

微 积 分

下 册

微 积 分

下 册

无錫輕工业学院

1974年5月

目

录

(下 册)

第五章 不定积分

§ 5.1	原函数与不定积分概念	99
§ 5.2	基本积分公式	101
§ 5.3	简单变形积分法	102
§ 5.4	凑微分法	103
§ 5.5	第一换元法	104
§ 5.6	函数变形举例	106
§ 5.7	第二换元积分法	109
§ 5.8	分部积分法	111
§ 5.9	积分法小结	112
§ 5.10	不定积分的几何意义及应用	114

第六章 定积分及应用

§ 6.1	概念的形成	116
§ 6.2	定积分的性质	119
§ 6.3	定积分计算	124
§ 6.4	平面图形面积计算法	126
§ 6.5	体积计算法	131
§ 6.6	曲线弧长及其他	135
§ 6.7	压力和功的计算法	137
§ 6.8	重心计算	141
§ 6.9	近似积分法	146

第七章 多元函数

§ 7.1	多元函数概念	150
§ 7.2	二元函数的几何解释	151

§ 7.3	偏导数	152
§ 7.4	偏导数的几何解释	154
§ 7.5	全微分及其应用	155
§ 7.6	多元复合函数	157
§ 7.7	二阶偏导数	159
§ 7.8	曲线积分概要	160

第八章 微分方程

§ 8.1	概念的产生	165
§ 8.2	分离变量法	166
§ 8.3	一阶方程的通解与特解	168
§ 8.4	一阶线性方程	171
§ 8.5	特殊高阶方程的解法	173
§ 8.6	常系数二阶线性齐次微分方程	175
§ 8.7	结束语	180

第五章 不定积分

一元函数微分学的学习已告一段落，我们看到微分学的两大概念——导数与微分——的用处是十分广泛的，下面将开始积分学的学习。

积分部分有两大基本概念——不定积分与定积分，与导数形成一对矛盾的是不定积分，与微分形成一对矛盾的是定积分。但是他们自己之间的关系也是十分紧密的，寻找它们之间的联系是微积分理论的一个重大课题。这一章着重研究不定积分。

§ 5.1 原函数与不定积分概念

在算术中，加减是一对矛盾，乘除是一对矛盾。在代数中正和负是一对矛盾。在三角法中，正弦与反正弦是一对矛盾。这些都是矛盾的普遍性在数学领域里的反映。当我们懂得了矛盾普遍性的道理以后，在形成导数概念后，必然会追问与导数对应的是什么事物，这就推动了学科的发展。

例如：已知函数 x^3 ，导函数是 $3x^2$ ，即

$$x^3 \xrightarrow{\text{求导运算}} 3x^2 \quad (I)$$

反过来由 $3x^2$ 求 x^3 的运算应该是求导运算的逆运算，求导运算的逆运算是一种什么样性质的运算，有没有必要研究它呢？为了回答这个问题，我们看一个物理例子。

设物体的运动方程 $S = f(t)$ 已知，求速度：

$$S = f(t) \xrightarrow{\text{求导运算}} V = S' = f'(t) = \phi(t)$$

运动方程 $S = f(t)$ 是表示物体位置 S 与时刻 t 之间的关系的

方程，通过求导这样得到表示物体运动速度 V 与时刻 t 之间的关系的方程 $V = \phi(t)$ 。反过来，如果已知物体运动的速度与时刻的关系 $V = \phi(t)$ ，要求运动方程 $S = f(t)$ ，就需要解决求导运动的逆运动。

根据(I)式， $3x^2$ 叫 x^3 的导函数，反过来 x^3 叫 $3x^2$ 的原函数，求原函数的运动叫积分运动：

$$\begin{array}{ccc}
 \{ \text{已知函数} \} & & \{ \text{导函数} \} \\
 x^3 & \xrightleftharpoons[\text{积分运动}]{\text{求导运动}} & 3x^2 \\
 \{ \text{原函数} \} & & \{ \text{已知函数} \}
 \end{array}$$

一般地说，已知 $f(x)$ ，如果存在 $F(x)$ 使 $F'(x) = f(x)$ ，则 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数。

例如： $(\sin x)' = \cos x$ ， $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数，

$(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$ ， $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的原函数。

但实践经验还有： $(\frac{1}{3}x^3+1)' = x^2$ ， $(\frac{1}{3}x^3+2)' = x^2$ ， $(\frac{1}{3}x^3-1)' = x^2$ ……，换句话说， x^2 的原函数不止一个，那么究竟有多少个呢？这里有一个理论问题。我们仅把结论讲一下： x^2 的原函数有无数个，但它们都包括在下式中

$$\frac{1}{3}x^3 + C \quad (\text{II})$$

其中 C 是任意常数。

同样道理， $\cos x$ 的全部原函数都包括在下式中

$$\sin x + C \quad (\text{III})$$

由于(II)(III)这种形式给出了原函数的普遍形式，而且今后即使要求的是个别原函数，也总是先写普遍形式，然后再定常数，因此我们给(II)(III)这类普遍形式起了名字，并选择一种记号如下。

函数 $f(x)$ 的全部原函数称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x) dx$$

(IV)

记号中 $f(x)$ 叫被积函数, $f(x)dx$ 叫被积式, x 叫积分变量。

根据这种记号, 应该有

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

在记号(IV)中出现了微分形式 $f(x)dx$, 这是大有好处的。但是, 正像开始用记号 $\frac{dy}{dx}$ 表示导数没有把它看成是商一样, 现在, 我们暂时也把记号 $\int () dx$ 看成是一个整体, 表示求全部原函数的运算。

§ 5.2 基本积分公式

下列积分公式是以后经常要碰到的, 这些公式可以直接从导数公式反推出来。以后还要陆续补充一些常用公式。

$$(1), \int 1 dx = x + C$$

$$(2), \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$(3), \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(4), \int e^x dx = e^x + C$$

$$(5), \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6), \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7), \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(8), \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(9), \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(10), \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(11), \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\text{或} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$$

$$(12), \int \frac{\frac{dx}{dx}}{1+x^2} = \arctan x + C$$

§ 5.3

变形积分法

性质1. 和(代数和)的积分等于积分的和(代数和):

$$\int (u+v-w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx$$

性质2. 常数因子可以先提出积分号:

$$\int c u dx = c \int u dx$$

例1.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)^2}{x} dx &= \int \frac{x^2+2x+1}{x} dx = \int (x+2+\frac{1}{x}) dx \\ &= \int x dx + 2 \int dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2x + \ln |x| + C \end{aligned}$$

注1: 分成三个不定积分分别积分后只需要添加一个积分常数。

注2: 计算熟练以后可以直接如下计算:

$$\int (x+2+\frac{1}{x}) dx = \frac{1}{2} x^2 + 2x + \ln |x| + C$$

例2. $\int \tan^2 x dx$

(分析) 没有直接的公式, 但可以利用三角恒等式转化成有积分公式的 $\sec^2 x$ 。

$$(\text{解}) \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

$$\text{例3. } \int \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \int \frac{1+\cos \theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} (\theta + \sin \theta) + C$$

练习: 求不定积分

$$1. \int (3x^2+2x+1) dx$$

$$2. \int x^2(1+x^2+x^4) dx$$

$$3. \int \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$4. \int x\sqrt{x} dx$$

$$5. \int \tan^2 x dx$$

$$6. \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta$$

§ 5.4 凑微分法

性质 3. 如果在 x 处自变量时有下列等式:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

则当 V 是 x 的函数时, 通常也有下列等式.

$$\int f(V) dx = F(V) + C$$

根据这条公式就扩大了积分公式的适用范围. 例如基本公式(5)是

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

根据性质 3 就可以得到下列积分

$$\int \frac{1}{3x+2} d(3x+2) = \ln |3x+2| + C$$

如果要求积分 $\int \frac{1}{3x+2} dx$, 可以把 dx 按微分这标经验凑成 $d(3x+2)$, 即

$$dx = \frac{1}{3} d(3x+2).$$

$$\therefore \int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x+2} d(3x+2) = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + C$$

例 1,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x+2} dx &= \frac{1}{3} \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} d(3x+2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (3x+2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (3x+2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

例 2,

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

例 3,

$$\begin{aligned} &\int a^x dx \\ &\text{因 } a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \\ &\therefore \int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{x \ln a} d(x \ln a) \\ &= \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C \end{aligned}$$

$$\text{例4. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} d(\frac{x}{a}) \\ = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

练习： 计算下列积分：

$$\begin{array}{ll} (1) \int (2x+3)^{100} dx, & (2) \int (3-2x)^n dx, \\ (3) \int \cos 2x dx, & (4) \int \sin \frac{x}{2} dx, \\ (5) \int e^{3x+2} dx, & (6) \int 10^x dx, \\ (7) \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}, & (8) \int \frac{dx}{a^2+x^2} \end{array}$$

§ 5.5 第一换元法

由于不定积分是求导的逆运算，因此积分过程就是一种还原的过程。第一换元法就是一种逐步还原法。

$$\text{例1. } \int \sin^4 x \cos x dx$$

(解法1) 如果令 $\sin x = u$ ，则 $du = \cos x dx$

$$\therefore \text{原式} = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$$

再将 $u = \sin x$ 代回得

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x + C \quad (I)$$

为什么把 $\sin x$ 看成 u 就能顺利地积出来呢？现在我们先看 $\frac{1}{5} \sin^5 x$ 的导数

$$(\frac{1}{5} \sin^5 x)' = \frac{1}{5} (\sin^5 x)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \sin^4 x (\sin x)' = \sin^4 x \cos x$$

原来被积函数中的 $\cos x$ 是由于在 $\sin^5 x$ 中把 $\sin x$ 看成中间变量 u ，按复合函数求导产生的。懂得这个道理，就不必写出中间变量，而采取逐步凑微分的步骤还原出原函数。

$$\text{(解法2)} \quad \int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d\sin x = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

例2. $\int \sin^4 3x \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \int \sin^4 3x \cos 3x d3x$

$$= \frac{1}{3} \int \sin^4 3x d\sin 3x = \frac{1}{15} \sin^5 3x + C$$

但必须注意, 单纯的 dx 只能凑成 $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$, 如果想把 dx 凑成 $d\sin x$, 必须在被积函数中包含 $\cos x$ 这个因子. 下面列举几个常出现的凑微分形式:

$$x dx = \frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2a} d(ax^2) = \frac{1}{2a} d(ax^2+b)$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 = \dots$$

$$\frac{1}{x^2} dx = x^{-2} dx = -dx^{-1} = -d\frac{1}{x} = \dots$$

$$\frac{1}{x} dx = d\ln x = \dots$$

特别注意 $\ln x dx \neq d\frac{1}{x}$

$$e^x dx = de^x = \dots$$

但 $e^{2x} dx \neq de^{2x}$, $e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} de^{2x}$

$$\cos x dx = d\sin x = \dots$$

$$\sin x dx = -d\cos x = \dots$$

$$\sec^2 x dx = d\tan x = \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d\arcsin x = \dots$$

寻求。

例3. $\int x\sqrt{1-4x^2} dx = \frac{1}{2} \int (1-4x^2)^{\frac{1}{2}} dx^2$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 4} \int (1-4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-4x^2)$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1-4x^2)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{12} \sqrt{(1-4x^2)^3} + C$$

例4. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

练习:

$$1. \int x^3(1+x^4)^5 dx$$

$$2. \int x \sqrt{4x^2+3} dx$$

$$3. \int x e^{x^2} dx$$

$$4. \int \cot x dx$$

$$5. \int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$$

$$6. \int \frac{1}{x(\ln x+1)} dx$$

§ 5.6

函数变形举例

当积分不能直接通过凑微分积出时，常需要将被积函数按代数恒等式或三角恒等式变形后再积分。这种变形不是盲目的，而是有一定的规律性，下面通过几个例子来掌握规律。

例 1, $\int \frac{x^3}{x+2} dx$

【解】 被积函数是假分式，一般情况下，只要按代数方法转成“带分式”就行了。现在介绍一种凑因式转化法。

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x+2} &= \frac{x^3+2x^2-2x^2-4x+4x+8-8}{x+2} \quad \text{可同除以除数。} \\ &= \frac{x^2(x+2)-2x(x+2)+4(x+2)-8}{x+2} = x^2-2x+4-\frac{8}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x^3}{x+2} dx &= \int (x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

例 2, $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

【解】 被积函数可以改写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)(x-2)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x+2(B-A)}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

比较两边的分子应有

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(B-A)=1 \end{cases}$$

解联立方程组得 $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{1}{x^2-4} dx &= \int \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

一般情况下, 当真分式 $\frac{Px+Q}{Ax^2+Bx+C}$ 的分母能分解成 $(ax+b)(cx+d)$ 时, 可将原分式分成两个简单分式之和再积分。

$$\frac{Px+Q}{Ax^2+Bx+C} = \frac{r}{(ax+b)} + \frac{s}{(cx+d)}$$

其中 r, s 是待定数, 可按例 2 的步骤定出来。

练习: 计算下列积分

$$(1) \int \frac{3}{x^2-x-2} dx \quad (2) \int \frac{x+4}{x^2+5x+6} dx$$

例 3. $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5} dx$

〔分析〕 因分母是不能再分解的二次多项式, 不可能按例 2 的办法分成两个简单的积分。这类积分应分两步, 第一步把分子的 $3x$ 项配以一个常数项使分子的一部分转化成分母的导数; 第二步把分母配方解决第二个积分。

〔解〕 原式 $= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-5}{x^2+4x+5} dx$
 $= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 5 \int \frac{1}{(x+2)^2+1} d(x+2)$

$$= \frac{5}{2} \ln|x^2+4x+5| - 5 \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

练习：求下列积分

$$① \int \frac{x^3}{x+1} dx$$

$$② \int \frac{1}{x^2-9} dx$$

$$③ \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{例4. } \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d\sin x \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

$$\text{例5. } \int \sin^2 x dx$$

〔分析〕 如果要把 $\sin x$ 看成 u ，因被积函数缺少因子 $\cos x$ 单纯 dx 不可能转化成 du ，所以要另想办法。办法是利用三角恒等式中的“半角公式”把二次降为一次。

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x d2x \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例6. } \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x dx = \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x dx \\ &= \int \sec^2 x \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x + \int \frac{1}{\cos x} d \cos x \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\text{例7. } \int \sin 5x \sin 3x dx$$

〔分析〕 这题里显然是不可能用凑微分的办法解决的，如

用三角恒等式中的积化和差公式: $\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) - \frac{1}{16} \int \cos 8x d(8x) \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C \end{aligned}$$

练习: 求下列积分:

1) $\int \sin^3 x dx$

2) $\int \cos^2 x dx$

3) $\int \sec^4 x dx$

4) $\int \sin 5x \cos 3x dx$

§ 5.7 第二换元法

例 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

(解) 令 $x = u^6$, 则 $\sqrt{x} = u^3$, $\sqrt[3]{x} = u^2$, $dx = 6u^5 du$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \int \frac{6u^5 du}{u^3 + u^2} = 6 \int \frac{u^3}{u+1} du \\ &= 6 \int \frac{u^3 + 1 - 1}{u+1} du = 6 \int (u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}) du \\ &= 6(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u - \ln|u+1|) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C \end{aligned}$$

一般地说, 如果根号内出现一次式 $ax+b$, 则令 $ax+b = u^n$, 做几的选择应该使换元后被积式内不再包含根号。

如果根号内出现二次式, 例 1 的换元法就不能顺利进行, 这应用三角函数换元。

例 2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$

(解) 令 $x = a \operatorname{tg} u$, 则 $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 u + a^2} = a \sqrt{\operatorname{tg}^2 u + 1} = a \sqrt{\sec^2 u} = a \sec u$

$$dx = a \sec^2 u du$$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{a \sec^2 u}{a \sec u} du = \int \sec u du$$

$$= \ln |\sec u + \tan u| + C$$

还原时，用 $\tan u = \frac{x}{a}$ ， $\sec u = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ 代入上式得

$$\text{原式} = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{a} \right| + C$$

$$= \ln |\sqrt{x^2+a^2} + x| - \ln a + C$$

$$= \ln |\sqrt{x^2+a^2} + x| + C_1$$

根据例 2 的经验， $\sqrt{x^2+a^2}$ 可用 $x = a \tan u$ 换元达到去根号的目的。那么， $\sqrt{x^2-a^2}$ 就应该用 $x = a \sec u$ 换元。大家想， $\sqrt{a^2-x^2}$ 应该换什么才能达到去根号的目的？

练习：利用换元法计算下列积分

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

现在在 §5.2 的基本公式之后，补充 6 组公式，以后可以直接查用：

$$13. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$17. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$18. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

§5.8 分部积分法

性质4. 设 u, v 都是 x 的函数, 则根据乘积微分公式 $d(uv) = u dv + v du$, 两边积分得

$$\int u dv + \int v du = \int d(uv) = uv$$

移项得

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du} \quad (I)$$

这个公式叫分部积分公式。

$$\text{例1. } \int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

当被积函数是两个不同类型的函数相乘时, 就需用分部积分公式来解决。这时, 要恰当的选择一个函数配合 dx 转化 dv 再套用公式。例1中选 $e^x dx = d e^x$ 是正确的, 如果错选了 $x dx = \frac{1}{2} dx^2$, 则套用公式后反而出现比原来更复杂的积分, 当然行不通。

$$\text{例2. } \int x^2 \ln x dx$$

(分析) 因 $\ln x dx$ 不可能直接转化为 dv , 只有选择 $x^2 dx = \frac{1}{2} dx^2$,

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln x \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

有时被积函数形式并不复杂, 但没有直接的公式, 也没有有关的恒等式可供变形, 也可以直接用分部积分法, 即把 dx