

高中代数

第三册

教法 学法 考法

徐望根 文静 李明理

编 著

三环出版社

教 法 学 法 考 法

高中代数 第三册

徐望根 文 静 李明理 编著

三 环 出 版 社

琼新登字03号

责任编辑 刘文武

封面设计 苏彦斌

教 法 学 法 考 法

高中代数 第三册

徐望根 文静 李明理 编著

三 环 出 版 社 出 版

(海口市滨海大道花园新村20号)

新华书店首都发行所发行

河北省遵化县人民印刷厂印刷

787×1092mm 1/32 7.625印张 字数: 162千字

1992年2月第1版 1992年2月第1次印刷

标准书号: ISBN 7—80564—812—3/G·570

印数 1—10,100册

定价: 3.40元 高中三年一期卷总定价: 14.65元

前 言

教法、学法、考法是教育界的热点问题。“方法”虽然是一种手段,但却是达到最佳彼岸的桥梁。对此,关心教育的理论界和广大教师,潜心研究探讨,新的认识和理论成果层出不穷。广大学生也经常议论,为了提高学习效果,寄希望于良师的指点。

教法、学法、考法是系统工程,三者是不可分的整体,相互制约,相互依存,相互促进。

教学过程是师生双边活动的统一过程。教学活动的中心是学生,教和学都是为了尽快地增长知识,增长才干。教学活动的主体是学生,学生要经过自己的思维和实践,才能最后牢固地掌握知识,发展思维,提高能力,去认识世界改造世界。因此依据教学对象,选择科学的教学方法,缩短师生认识上的距离,以激发学生学习的积极性和主动性,及时满足全体学生对知识的渴求。要做到这一点,教师就必须充分了解学生的学习过程 and 在学习过程中的心理活动,指导学生的学习方法,使教与学达到和谐统一,教学活动适应于学生的认识规律;学习活动适应于教学规律。考法是教与学的评价手段,最优的考法,无疑能激发师生的积极性,促进教学效果与学习效果的提高。

教学、学习和考试本应是一体的。教学和学习不是为了

应考，复习考试也不应当脱离平日的教与学而搞突击。有丰富经验的教师是靠教学目标，形成知识结构和教学结构，靠能力的培养，发展学生的思维，指导学生进行素质和水平的训练，并不断取得师生双方的反馈，进一步调整和发展教学过程。这些教师所教的学生基本知识扎实，能力较强，能举一反三，善于作知识迁移和应用，因此参加各种合格考试和选拔考试，成绩都是好的、稳定的。本书正是这种教与学方法的指导和研究。

基于上述认识，现组织部分教师，把他们多年的教学经验与理论研讨相融合，孕育出一套《教法·学法·考法》丛书，旨在促进教与学最优状态的形成，帮助学生有效地掌握学习。

该丛书，根据各科特点，按照知识结构顺序分块编写。每块知识内容，设有“教学目标”，“教法研讨”，“学法指导”，“解题方法”“考法探索”等栏目。所有内容都适于广大青少年的自学和阅读。

阅读“教学目标”，能了解学习要求。

阅读“教法研讨”，能了解教师怎样传授知识。

阅读“学法指导”，能知道怎样学习更加有效。

阅读“解题方法”，能知道怎样应用基础知识去分析解答书面问题。

阅读“考法探索”，可以进行学习的自我评价。

该丛书是在特级教师、北京景山学校校长崔孟明同志指导下编写的。作为新课题的尝试，一定有很多不足之处，欢迎同志们指正。

编者

1991. 9. 10

目 录

第一章 行列式和线性方程组

第一单元 行列式

〔教学目标〕	(1)
〔教法研讨〕	(2)
〔学法指导〕	(12)
〔解题方法〕	(25)
〔考法探索〕	(30)

第二单元 线性方程组

〔教学目标〕	(38)
〔教法研讨〕	(38)
〔学法指导〕	(48)
〔解题方法〕	(59)
〔考法探索〕	(67)

第二章 排列组合与二项式定理

第一单元 排列与组合

〔教学目标〕	(75)
〔教法研讨〕	(76)
〔学法指导〕	(91)
〔解题方法〕	(104)

〔考法探索〕	(117)
--------------	---------

第二单元 二项式定理

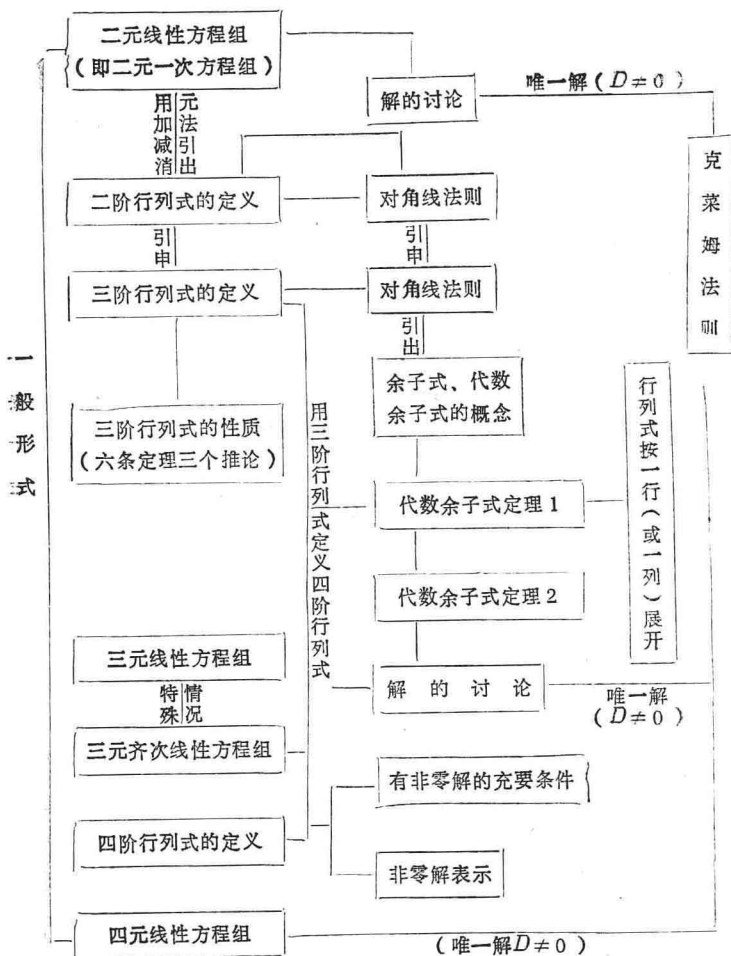
〔教学目标〕	(129)
〔教法研讨〕	(129)
〔学法指导〕	(137)
〔解题方法〕	(143)
〔考法探索〕	(161)

第三章 数列的极限

〔教学目标〕	(167)
〔教法研讨〕	(168)
〔学法指导〕	(188)
〔解题方法〕	(213)
〔考法探索〕	(230)

〔教法研讨〕

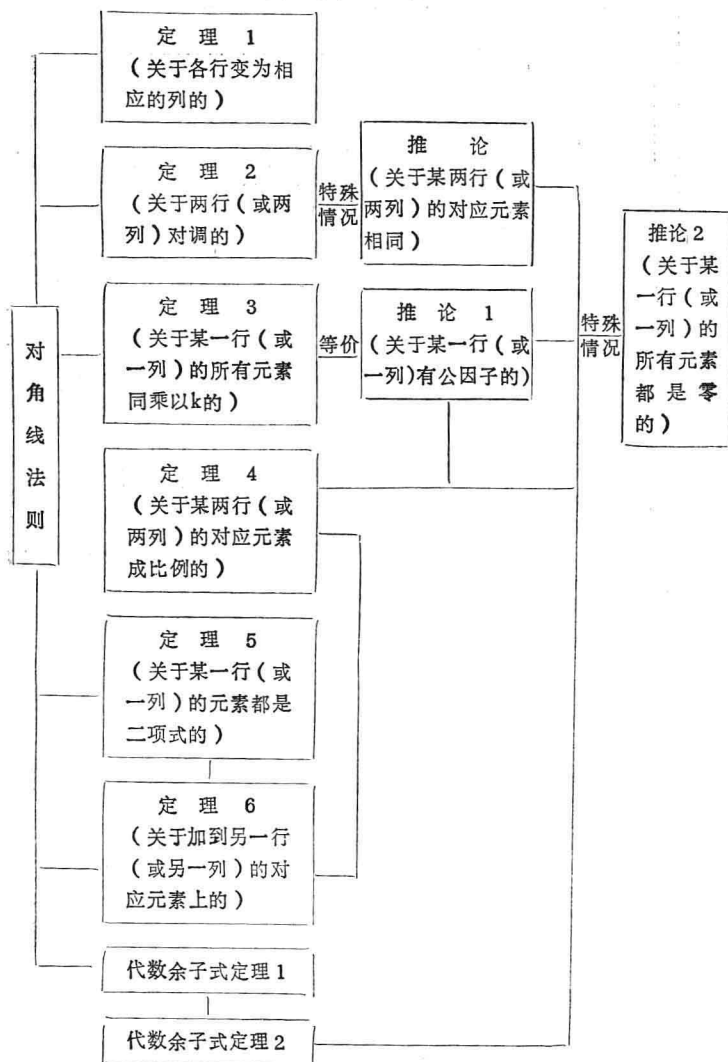
(一) 知识脉络



(二) 行列式结构表

	符号(结构形式)	表 示(规 定)	展开方法
二阶行列式	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	$a_1 b_2 - a_2 b_1$ (共两项)	按一行(或一列)展开(代数余子式定理1) 对角线法则
三阶行列式	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$	$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$ $- a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$ (共六项)	
四阶行列式	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$	$(-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ $+ (-1)^{1+3} c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$ (完全展开后共二十四项)	

(三) 行列式性质及其联系表



(四) 教材简析

1. 行列式的引入

在课本中，注意到二、三、四阶行列式是按不同的方式引入的。

前面说过，二、三阶行列式是用多项式直接定义的，尽管如此，引入的方式也有些不同。

(1) 用加减消元法，导出二元线性方程组的解的公式，研究解的公式中字母系数间的规律，从中引入二阶行列式。

(2) 三阶行列式不是从三元线性方程组的解的公式中引入的，而是通过和二阶行列式进行类比、推广的方法引入的：用两项多项式定义二行二列的二阶行列式。至于为什么前者每项是两个字母相乘，而后者每项是三个字母相乘，为什么每项字母乘积前面的符号（正、负号）是如些规律，为什么前者是两项，而后者是六项等，在讲完对角线法则后再回顾一下就清楚了。

(3) 对角线法则只适用于二、三阶行列式，如果用24项多项式去定义四阶行列式，要处理的问题就很多，因而一般不这样做。

当学完关于三阶行列式的代数余子式定理后，用类似于三阶行列式的办法，按第一行展开的办法去定义四阶行列式，即用三阶行列式去定义四阶行列式，这样的引入比较直截了当，也不难接受。

这三种不同的引入方法，虽缺乏理论上的系统性，但有一个共同的优点，就是引入自然，并便于计算、化简、证明等。

2. 对角线法则——展开方法之一

一般说来，行列式的展开是计算、化简行列式的出发点或归宿，是本单元的一个重点。

对角线法则有简明、方便的特点，展开时要注意正负号的取法：

(1) 所在位置出现的符号：实线上的三个元素的积，添上正号；虚线上的三个元素的积，添上负号。

(2) 元素自身的符号：在实线上或虚线上，偶数个负数之积是正数，奇数个负数之积是负数。

在展开行列式时，初学者宜先把这两种情况的负号都亮出来，再进行计算，避免因符号引起的错误。

3. 行列式的性质——化简行列式的工具

三阶行列式的性质是本单元的另一个重点，它的六条定理、三条推论适用于 n 阶行列式，是化简行列式的有力工具。

定理1 把行列式的各行（或各列）变为相应的各列（或各行），所得行列式与原行列式相等。

定理2 把行列式的两行（或两列）对调，所得行列式与原行列式绝对值相等，符号相反。

推论 如果行列式某两行（或两列）的对应元素相同，那么行列式等于零。

定理3 把行列式的某一行（或一列）的所有元素同乘以某个常数 k ，等于用数 k 乘原行列式。

推论1 行列式的某一行（或一列）有公因子时，可以把公因子提到行列式外面。

推论2 如果行列式某一行的所有元素都是零，那么行列式等于零。

定理 4 如果行列式某两行（或两列）的对应元素成比例，那么行列式等于零。

定理 5 如果行列式的某一行（或一列）的元素都是二项式，那么这个行列式等于把这些二项式各取一项作成相应行（或列）而其余行（或列）不变的两个行列式的和。

定理 6 把行列式某一行（或一列）的所有元素同乘以一个数 k ，加到另一行（或另一列）的对应元素上，所得行列式与原行列式相等。

在教学中，应指明定理和推论中的一些关键的词，如“相应”、“对应”等的含意。对有些定理，应指出其注意点，如定理 6 中应指出被乘的行（或列）仍保持原样等。另外，要说出每条定理和推论的作用。如定理 1 的作用是：行列式关于行所具有的性质和可施行的运算，对列也同样成立，反之亦然。从这个意义上说，行列式的行与列处在等同的地位。

在行列式的计算、化简中，推理 1、推论 2、定理 4、定理 6 是常用的，而定理 6 用得最多。运用的常见步骤是：

（1）首先观察是否可直接运用定理 2 的推论、定理 3 的推论 2 或定理 4 判断行列式等于零。

（2）再看是否可运用定理 3 的推论 1 使元素简化。

（3）运用定理 6，适当选取 k ，使行列式的元素，特别是同一行（或列）的元素，尽可能多地变为零，从而简化计算。有时也可考虑是否能化为第一个步骤的情形。

原行列式与新行列式的关系如下表所示

新旧行列式的关系	相 等	互成相反数	零 (自身关系)	k倍	拆 成 和
内 容	定理 1 推论 1 定理 6	定理 2	推 论 推论 2 定理 4	定理 3	定理 5

例 1 计算或判断行列式的值:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{6} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

解: 运用定理 4, 第一行与第二行的对应元素成比例
 $(k = \frac{2}{3})$, 原式 = 0。

例 2 求下面各行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 2779 & 4367 & 9131 \\ 403 & 806 & 0 \\ 77 & 88 & 99 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1+a+a^2 & b+b^2 & c+c^2 \\ a & b & c \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \end{vmatrix}.$$

解: (1) 运用定理 3 的推论 1 简化行列式, 再运用定理 6, 使元素尽可能多地变为零, 有

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 397 \times 403 \times 11 \times \begin{vmatrix} 7 & 11 & 23 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
 &= 397 \times 403 \times 11 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -195349011.
 \end{aligned}$$

(2) 运用定理 6, 把第 3 列加到第 1 列上去, 再用定理 4, 有原式 = 0。

(3) 运用定理 6, 把第一行的两个元素变为零, 有

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \begin{vmatrix} 1+a+a^2 & b+b^2 & c+c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc(c-b).
 \end{aligned}$$

4. 降阶法——展开方法之二

先叙述代数余子式定理 1: 行列式等于它的任一行 (或一列) 的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积的和。

前面已说过, 此条定理适用于 n 阶行列式。利用这条定理, 行列式可以按某行 (或列) 展开, 逐步降低行列式的阶, 行列式的这种展开方法叫做降阶法。

在一般情况下, 用降阶法计算行列式的值时, 要充分利用行列式性质中的定理 6, 使行列式的元素尽可能地变为零, 特别是某一行 (或列) 上的元素尽可能多地变为零, 以减少计算量。

例 计算行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 21 & 24 & 28 & 32 \\ 6 & 9 & 12 & 15 \\ 12 & 14 & 16 & 18 \\ 40 & 44 & 48 & 52 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3 \times 2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 21 & 24 & 28 & 32 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 2 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(五) 教法建议

可采用单元教学法,按二、三、四阶行列式的顺序进行。由行列式自身的结构,用类比、推广的方法是本单元教学的一个特点。

本单元的重点是:行列式的展开及三阶行列式的性质。

本单元的难点是:三阶行列式性质的运用。

本单元的教法简述如下:

1. 二阶行列式

先由二元线性方程组的解引入二阶行列式和对角线法则,后对二阶行列式进行化简计算并给出解的行列式表示。

2. 三阶行列式

用类比、推广的方法,由二阶行列式引入三阶行列式,并用对角线法则进行化简计算,做到讲练结合。

3. 三阶行列式的性质

用对角线法则去证明三阶行列式的性质，再用该性质来简化行列式的计算，教学时，前者可以由学生自己来证，以加深印象；后者可用提问、板演、示范等方式进行。初学时，化简计算过程的每一步都要叙述理由。

4. 按一行（或一列）展开三阶行列式

在教学中，要分清余子式和代数余子式的区别，展开时要注意正负号，并讲明两条定理的作用：定理1提供了三阶行列式的第二种展开方法；定理1和定理2为解三元线性方程组作准备。

5. 四阶行列式

计算四阶行列式是比较繁的，要求学生充分利用性质并认真、细致地计算。答案可以预先告诉学生，以便于检查。

6. 课堂训练

基本做法同第二册第一章第一单元。但有些题要求用多种途径进行化简计算，使答案取得一致，便于自我检查。

7. 小结

下列几方面的内容，可供小结时参考：

（1）学习行列式，复习旧知识。

（2）通过对角线法则，总结三阶行列式性质间的关系。

（3）利用不同的展开方法和行列式的性质，用多种方法解一道题。

（4）总结行列式的基本题的类型。