當爲 $\frac{1}{2} \times 6 \times (36+1)$, 卽爲一百一十一。今試觀廿五圖中二對角綫諸數之和, 適均爲一百一十一, 故此二對角綫, 已爲幻方之一部, 所求者惟行列中諸數之和, 亦爲一百一十一耳。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

第廿五圖

今先論諸列, 已知自頂綫下第 x 列上諸數之和, 必爲 $\frac{1}{2}n(n^2+1) - \frac{1}{2}n^2(n-2x+1)$, 而其補列上之數, 必爲 $\frac{1}{2}n(n^2+1) + \frac{1}{2}n^2(n-2x+1)$, 故欲使諸列相等, 合成幻方, 必須加 $\frac{1}{2}n \times n(n-2x+1)$ 於自頂綫下第 x 列上, 而自其補列中減去同等之數, 如是則二列皆等於 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$, 欲求若是之結果, 必須於每二補列中任意取 $\frac{n}{2}$ 行內有垂直關係之二格, 互相交換其位置, 惟在二對角綫上諸數, 則以已合幻