

美国高校入学考试指导丛书

MATHEMATICS WORKBOOK

SAT

张一冰 著
夏正威

数学



上海译文出版社

美国高校入学考试指导丛书

SAT 数 学

张一冰 夏正威 著



上海译文出版社

图书在版编目(CIP)数据

SAT 数学/张一冰,夏正威著. —上海:上海译文出版社,2013.4

(美国高校入学考试指导丛书)

ISBN 978-7-5327-6142-5

I. ①S… II. ①张… ②夏… III. ①数学课—高等学校—入学考试—美国—自学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 056743 号

本书所有版权归本社独家所有,
非经本社同意不得连载、摘编或复制

SAT 数学

——美国高校入学考试指导丛书

张一冰 夏正威 著

上海世纪出版股份有限公司

译文出版社出版

网址: www.yiwen.com.cn

上海世纪出版股份有限公司发行中心发行

200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc

上海市印刷十厂有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 10.5 字数 185,000

2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

印数: 0,001—7,000 册

ISBN 978-7-5327-6142-5/H·1109

定价: 32.00 元

如有质量问题,请与承印厂质量科联系。T: 021-65418000

这套《美国高校入学考试指导丛书》，因其封面的白色基调，市面上称之为“SAT 白皮书”，自 2010 年 1 月由上海译文出版社出版发行以来，未曾想受到各位 SAT 学子们如此的欢迎，《SAT 阅读》等分册在 3 年内加印了 10 余次。说实话，这是笔者在写这套丛书时始料未及的。总之，谢谢大家的厚爱。

丛书出版以来，接到了许多同学们的提问，大部分问题我都亲自给同学们回信解答了。这些问题主要是因为笔误引起，所以这次再版，基本保留第一版的原貌，仅去掉了笔误，修正了表达不是很严谨的地方。在此向各位致歉。

回头想来，这套丛书之所以受到各位的青睐，我想最主要的原因可能还是其以试题分析见长的特点。市面上 SAT 习题书籍不少，但学生们在学 SAT 时，除了做题和对答案这两步，还迫切地想要第三步：知道为什么。兴许，这套丛书正好满足了这种需求，让大家及时解决迷惑，逐步纠正自己的思维偏差，熟悉 SAT 考试要求和特点，提高做题技巧和速度。

其实在写这套丛书之前，我就给自己定下一个目标，那就是希望最后同学们在在看这套丛书的时候，就如同在课堂围坐在我的身边上课那样，听我娓娓道来。但真正动笔的时候，我才发现，实现这个目标其实并不容易，因为课堂讲课和在书中用文字阐明其实有着非常巨大的不同。这个不同就是，在课堂上讲解，你随时可以知道学生的困惑在哪，随时可以和学生互动，然后随时可以调整自己的讲授方式，让学生的问题迎刃而解。而用文字讲解，你就得提前预判读者对各道试题可能产生的困惑和问题所在，然后你的讲解才能一针见血，不偏不倚，才能让读者豁然开朗。

因此，对这套丛书中的每一道试题分析，下笔之前我都会根据这么多年的 SAT 教学经验，预判学生们可能的难处、疑惑，然后再决定在这道题上我到底是不厌其烦、演绎再三，还是一笔带过。这个思路，贯穿了这套丛书写作的全过程。

这套丛书的出版,要感谢上海译文出版社的热情鼓励,他们决心要打造中国第一套系统阐述 SAT 的经典丛书,使笔者笔耕不辍有了巨大的动力。感谢我历年来亲手带过的 SAT 学子们,他们的许多宝贵建议和想法都已被融入进了这套丛书。更要感谢各位同学对笔者的信任,我由衷希望这套丛书会成为你们冲击美国名校之路上的良师益友。

最后,对手捧这套丛书的读者,我想告诉你们,拥有梦想是一件激动人心的事情。梦想使我们心灵强大,梦想让我们无所畏惧,更是梦想使我们人类无论曾怎样饥寒交迫,忍辱负重,但最终都会生生不息浩浩荡荡。希望你们永远坚持自己的梦想,并为之付出坚持不懈的努力,直至到达成功的彼岸。在此,我衷心地祝福你们:

愿你们的人生,海阔天空。

张一冰

SAT 数学在整个 SAT 考试中占了 3 个部分,其中两个考试时间为 25 分钟的部分,一个为 20 分钟的部分。从题型角度讲,包含五选一的选择题和解答题,其中选择题 44 题,解答题 10 题,总共 54 题。SAT 数学的考点涵盖了国内初中、高中绝大部分的内容,涉及的知识面较广,但是题目的难度不高。

本书将 SAT 数学所涉及的考点,按照算数,代数,几何,概率、统计和逻辑,图表分析进行分类,每一大类下又分成若干具体的小节。每个小节中,先列出该知识点所包含的相关概念和结论,然后对典型例题从看问题的角度、知识点的归纳以及解题技巧这几方面入手,进行细致的分析;最后,给出练习题巩固,每道练习题都伴有详细的答案解析。

数学考点的总复习之后,提供了 2 套数学全真模拟题。每套全真模拟题都包含了 SAT 真实考试中会出现的题目类型。附录部分提供了中英文对照的 SAT 数学常用词汇。

本书重在对 SAT 数学题型进行分析、整理和归纳,希望能够帮助考生将知识点融会贯通,从而逐渐形成自己的思维习惯,而并非一味地要大家去被动地掌握所谓的策略和技巧。因为,笔者始终以为,攻克 SAT 数学,在 SAT 数学部分的考试中取得高分,关键是要有自己看问题的思路,只有这样才能在考试中做到处变不惊,临危不乱,从容应对一切可能出现的问题,最终取得理想的成绩。

希望本书能成为你实现这一目标的好帮手!

序言	001
前言	001
第一章 算数	001
第一节 基本四则运算	001
第二节 偶数和奇数	005
第三节 整除和因子	007
第四节 分数和小数	012
第五节 百分数	015
第六节 比和比例	018
第七节 平均数、中位数和众数	021
第八节 指数和根	024
第九节 集合	027
第十节 序列	030
第二章 代数	034
第一节 方程	034
第二节 方程组	039
第三节 不等式	042
第四节 函数及其图像	047
第三章 几何	056
第一节 线和角	056
第二节 三角形及三角函数	063

第三节 多边形和四边形	071
第四节 圆	077
第五节 立体	084
第六节 解析几何	090
第四章 统计、概率和逻辑推理	099
第五章 图表题	110
附录 1	117
PRACTICE TEST 1	117
PRACTICE TEST 2	134
模拟题答案	150
附录 2 SAT 数学英语常用词汇	151
代数部分	151
几何部分	155

第一章 算 数

第一节 基本四则运算

加(add, plus)→和(sum)

减(subtract)→差(difference)

乘(multiply, times)→积(product)

除(divide)→商(quotient)

例: The sum of the numbers x , $3x - y$ and $2y + 4$ is subtracted from 15. In terms of x and y , what is the result?

(A) $11 - 4x - 3y$

(B) $11 - 4x - y$

(C) $11 + 2x - 3y$

(D) $19 - 4x - y$

(E) $19 + 2x - 3y$

分析: “A is subtracted from B”这一常见表达表示从 B 中减去 A, 故选择 B。

例: If 13 is added to 2 more than one-half of a certain number, the result is 37. What is the original number?

(A) 24

(B) 40

(C) 44

(D) 61

(E) 80

分析: “add”和“add to”都有加上的意思, 但 add 仅是加上后面的数, 而 add to 是加上后面的整个部分。比如“1 add 2 minus 3”表示“ $1 + 2 - 3$ ”, 而“1 is added to 2 minus 3”表示“ $1 + (2 - 3)$ ”。因此, 本题有 $13 + \left(\frac{x}{2} + 2\right) = 37 \Rightarrow x = 44$, 选 C。

例: If a number x is increased by 2 and the result is squared, the final value

will be 49. Which of the following could be the value of x ?

- (A) -9 (B) -7 (C) -5 (D) -3
(E) -1

分析：“A is increased /decreased by B”表示 A 增加/减少了 B，另一个容易与之混淆的表达是“A is increased /decreased to B” A 增加/减少到 B，请大家注意区分。

“A is squared”是将 A 平方的意思，等价的表达有“square A”，“the square of A”等。由此题目所要表达的是 $(x+2)^2 = 49$ ，两边开方。从所给选项看 $x+2$ 为负，故选择 A。

例：If $8+x$ is 4 more than 16, what is the value of $2x$?

分析：“A more /less than B”表示比 B 多/少 A，故得到 $8+x = 16+4$ ， $x = 24$ 。

例：If multiplying k by 7 gives the same result as squaring k , which of the following must be true?

- (A) $7+k^2$ (B) $k^2+k=7$
(C) $k^2+7k=1$ (D) $7k=1$
(E) $7k=k^2$

分析：“multiply A by B”表示用 B 乘以 A，另一种等价的表达是“A is multiplied by B”。故选择 E。

练习题

1. If 5 times t is decreased by 8, which of the following represents the result?

- (A) $8-5t$ (B) $5t-8$ (C) $5(t-8)$ (D) $5(8-t)$
(E) $8(t-5)$

2. If 6 times j is 1 more than the square of k , where k is an integer, what is the smallest possible value of j ?

- (A) -5 (B) $-\frac{1}{6}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{6}$
(E) It cannot be determined from the information given.

3. A number is added to 9 less than the number. If the result is 181, what is the number?

4. The product of 3, 5, 7 is equal to one-half the sum of 20 and x . What is the values of x ?
5. By Saturday afternoon, 375 tickets had been sold for a Saturday evening performance at a theater with a capacity of 500 seats. After those 375 tickets were sold, half the members of a group of 210 people each purchased a ticket. If no other tickets were sold prior to the performance, how many tickets remained unsold at the time of the performance?
6. Prime numbers k and n are each greater than 2, and they differ by 4. If there is no prime number between k and n , what is the least possible value of $k + n$?

习题解答

1. B

2. D

分析: 由题意可得 $6j = k^2 + 1 \geq 1$ (k 为整数), 故当 $k = 0$, $6j = 1$ 最小。

3. 95

分析: $x + (x - 9) = 181 \Rightarrow x = 95$

4. 190

分析: $\frac{20+x}{2} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \Rightarrow 20 + x = 210 \Rightarrow x = 190$

5. 20

分析: 该题只是一道简单的减法题, 对于这种较长的题目强烈建议大家在读题时及时地将题目中反映出的相关数据和信息转换成数学表达, 这样就避免了反复读题浪费时间。

6. 18

分析: “differ by”是相差多少的意思, 并不表明量与量之间确切的大小关系,

即 $|k - n| = 4$ 。

要使 $k + n$ 的值最小, 则 k 和 n 的值都要尽可能小。令 k 为相对较小的素数, 当 $k = 3$ 时, $n = 7$, 中间还有素数 5 不符合题意; 当 $k = 5$ 时, $n = 9$, 不是素数; 当 $k = 7$ 时, $n = 11$, 是素数, 且中间没有别的素数, 故 $k + n$ 的最小值为 18。

第二节 偶数和奇数

奇数(odd): 不能被 2 整除的整数。

偶数(even): 能被 2 整除的整数。

运算律: $\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$

$\text{odd} \times \text{odd} = \text{odd}$

$\text{odd} \pm \text{even} = \text{odd}$

$\text{odd} \times \text{even} = \text{even}$

$\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$

$\text{even} \times \text{even} = \text{even}$

例: If a and b are positive odd integers, which of the following must be a positive odd integer?

(A) $a + b$

(B) $a - b$

(C) $2a + b$

(D) $2a - b$

(E) $\frac{a+b}{2}$

分析: 由奇偶数的运算律排除 A、B、E。根据运算律 C、D 的结果都为奇数,但是由于两数大小关系未知,故只有 C 能保证结果为正。应特别注意,当 $a = b$ 时, $a - b = 0$, 而我们规定 0 也是偶数。

例: If x, y, z are integers, which of the following is NOT a possible value for $2x + 4y + 6z$?

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 26

(E) 29

分析: 由奇偶数的运算律可知,无论 x, y, z 原来是何种奇偶性,它们和偶数的乘积一定还是偶数,而偶数与偶数的和也是偶数,故只有 E 的结果符合条件。

练习题

1. The sum of which of the following combinations of number will be odd?

(A) One even and two odd numbers

(B) Two even numbers

(C) Three even numbers

(D) Three odd numbers

(E) Four odd numbers

2. If x and y are integers and $xy + x^2$ is odd, which of the following statements must be true?

I. x is odd.

II. y is odd.

III. $x + y$ is odd.

(A) I only

(B) III only

(C) I and II only

(D) I and III only

(E) II and III only

3. If x is an even integer, how many even integers are there between $x + 3$ and $x + 13$, inclusive?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

4. How many pairs of different numbers can be chosen from the list above so that the sum of the two numbers is even? (Note: The pair 1, 3 is the same as the pair 3, 1)

习题解答

1. D

2. D

分析: $xy + x^2 = x(y + x)$, 奇数和奇数相乘必为奇数, 故选择 D。

3. 5

分析: “inclusive”此处的意思是“包含 $x + 3$, $x + 13$ ”。由于 $\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$, 故只要找出 3 和 13 之间的偶数 4, 6, 8, 10, 12 和 x 相加就行。

4. 9

分析: $\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$, $\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$, 从 1 开始排起, 和为偶数的数对有:

$$1 \begin{cases} 3 \\ 5, 2 \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}, 3 \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases}, 4 \{ 6, 5 \{ 7 \end{cases}$$

共有 9 对。

第三节 整除和因子

被除数 (dividend) \div 除数 (divisor) = 商 (quotient) + 余数 (remainder) \div 除数 (divisor)

因子 (factor) 和倍数 (multiple): 假如整数 n 除以 m , 结果是无余数的整数, 那么我们称 m 就是 n 的因子, n 是 m 的倍数。

素数 (prime): 一个整数只有 2 个因子, 1 和它本身。

和数 (composite): 一个整数至少有 3 个不同的因子。

素因子分解 (prime factorization): 把一个数分解成素数相乘。

例: Trains A, B and C passed through a station at different speeds. . Train A's speed was 3 times Train B's speed, and Train C's speed was twice Train A's. What was Train C's speed, in miles per hour, if Train B's speed was 7 miles per hour?

- (A) 14 (B) 21 (C) 28 (D) 35
(E) 42

分析: 此题包含 2 个表示倍数的常见用法, “ n times A”表示 A 的 n 倍; “twice A”表示 A 的 2 倍。由题意 A 的速度是 B 的 3 倍, A 的速度是 21; C 的速度是 A 的 2 倍, C 的速度是 42, 选 E。

例: When the positive integer k is divided by 7, the remainder is 6. What is the remainder when $k+2$ is divided by 7?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) 4

分析: 这一类型的题目是 SAT 考试中的常见题。比较简单的做法是代值, 选择符合条件的 k 值代入即可。本题中可选择 $k=13$ 代入计算, 结果为 1, 故选择 B。

例: If a , b and c are different positive integers such that a is divisible by b , and b is divisible by c , which of the following statements must be true?

- I. a is divisible by c .
II. a has at least 3 positive factors.
III. $a = bc$.

(A) *I only*(B) *II only*(C) *I and II only*(D) *I and III only*(E) *I, II and III*

分析：“A be divisible by B”表示 A 可被 B 整除。假设 $a = kb$, $b = lc \Rightarrow a = klc$; k, l 表示倍数, 故选择 C。

例: In a certain high school, there are three times as many band members as orchestra members and twice as many orchestra members as jazz choir members. If no student can be enrolled in more than one of the three activities and there are 108 members in the three activities, how many students are in the band?

分析: “ n times as ... as”表示第二个 as 前是后的 n 倍。根据这一用法, band members 是 orchestra members 的 3 倍, orchestra members 是 jazz choir members 的 2 倍, 所以 band members 是 jazz choir members 的 6 倍。 $6\text{jazz} + 2\text{jazz} + \text{jazz} = 108$, $\text{jazz} = 12$, $\text{band} = 72$ 。

例: The positive number n is the product of three different prime numbers greater than 2. If the sum of these three prime numbers is also prime, what is the smallest possible value of n ?

分析: 要使 n 最小, 那么构成它的 3 个素数也要尽可能的小。我们从大于 2 的最小素数 3 算起, 3, 5, 11 这三个素数的和为素数, 且是满足这一条件的素数对中最小的, 故 n 最小值为 165。

例: Yesterday, John painted boxes at an average rate of 10 minutes per box. Ann painted boxes at an average rate of 15 minutes per box. If they both painted boxes at these respective rates for an hour, what is the total number of boxes they painted?

分析: 这一类题目是 SAT 数学部分中的一类常见题型——速率问题。根据时间 \times 速率 = 总量, John 和 Ann 一小时分别能做 6 个和 4 个盒子, 故一小时两人合起来能做 10 个盒子。

练习题

1. When the positive integer s is divided by 12, the remainder is 4. When the

positive integer t is divided by 12, the remainder is 5. What is the remainder when the product st is divided by 6?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) 5

2. A survey of households in a small city showed that there was an average of 3.2 persons per household and an average of 2.5 radios per household. Based on these results, if 48 000 people live in the city, which of the following is the best estimate of the total number of radios in the households of this city?

- (A) 18 520 (B) 26 300 (C) 35 200 (D) 37 500
(E) 61 440

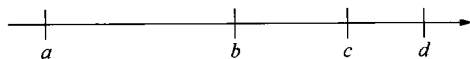
3. Machine A produces chairs at a constant rate of 6 chairs per hour, and machine B produce chairs at a constant rate of 8 chairs per hour. How many more minutes does it take machine A to produce 32 chairs than it takes machine B?

4. For three positive prime numbers a , b and c , $ab = 33$ and $bc = 21$. What is the value of abc ?

5. How many positive integers less than 1 000 are not divisible by 3?

6. A school ordered \$600 worth of light bulbs. Some of the light bulbs cost \$1 each and the others cost \$2 each. If twice as many \$1 bulbs as \$2 were ordered, how many light bulbs were ordered altogether?

7. A car traveled 10 miles at an average speed of 20 miles per hour and then traveled the next 10 miles at an average speed of 40 miles per hour. What was the average speed, in miles per hour, of the car for the 20 miles?



8. On the number line above, tick marks are spaced so that the distance from a to b