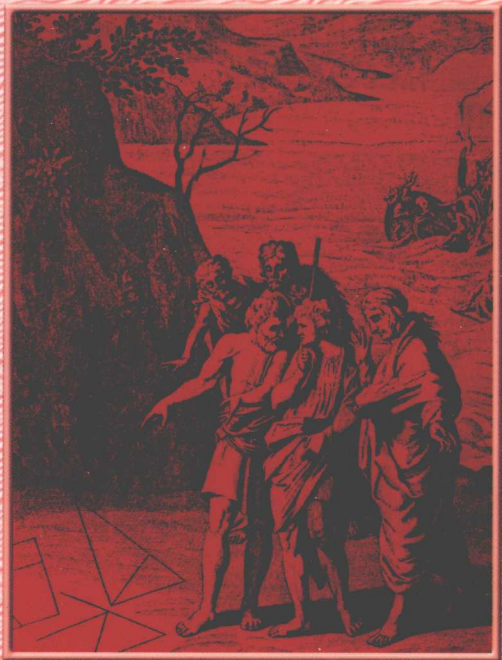


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

成功连贯理论与约当块理论

——从一道比利时数学竞赛试题谈起

谢彦麟 刘培杰 编著



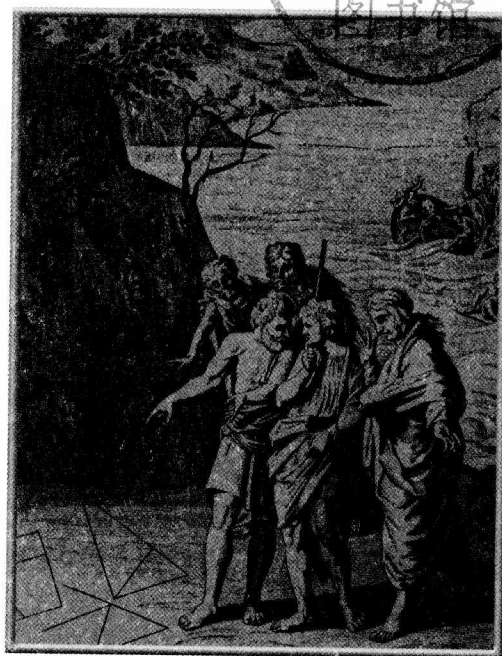
- ◎ 从一道比利时数学竞赛试题谈起
- ◎ 试题的概率背景
- ◎ 延迟了的循环事件
- ◎ 在成功连贯理论中的应用
- ◎ 向量链组的计算过程、原理及结论



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013043284

0211.2
02



谢彦麟 刘培杰 编著

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

成功连贯理论与约当块理论

——从一道比利时数学竞赛试题谈起

- ◎ 从一道比利时数学竞赛试题谈起
- ◎ 试题的概率背景
- ◎ 延迟了的循环事件
- ◎ 在成功连贯理论中的应用
- ◎ 向量链组的计算过程、原理及结论



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1650873

0211.2
02

185820610

内容简介

本书从一道比利时数学竞赛试题开始来介绍成功连贯理论. 本书共两编, 并配有许多典型的例题.

本书适合大中学生参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

成功连贯理论与约当块理论: 从一道比利时数学竞赛试题谈起/谢彦麟, 刘培杰编著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2012. 4

ISBN 978-7-5603-3560-5

I. ①成… II. ①谢… ②刘… III. ①组合概
率-青年读物②约当代数-青年读物

IV. ①O211.2-49 ②O151.23-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 075454 号

策划编辑	刘培杰 张永芹
责任编辑	王勇钢
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真	0451-86414749
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷	哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16 印张 7.25 字数 84 千字
版 次	2012 年 4 月第 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5603-3560-5
定 价	18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007—09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007—09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007—09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007—09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010—06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008—01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010—07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010—01	18.00	61

数学眼光透视	2008—01	38.00	24
数学思想领悟	2008—01	38.00	25
数学应用展现	2008—01	38.00	26
数学建模导引	2008—01	28.00	23
数学方法溯源	2008—01	38.00	27
数学史话览胜	2008—01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007—10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008—01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008—05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011—08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011—06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011—06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012—01	48.00	116
中学数学证明方法	2012—01	58.00	117
数学趣题巧解	2012—03	28.00	128

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006—05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008—01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008—07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010—01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011—08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-05	18.00	183
近代三角形的几何学	2012-05	48.00	184
三角形的五心	2009-06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-02	48.00	162



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
数论入门	2011-03	38.00	99
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—04	38.00	170

整函数	即将出版		161
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—05	78.00	165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009—05	118.00	46, 47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134, 135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008—06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008—09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009—06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010—01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011—01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012—04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012—05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012—05	28.00	185

数学 我爱你	2008—01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008—09	48.00	39
数学史概论	2009—06	78.00	50
斐波那契数列	2010—02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010—07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011—01	28.00	160
数学的创造	2011—02	48.00	85
数学中的美	2011—02	38.00	84
射影几何趣谈	2012—04	28.00	175

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009—02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009—08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007—04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009—08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010—01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010—01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011—03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010—01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011—07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011—07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011—07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011—10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011—10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012—01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012—02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012—03	28.00	167



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语(第一版)	2007-03	28.00	16
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173

实变函数论	2012-05	78.00	181
初等微分拓扑学	2012-05	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从炘数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址: <http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编: 150006

联系电话: 0451-86281378 13904613167

E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn



北航

C1650873

◎
目

录

第一编 成功连贯理论//1

第1章 从一道比利时数学竞赛试题
谈起//3

第2章 试题的概率背景//22

第1节 定义//22

第2节 基本关系//26

第3节 更新方程//32

第4节 延迟了的循环事件//37

第5节 ε 出现的次数//41

第6节 在成功连贯理论中的应用//44

第二编 通过求转换矩阵证明 Jordan

标准型定理//51

第1节 引言//53

第2节 预备知识//57

第3节 向量链组的计算过程、
原理及结论//65

第4节 例//85

编辑手记//104

第一编

成功连贯理论



从一道比利时数学竞赛试题谈起

第

1

章

在 1981 年比利时数学竞赛中有这样一道概率问题：

[试题 A] 两个赌徒 A 和 B 正在看一个小孩不停顿地掷一枚硬币. 如果硬币着地时正面朝天, 则记为 H; 反面朝天, 则记为 T. 这样, 在三次接连的抛掷中, 一定是下列 8 种排列之一

TTT, TTH, THT, HTT

THH, HTH, HHT, HHH

赌徒 A 打赌说: 在接连的抛掷中, THT 一定比 TTT 先出现. 赌徒 B 却打赌说 TTT 要比 THT 要先出现.

问: 这两个赌徒中哪一个赢的可能性大些?

解 本题的答案是:赌徒 A 赢的可能性大. 具体说来是:赌徒 A 赢的概率是 0.6; 而赌徒 B 赢的概率是 0.4; 赌徒 A 与 B 两个不分胜负(即谁也不赢, 谁也不输)的概率是 0.

我们用两种方法解之. 第一种解法要用到一些概率论的知识, 而第二种解法要用到线性代数的知识.

解法一 我们用 $P(\text{事件 } Z)$ 表示发生事件 Z 的概率, 在本题中, 我们所讨论的事件就是小孩每次掷钱币后的结果是正、是反所组成的序列. (当能定出胜负时是有一个有限序列, 而当始终未能定出胜负时是一个无限序列) 即在本题中, 所有事件的集合(称为样本空间, 或者论题) 就是每项或者是 H 或者是 T 所组成的有限或无限序列的全体. 那么出现怎样的事件时, 就算赌徒 A 赢了呢? 那就是出现了 THT, 但在以前始终没有出现 TTT(当然也没有出现过 THT). 同样, 如果出现了 TTT, 而以前始终没有出现 THT(当然也没有出现过 TTT), 那么就算赌徒 B 赢了. 例如在下列事件 TTHHTHT 中, A 就赢了. 因为小孩掷满三次以后, 出现了 TTH; 再掷第四次后, 出现了 THH; …… 一直到小孩第七次掷币后, 才出现 THT, 而以前一直未出现过 TTT, 同样在事件 HTHHHTTT 中, 赌徒 B 赢了. 注意, 可能出现一些事件, 在这种事件下, 赌徒 A 和 B 是决定不了胜负的, 如出现事件

HTHHTH...

那么这就是一例. (始终循环出现 HTH)

现在我们记事件的集合

$X = \{\text{由 T 和 H 组成的序列} \mid \text{先出现 THT, TTT 不出现或以后出现}\}$

这里我们用记号 $\{I\}$ 表示一个集合, 此集合中的元素所满足的条件由竖线 I 以后的内容加以说明. 这样赌徒 A 赢的概率即为

$$x = P(X)$$

我们把集合 X 中的事件分为两类, 一类是 U , 另一类是 V , 即

$$U = \{X \text{ 中的元素, 但第 1 项为 H}\}$$

$$V = \{X \text{ 中的元素, 但第 1 项为 T}\}$$

再记

$$u = P(U), v = P(V)$$

因为

$$X = U \cup V$$

但

$$U \cap V = \emptyset^{\text{①}}$$

故

$$x = u + v \quad (1)$$

我们再把 U 中的元素分成两类: U_1 和 U_2 , 即

$$U_1 = \{X \text{ 中的元素, 但形式为 HT}\dots\}$$

$$U_2 = \{X \text{ 中的元素, 但形式为 HH}\dots\}$$

即我们把 U 中的元素再按第二次掷币后的结果再加以分类. 同样, 因为

$$U = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

若记

$$u_1 = P(U_1), u_2 = P(U_2)$$

那么

$$u = u_1 + u_2 \quad (2)$$

因为在 U 中的元素第一项皆是 H , 所以不管在第二、第三项上出现什么, 由第一、第二、第三这三项所组成的三元组一定不会是 THT 或者 TTT . 所以要判断一次事

① $\emptyset$ 表示空集合.

成功连贯理论与约当块理论

件是否属于 U , 只要从第二项开始算计起, 这样

$$U_1 = \{ \text{小孩第一次掷币出现 H} \} \cap U'_1$$

其中

$$U'_1 = \{ \text{小孩第二次掷币出现 T, 往后是 THT 比 TTT 先出现} \}$$

$$U_2 = \{ \text{小孩第一次掷币出现 H} \} \cap U'_2$$

其中

$$U'_2 = \{ \text{小孩第二次掷币出现 H, 往后是 THT 比 TTT 先出现} \}$$

注意

$$U'_1 = V, U'_2 = U$$

这是因为在 U'_1 和 V 中的序列只是在称呼上有些区别, 而在实质内容上是一样的. 对 U'_2 和 U 亦是如此, 因此若记

$$u'_1 = P(U'_1), u'_2 = P(U'_2)$$

那么

$$u'_1 = v, u'_2 = u$$

再因为小孩各次掷币是相互独立的, 即事件 $\{ \text{小孩第一次掷币出现 H} \}$ 与事件 U'_1 是相互独立的. 因为对两个相互独立的事件, 其交的概率为其分别两个事件的概率的乘积. 因此得到

$$P(U_1) = P(\{ \text{小孩第一次掷币出现 H} \}) \cdot P(U'_1)$$

但因为

$$P(\{ \text{小孩第一次掷币出现 H} \}) = \frac{1}{2}$$

所以

$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot u'_1 = \frac{v}{2} \quad (3)$$

同理

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot u'_2 = \frac{u}{2} \quad (4)$$

这样结合(2),(3),(4)三式,得到

$$u = v \quad (5)$$

用完全类似的方法,对集合 v 进行分析,可以得到关于 u, v 的另一个关系式. 具体说来是,因为 V 中的序列第一项都是 T,所以不能再像前面那样,仅仅是按第二项出现 T 或 H 而对 V 中的序列分类,而是我们将 V 中的序列分成下列互不相容的四类

$$V_1 = \{X \text{ 中的元素,但形式为 THT}\cdots\}$$

$$V_2 = \{X \text{ 中的元素,但形式为 THH}\cdots\}$$

$$V_3 = \{X \text{ 中的元素,但形式为 TTHT}\cdots\}$$

$$V_4 = \{X \text{ 中的元素,但形式为 TTHH}\cdots\}$$

因为对 V 中的元素,绝对不会出现 TTT $\cdots$ 的形式,所以我们有

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$$

若再记

$$U_i = P(V_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

那么就有

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \quad (6)$$

因为对 V_1 中的序列来说,开始的一、二、三项就出现了 THT,所以从第四项以及往后各项来说就可以随便是 H 或 T. 所以再利用第一、第二、第三次掷币的随机独立性,使得

$$U_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad (7)$$

同理可得

$$U_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \quad (8)$$

而