

国外科技经典与前沿著作译丛

宇宙学

COSMOLOGY

[美] Steven Weinberg 著 向守平 译

中国科学技术大学出版社

013044152

P159

43

国外科技经典与前沿著作

宇宙学

COSMOLOGY

[美] Steven Weinberg 著 向守平 译



北航

C1647019

中国科学技术大学出版社

P159
43

安徽省版权局著作权合同登记号:第 12121114 号

Steven Weinberg: Cosmology

© Steven Weinberg 2008

"COSMOLOGY, FIRST EDITION" was originally published in English in 2008. This translation is published by arrangement with Oxford University Press and is for sale in the Mainland (part) of the People's Republic of China only.

宇宙学(第1版)原书英文版于2008年出版.本翻译版获得牛津大学出版社授权,仅限于在中华人民共和国大陆地区销售.版权所有,翻印必究.

内 容 简 介

本书介绍了当代宇宙学研究的模型及相关公式,内容详尽,论述严谨.全书分为两部分,每一部分均可作为一个学期研究生课程的教材.第一部分讲述了宇宙学的各向同性和均匀性,第二部分则介绍了对各向同性和均匀性的偏离.本书尽可能地推导了各宇宙学现象的详细解析解,而不是仅仅转述他人数值计算的结果.本书内容包括了宇宙学的最新进展,对复合、微波背景辐射的极化、轻子合成、引力透镜、结构形成、多场暴胀等专题做了详尽的讲解,还引证了大量当前的研究工作.附录部分简要介绍了广义相对论并详细推导了宇宙学演化中用于描述光子和中微子的相对论性 Boltzmann 方程,书末附有习题集.

本书可作为理论物理、天体物理高年级本科生或研究生教材,也可供从事宇宙学、天体物理和理论物理研究的科研工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

宇宙学/(美)温伯格(Weinberg, S.)著;向守平译. —合肥:中国科学技术大学出版社,2013.3

书名原文:Cosmology

ISBN 978-7-312-02993-6

I. 宇… II. ①温… ②向… III. 宇宙学 IV. P159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 017741 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥晓星印刷有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 30
字数 630 千
版次 2013 年 3 月第 1 版
印次 2013 年 3 月第 1 次印刷
定价 90.00 元

序 言

在过去的四分之一世纪里,宇宙学的研究变得异常活跃.1980年代早期提出的暴胀理论,针对某些悬而未决的宇宙学疑难问题给出了解答,并提供了一种大尺度结构起源的机制,这种机制可以通过对宇宙微波背景辐射各向异性的观测得到验证.1989年11月,宇宙背景探测者(Cosmic Background Explorer)卫星升空.它的分光光度计的测量很快就确定了宇宙微波背景的热辐射性质,并且对其温度的测定达到了第三位小数,这一精度在宇宙学研究中是前所未有的.稍后,根据该卫星的辐射计所得到的数据,人们发现了长期寻觅的微波背景的各向异性.其后,由地基和球载仪器加上最终由Wilkinson微波各向异性探测器(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)所作的观测表明,这些各向异性几乎与暴胀理论所预期的完全一样.1990年代晚期,利用Ia型超新星作为标准烛光从而发现了宇宙在加速膨胀,这意味着宇宙中的大部分能量是某种暗能量,它的压力与密度之比小于 $-1/3$.这一点已经被微波背景辐射的精密观测以及大规模的星系巡天观测结果所证实,另外通过这些观测人们还得到了越来越精确的宇宙学参数值.

与此同时,对于这些宇宙学参数,天文学的经典方法给出的独立限制也在不断改进.在年老恒星的大气中钍和铀光谱的发现,以及对球状星团主星序拐点持续的研究,已经缩小了宇宙年龄估计值的变化范围.对星际吸收中测量到的氘氢比结合宇宙学核合成的计算,已经给出了通常重子物质宇宙密度的一个很好的值,而且表明,这一密度大约仅仅是某种神秘的、非重子冷暗物质密度的五分之一.Hubble空间望远镜以及地面望远镜的观测结果中给出的Hubble常数值的精度也在不断提高.这些方法测量到的一些宇宙学参数值,与宇宙微波背景以及大尺度结构的研究所得结果相一致,这给予了我们极大的信心.

进展还在继续.在今后数年里,我们可以期待关于暗能量密度是常量还是演化的确切信息,并希望看到引力辐射的踪迹,而这将开启观测宇宙暴胀的时代.我们还将利用新的大加速器人工制造暗物质粒子,或者通过天然暗物质粒子撞击地球,来揭示暗物质的本质.我们还希望能够看到,基础物理学可以提供一种明确的暴胀

理论,或者对暗物质或暗能量作出解释.

宇宙学这一新的激动人心时刻的到来,似乎受到了基本粒子物理学的启示.至1980年代,基本粒子和场的标准模型已经充分建立起来.尽管在当时,有重大意义的理论工作和实验工作都在持续进行着,但实验和新理论思想之间并没有多少接触,而没有这样的接触,粒子物理学就大大失去了活力.现在宇宙学带来的激励,正如粒子物理学在1960年代和1970年代所经历过的那样.

在1999年我完成了关于场量子论(QTF)的三卷本著作.手头闲暇之余,我给自己分派了一项工作,即仔细地学习宇宙学过去二十年里所取得的巨大进展的理论基础.尽管过去我曾对宇宙学做过一些研究,但要跟上最新的科学成就,这一工作量对我来说还是不小的.宇宙学的评论文章对观测数据作出了很好的概述,但它们常常只是引用公式而没有给出公式的由来,并且在某些时候甚至连原始推导的参考文献也没有列出.偶尔公式错了,就使得我在重新推导时遇到极大的困难.当我能找到原始文献时,这些文章在其论述中有时却出现了脱漏,或者依赖于隐含的假设,或者使用未经解释的记号.常常是大量的计算机程序代替了分析研究.在许多情况下,我发现还是由自己来完成有关的理论更容易些.

这本书就是我做这样的结果.它的目的是,对于现代宇宙学观测中使用并受到检验的观念和公式给出自洽的解释.本书分为两个部分.根据我的授课经验,每一部分都包含了足够的内容,可以作为一门一学期的研究生课程来讲.第一部分是从第1章到第4章,主要讲述各向同性且均匀的平均宇宙,只在第2.6节中简要介绍了微波背景的各向异性.这几章在时间顺序上或多或少有些颠倒:第1章集中讲述星系形成之后的宇宙,大约相应于红移 $z < 10$;第2章讲微波背景,它是在 $z \simeq 1000$ 时辐射的;第3章描述早期宇宙,从辐射主导宇宙膨胀的开始,到红移 $z \simeq 10^4$,此时辐射密度降低于物质密度;第4章讲暴胀时期,相信它比辐射主导时期还要早.第二部分从第5章到第10章,专注于讨论对平均宇宙的偏离.在第5章介绍了一些普遍公式和在第6章把这些公式应用到非均匀性演化之后,我在第7章回到微波背景的各向异性,并在第8章讲述物质的大尺度结构.引力透镜稍晚些在第9章中讨论,因为它在宇宙学中最重要应用可能就是利用微透镜来研究大尺度结构.第4章中对暴胀的讨论仅仅涉及宇宙在暴胀时期的平均性质,第10章再回到暴胀时,讨论的是由暴胀期间量子涨落开始的非均匀性的增长.

这本书自始至终,我尽最大可能对宇宙现象进行解析式计算,而不是仅仅转述他人根据数值计算所得的结果.为了把观测与理论相比较,文中所做的计算必须要考虑到许多细节.而这样一来,或者就使解析处理变为不可能,或者就模糊了计算内容的主要物理特征.在这种情况下,我会为了把问题说明白而不惜舍弃一定的计算精度.特别是在从第6.2节到第6.5节的宇宙涨落的流体力学处理,以及第8章关于大尺度结构的处理中,我都是这样做的.但是在第6.1节和附录H中,我也阐

述了现代宇宙学计算程序所依据的更精确的动力学理论. 在第 7 章宇宙微波背景各向异性的讨论中, 解析方法和数值计算方法都会用到.

自从 1960 年代以来, 宇宙学研究中发生了如此众多的事件, 使得我在 1972 年所写的《引力论和宇宙论》(Gravitation and Cosmology, 以后简称 G & C) 一书中的相关论述已远远不够. 有时我会提到那本书中的一些内容, 但这些内容看来已不值得在本书中再重复一遍了. 自 1972 年以来, 经典的广义相对论并没有发生多少改变(除了它的实验检验变得更增强了之外), 因而本书没有必要再把引力也纳入进来, 与宇宙学放在一起讨论. 但是, 为了方便那些希望更新自己广义相对论知识的读者, 也为方便我建立记号法, 我在附录 B 中给出了广义相对论的一个扼要介绍. 其他附录部分列出的是本书中所需的相关技术资料. 同时, 在本书的后面我补充了一个符号列表, 这些符号在不止一节中出现; 还有一批各式各样的习题.

为使本书内容协调, 便于处理, 我决定舍弃一些过于纯理论的东西. 这样, 本书中就不包括有关高维宇宙学理论、人择推理、全息宇宙学、暴胀细节猜想, 以及许多其他新概念的内容. 我可能会在接下来的一卷书中讨论其中的某些论题. 当前这本书主要关注已成为主流宇宙学的那些内容: 暴胀由一个或多个标量场所驱动, 接下来是由辐射、冷暗物质、重子物质以及真空能量主导的大爆炸.

本书所涉及论题的讨论有效至 $200n$ 年, 这里的 n 对书中不同部分是一个从 1 到 7 的整数. 我曾试图给出直到那一时间的完整的天体物理参考文献, 但是毫无疑问我没有找到某些文章. 仅仅缺少一篇参考文献并不意味着我所介绍的都是原创性的成果, 尽管它们中的确有原创性的. 我列出的文献大部分是在学术刊物上公开发表的, 也有一些来自 Cornell 文献库 <http://arxiv.org>. 在有些情况下, 当论文遇到某些问题还没有正式发表, 甚至于还没有投稿时, 我只能列出其 Cornell 文献编号. 我引用了所有我所知道的宇宙学参数的最新观测数据, 部分原因是, 我想给读者一个感性认识, 即目前的观测可能达到什么程度. 但是我没有试图把不同类型的观测结果合并, 因为我不认为这样做将增加更多的物理内涵, 而且任何这样的宇宙学整合都将很快过时.

我对我的 Texas 大学的同事们谨表诚挚的感谢, 其中有 Thomas Barnes, Fritz Benedict, Willy Fischler, Karl Gebhardt, Patrick Greene, Richard Matzner, Paul Shapiro, Craig Wheeler; 特别是 Duane Dicus, 他做了许多数值计算以及校正工作; Eiichiro Komatsu 通篇阅读了原稿, 而且从不漏掉宇宙学研究中各种信息资料及深入分析的出处; 在图表和计算方面得到了我的研究生 Raphael Flauger 的大量帮助, 他还和另外一些学生一起纠正了书稿中的许多错误, 他们是 Yingyue Li Boretz, Kannokkuan Chaichedsakul, Bo Li, Ian Roederer, 以及 Yuki Watanabe; Matthew Anderson 在宇宙学核合成的数值计算方面帮了我很大的忙. 我还从与下列同行就专门论题的来往通信中受益匪浅: Ed Bertschinger,

Dick Bond, Latham Boyle, Robert Cahn, Alan Guth, Robert Kirshner, Andrei Linde, Eric Linder, Viatcheslav Mukhanov, Saul Perlmutter, Jonathan Pritchard, Adam Riess, Uros Seljak, Paul Steinhardt, Edwin Turner 以及 Matias Zaldarriaga. 还应该感谢 Jan Duffy 和 Terry Riley 给予的许多帮助. 当然, 对于书中还可能存在的任何错误, 我个人担负全部责任. 如果读者发现了任何错误的地方, 希望能够告诉我, 我将把这些错误在我的网页上张贴出来: <http://zippy.ph.utexas.edu/~weinberg/corrections.html>.

S · 温伯格
Austin, Texas
2007 年 6 月

标 记 法

拉丁指标 i, j, k 等一般遍历三个空间坐标标记号, 通常取为 1, 2, 3.

希腊指标 μ, ν 等一般遍历四个时空坐标标记号 1, 2, 3, 0, 并且 x^0 是时间坐标.

除非特别指明, 重复的指标一般表示求和.

平直时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角的, 其元素为 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$.

空间三维矢量用黑体字表示.

任何上方有帽型符号的矢量, 表示相应于该矢量的单位矢量, 即 $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

任何量上方的点表示该量对时间求导.

∇^2 是 Laplace 符号, 即 $\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}$.

除了对矢量和张量之外, 下标 0 表示目前时刻.

对密度、压力和速度而言, 下标 $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \gamma$ 以及 ν 分别对应于重子等离子体(核子加电子)、冷暗物质、光子以及中微子, 而下标 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别代表非相对论性物质(重子等离子体加冷暗物质)以及辐射(光子加中微子).

矩阵或矢量 A 的复数共轭、转置以及 Hermite 伴随分别表示为 A^*, A^T 和 $A^\dagger = (A^*)^T$. 一个方程结尾的 + H. c. 或 + c. c. 表示: 加上该方程前面项的 Hermite 伴随或复数共轭.

自第 5 章开始, 上面有横线的任何符号都代表未受扰动的量值.

涉及波数时, q 表示共动波数, 伴有任意归一化的 Robertson-Walker 尺度因子 $a(t)$; 而 k 表示相应的物理波数 $q/a(t)$ 的当前值 q/a_0 . (注意, 这不同于通常用 k 表示共动波数的情况, 在那种情况下 $a(t)$ 归一化的约定是多样的.)

除了特别指明, 我们取 $\hbar$ 和光速等于 1. 全书中 $-e$ 表示电子的合理电荷, 因而精细结构常数为 $\alpha = e^2/(4\pi) \simeq 1/137$.

引用数据末尾括号中的数字, 表示以最后一位数字为单位的不确定度.

在多于一节的地方使用的其他符号, 见本书最后的符号列表.

目 录

序言	(i)
标记法	(v)
第 1 章 宇宙的膨胀	(1)
1.1 时空几何	(2)
1.2 宇宙学红移	(7)
1.3 小红移时的距离; Hubble 常数	(10)
1.4 光度距离与角直径距离	(20)
1.5 膨胀的动力学	(23)
1.6 大红移时的距离	(31)
1.7 宇宙膨胀还是光子疲劳?	(39)
1.8 年龄	(40)
1.9 质量	(45)
1.10 星系际吸收	(51)
1.11 计数	(57)
1.12 精质	(61)
1.13 视界	(68)
参考文献及注释	(70)
第 2 章 宇宙微波辐射背景	(80)
2.1 微波背景的预期与发现	(80)
2.2 平衡时期	(85)
2.3 复合与最后散射	(88)
2.4 偶极各向异性	(99)
2.5 Sunyaev-Zel'dovich 效应	(101)
2.6 微波背景的原初涨落: 概观	(104)

参考文献及注释	(112)
第 3 章 早期宇宙	(117)
3.1 热历史	(117)
3.2 宇宙学核合成	(125)
3.3 重子生成与轻子生成	(134)
3.4 冷暗物质	(142)
参考文献及注释	(152)
第 4 章 暴胀	(158)
4.1 三个疑难	(159)
4.2 慢滚暴胀	(163)
4.3 混沌暴胀, 永恒暴胀	(168)
参考文献及注释	(170)
第 5 章 小涨落的普遍理论	(172)
5.1 场方程	(172)
5.2 Fourier 分解和随机初始条件	(179)
5.3 选择规范	(184)
5.4 视界外的守恒	(192)
参考文献及注释	(199)
第 6 章 宇宙学涨落的演化	(202)
6.1 标量扰动——动理学理论	(203)
6.2 标量扰动——流体动力学极限	(215)
6.3 标量扰动——长波情况	(221)
6.4 标量扰动——短波情况	(227)
6.5 标量扰动——内插及转移函数	(237)
6.6 张量扰动	(244)
参考文献及注释	(256)
第 7 章 微波天空的各向异性	(260)
7.1 温度涨落的普遍公式	(260)
7.2 温度多极系数: 标量模式	(271)
7.3 温度多极系数: 张量模式	(284)
7.4 偏振	(290)
参考文献及注释	(313)

第 8 章 结构生长	(318)
8.1 复合之后的线性扰动	(318)
8.2 非线性增长	(331)
8.3 重子物质的坍缩	(335)
参考文献及注释	(338)
第 9 章 引力透镜	(341)
9.1 质点的透镜方程	(341)
9.2 放大:强透镜与微透镜	(343)
9.3 延展透镜	(348)
9.4 时间延迟	(351)
9.5 弱透镜	(355)
9.6 宇宙弦	(366)
参考文献及注释	(367)
第 10 章 暴胀作为宇宙学涨落的起源	(370)
10.1 暴胀期间的标量涨落	(370)
10.2 暴胀期间的张量涨落	(382)
10.3 暴胀期间的涨落:慢滚相近似	(384)
10.4 多重场暴胀	(391)
参考文献及注释	(398)
附录 A 一些有用的常数(量)	(401)
附录 B 广义相对论回顾	(403)
附录 C 辐射与电子之间的能量转移	(416)
附录 D 各态遍历定理	(420)
附录 E Gauss 分布	(422)
附录 F Newton 宇宙学	(423)
附录 G 光子极化	(425)
附录 H 相对论性 Boltzmann 方程	(428)
符号列表	(436)
习题	(441)
作者索引	(444)
主题索引	(458)

第 1 章 宇宙的膨胀

可视宇宙在我们周围所有方向上看来都是一样的,至少当我们所观察的距离大于 3 亿光年时是如此^[1].在第 2 章和第 7 章将要讨论的宇宙微波背景中,这样的各向同性更加精确(大约 $1/10^5$).我们将会了解到,这一辐射在到达我们这里时已经旅行了大约 140 亿年,因而这就支持了宇宙在充分大的距离上,所有方向几乎一样的结论.

很难想象我们处于宇宙中的任何特殊位置.所以对观测者来说,宇宙应当是到处各向同性的.但并不是对所有的观测者都如此.对于乘坐一艘以一半光速飞越银河系的空间飞船的观测者,宇宙一点也不各向同性.这些观测者将看到,从他们运动前方过来的星光和宇宙微波背景辐射变得很强,比从后面过来的要强很多.为了用公式来表述各向同性假设,应当规定,对于“典型”的自由下落的观测者,宇宙从各个方向来看都是相同的,而这些“典型”观测者在以相互邻域内的典型星系的平均速度运动.这就是说,同一时刻(时间还要有一个适当的定义)任何地点的情况必须相同,这些地点可以通过相对于任何典型星系的转动而被相互转换.但任何一点都可以通过相对于不同典型星系的一系列转动而被转换到另外一点,于是宇宙也就是均匀的——观测者在同一时刻在所有典型星系中看到的情况完全一致^[2].

宇宙均匀、各向同性的假设,使我们在第 1.1 节中选择时空坐标系时度规可以取简单的形式,这是 Friedmann^[3]在求解 Einstein 场方程时首先得出的,其后由 Robertson^[4]和 Walker^[5]基于均匀各向同性各自独立地导出.几乎所有的现代宇宙学理论都基于 Robertson-Walker 度规,至少在一级近似时是这样.第 1.2—1.4 节将在不涉及任何动力学前提的情况下,讨论这一假设在观测上的意义.第 1.5 节把 Robertson-Walker 度规应用到 Einstein 场方程上,其结果将在第 1.6—1.13 节中研讨.

1.1 时空几何

为得出时空度规,我们首先考虑一个三维均匀各向同性空间的几何.如在附录B中讨论的,几何是用度规 $g_{ij}(\mathbf{x})$ (i 和 j 遍历三个坐标方向)或等效地用线元 $ds^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j$ 来表示的,后者式中重复的指标意味着求和.(我们把 ds 称为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ 之间的固有距离,意思是说,它是一个测量者在 $\mathbf{x}$ 点附近一个小邻域中测量的距离,而该测量者所用坐标系是 Cartesian 坐标系.)一个明显均匀各向同性并具有正的有限长度的三维空间是平直空间,其线元为

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \quad (1.1.1)$$

使它保持不变的坐标变换只不过就是通常的三维转动和平移.另一个也相当明显的可能性是四维 Euclid 空间,它具有某种半径 a ,其线元为

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 + dz^2, \quad z^2 + \mathbf{x}^2 = a^2. \quad (1.1.2)$$

这里使线元保持不变的变换是四维转动; $\mathbf{x}$ 的方向可以经过一个四维转动变为其他任何方向,并保持 z 不变(即一个通常的三维转动), $\mathbf{x}$ 也可以经由一个 z 改变的三维转动被转往任何其他空间点.可以证明^[6],仅有的其他可能性(最多差一个坐标变换)是一个四维伪 Euclid 空间中的超球面,其线元为

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 - dz^2, \quad z^2 - \mathbf{x}^2 = a^2, \quad (1.1.3)$$

其中 a^2 是一个任意的正常数.使 a^2 保持不变的坐标变换是四维赝转动,正如 Lorentz 变换那样,但是把时间换成了 z .

我们可以重新标度坐标

$$\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x}/a, \quad z' \equiv z/a. \quad (1.1.4)$$

去掉撇号,球面和超球面情况下的线元分别是

$$ds^2 = a^2[d\mathbf{x}^2 \pm dz^2], \quad z^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1. \quad (1.1.5)$$

方程 $z^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1$ 的微分给出 $zdz = \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$, 因此

$$ds^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.1.6)$$

我们可以把这一结果推广到 Euclid 空间情况,概括为

$$ds^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right], \quad (1.1.7)$$

其中

$$K = \begin{cases} +1 & \text{球面} \\ -1 & \text{超球面} \\ 0 & \text{Euclid} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

(常数 K 常常被写为 k , 但是为避免与波数或流动的空间坐标指数相混淆, 本书中自始至终用式(1.1.8)的表示.) 注意我们必须取 $a^2 > 0$, 以使在 $\mathbf{x} = 0$ 处 ds^2 为正, 从而处处都有 ds^2 为正.

有一个显而易见的办法, 可以把上面的结果扩展到时空几何: 只要把式(1.1.7)纳入时空线元, 并且把 a (称为 **Robertson-Walker 尺度因子**) 取为时间的任意函数

$$d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.1.9)$$

另一个定理告诉我们^[7], 对一群自由下落的观测者(例如位于典型星系中的天文学家), 如果宇宙看起来是球对称且各向同性的, 式(1.1.9)就是唯一的度规(最多差一个坐标变换). 此时度规的分量写为

$$g_{ij} = a^2(t) \left(\delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\mathbf{x}^2} \right), \quad g_{i0} = 0, \quad g_{00} = -1, \quad (1.1.10)$$

其中 i 和 j 遍取 1, 2, 3, 且 $x^0 \equiv t$ 为时间坐标, 这里我们已取光的速度等于 1. 我们用球极坐标来代替准 Cartesian 坐标 x^i , 即

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

这样就有

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right). \quad (1.1.11)$$

在这一情况下度规变为对角的,

$$g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{00} = -1. \quad (1.1.12)$$

我们将在第 1.5 节看到, 宇宙学动力学方程依赖于函数 $a(t)$ 的整体归一化, 而归一化仅仅是通过 $K/a^2(t)$ 这一项进行的. 因而对于 $K = 0$, 这一归一化就没有了意义; 有意义的只是 $a(t)$ 在不同时刻的比值.

自由下落粒子的运动方程由附录 B 中的方程(B.12)给出:

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\kappa}{du} = 0. \quad (1.1.13)$$

其中 $\Gamma_{\nu\kappa}^\mu$ 为附录 B 中方程(B.13)给出的仿射联络,

$$\Gamma_{\nu\kappa}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (1.1.14)$$

u 是沿着时空曲线表征位置的一个适当参数, 对有质量粒子它正比于 τ . (一个满足式(1.1.13)的时空路径 $x^\mu = x^\mu(u)$ 称为测地线, 它意味着在积分限两端固定的情况下, 当路径发生任何无限小变化时, 积分 $\int d\tau$ 总是稳定的.) 特别注意, 当导数 $\partial_i g_{00}$ 和 $\dot{g}_{0i}$ 为零时, $\Gamma_{00}^i = 0$. 一个在这样的坐标系中静止的粒子将保持静止, 因此这样的坐标称为**共动坐标**, 它跟随典型观测者运动. 因为 $g_{00} = -1$, 对于一只共动

的钟,其固有时间隔 $(-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ 正好是 dt ,因而 t 就是共动钟静止系中测量的时间.

Robertson-Walker 尺度因子 $a(t)$ 的意义可以如下理解.在时刻 t ,从原点到—个径向坐标为 r 的共动天体的固有距离是

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K = +1 \\ \sinh^{-1} r & K = -1 \\ r & K = 0 \end{cases} \quad (1.1.15)$$

在这一坐标系中,一个共动天体的 r 与时间无关,故从我们到一个共动天体的距离在随 $a(t)$ 增大(或减小).因为我们自己的位置并没有任何特殊性,宇宙间任何两个地方的共动观测者之间的距离必然也正比于 $a(t)$.任何这种固有距离 $d(t)$ 的变化率是

$$\dot{d} = d\dot{a}/a. \quad (1.1.16)$$

我们将在下一节中看到, $a(t)$ 现在是在增大的.

我们还需要式(1.1.14)给出的仿射联络的其他非零分量:

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) = a\dot{a}\left(\delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - Kx^2}\right) = a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, \quad (1.1.17)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{il}(g_{l0,j} + g_{lj,0} - g_{0j,l}) = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad (1.1.18)$$

$$\Gamma_{jl}^i = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{jm}}{\partial x^l} + \frac{\partial\tilde{g}_{lm}}{\partial x^j} - \frac{\partial\tilde{g}_{jl}}{\partial x^m}\right) \equiv \tilde{\Gamma}_{jl}^i. \quad (1.1.19)$$

这里 $\tilde{g}_{ij}$ 和 $\tilde{\Gamma}_{jl}^i$ 是纯空间的度规和仿射联络, $\tilde{g}^{ij}$ 是 3×3 矩阵 $\tilde{g}_{ij}$ 的逆矩阵,它一般并不等同于 4×4 矩阵 $g_{\mu\nu}$ 之逆矩阵的 ij 分量.在准 Cartesian 坐标下,

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - Kx^2}, \quad \tilde{\Gamma}_{jl}^i = K\tilde{g}_{jl}x^i. \quad (1.1.20)$$

我们可以利用仿射联络的这些分量,去求解共动坐标系中非静止粒子的运动.首先,我们来计算一个非零质量 m_0 粒子的动量变化率.考虑量

$$P \equiv m_0 \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} \quad (1.1.21)$$

此处 $d\tau^2 = dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j$.在局域惯性 Cartesian 坐标系中, $g_{ij} = \delta_{ij}$,故有 $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2}$,其中 $v^i = dx^i/dt$,这样式(1.1.21)就是狭义相对论中动量大小的表示式.另一方面,量(1.1.21)显然是在任意空间坐标变换下不变的,故我们可以像在共动 Robertson-Walker 坐标中那样来计算它的值.直接利用方程(1.1.13)就可以来计算,但为简便起见,假设我们采用一个空间坐标系,其中粒子位于原点 $x^i = 0$ 附近,在那里有 $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + O(x^2)$,这样我们就可以忽略仿射联络中的纯空间分量 Γ_{jk}^i .广义相对论给出的运动方程是

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -\frac{2}{a} \frac{da}{dt} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dt}{d\tau}.$$

乘以 $d\tau/dt$ 后得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) = -\frac{2}{a} \frac{da}{dt} \frac{dx^i}{d\tau},$$

它的解是

$$\frac{dx^i}{d\tau} \propto \frac{1}{a^2(t)}. \quad (1.1.22)$$

把这一结果用到方程(1.1.21)并取度规为 $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$, 我们看到

$$P(t) \propto 1/a(t). \quad (1.1.23)$$

这对任何非零质量粒子都成立, 无论其质量比动量小多少都是这样. 因此, 虽然对光子而言 m_0 和 $d\tau$ 都是零, 但式(1.1.23)仍然成立.

重要的是描述光子和物质粒子的路径特征, 以解释天文观测结果(特别是第9章的引力透镜). 经过我们空间坐标系原点的光子和粒子, 显然沿坐标系中的直线即空间测地线行进, 它们满足条件

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \tilde{\Gamma}_{jl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (1.1.24)$$

这里 ds 是三维固有长度

$$ds^2 \equiv \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.1.25)$$

但是作为测地线的性质在坐标变换下是保持不变的(因为它表明矢量为零), 因而光子或粒子的路径在任何空间坐标系中都是空间测地线, 包括那些光子或粒子的路径不经过原点的坐标系. (这一点可以详解如下. 利用式(1.1.17)及式(1.1.18), 光子或物质粒子的运动方程(1.1.13)现在是

$$0 = \frac{d^2 x^i}{du^2} + \Gamma_{jl}^i \frac{dx^j}{du} \frac{dx^l}{du} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dx^i}{du} \frac{dt}{du} \quad (1.1.26)$$

$$0 = \frac{d^2 t}{du^2} + a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}. \quad (1.1.27)$$

方程(1.1.26)可以写为

$$0 = \left(\frac{ds}{du} \right)^2 \left[\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \tilde{\Gamma}_{jl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds} \right] + \left[\frac{d^2 s}{du^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{du} \frac{ds}{du} \right] \frac{dx^i}{ds}, \quad (1.1.28)$$

其中 s 到目前为止是任意的. 如果我们把 s 取为空间几何中的固有长度(1.1.25), 则有

$$du^2 \propto d\tau^2 \propto dt^2 - a^2 ds^2,$$

此式除以 du^2 , 对 u 求导并利用方程(1.1.27), 得出

$$\frac{d^2 s}{du^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{du} \frac{ds}{du} = 0.$$

因此由方程(1.1.28)得到方程(1.1.24).)