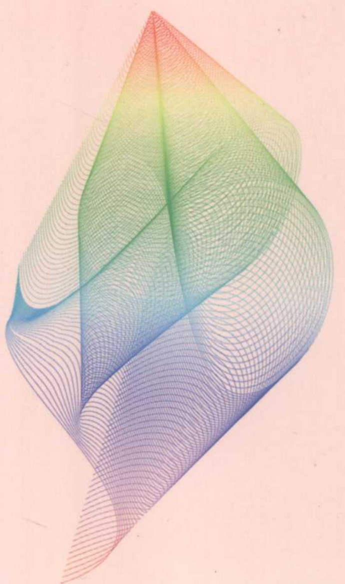
高等院校现代经济管理类系列教材

运筹学

YUNCHOUXUE



周根贵 孟志青 曹柬 蒋敏 编著

经济科学出版社
Economic Science Press

运 筹 学

周根贵　孟志青
曹　柬　蒋　敏　编著

经 济 科 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/周根贵等编著．—北京：经济科学出版社，2012.12

ISBN 978－7－5141－2690－7

Ⅰ．①运…　Ⅱ．①周…　Ⅲ．①运筹学－高等学校－教材　Ⅳ．①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 271984 号

责任编辑：计　梅　张　萌
责任校对：苏小昭
责任印制：王世伟

运筹学

周根贵　孟志青
曹　柬　蒋　敏　编著

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142

总编部电话：88191217　发行部电话：88191537

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

保定市时代印刷厂印刷

保定市时代装订厂装订

787×1092　16 开　15.75 印张　380000 字

2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5141－2690－7　定价：30.00 元

（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：88191502）

前言

按照中国管理百科全书的释义，运筹学是一门应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中的人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。显然，它是经济管理类专业教学中非常重要的课程。

运筹学作为一门以数学为工具的学科，它强调的是各种决策问题的最优化，有很强的应用数学内容，这对经济管理专业学生的教与学都有相当的挑战性。同时，运筹学作为一门课程不仅仅局限于具体工程技术，更主要的是它的目的是为经济和管理决策服务，它是实现管理现代化的有力工具。因此，在运筹学教材的编写中需要突出理论与应用两方面的内容。正是在这种背景下，本书作者在多年从事运筹学教学和科研工作的基础上，力求从应用和实用的角度，为广大企业管理工作者以及相关专业的学生提供一本既能较全面了解运筹学的理论和方法，又能全面掌握运筹学中的各种模型和应用的教材，特别是如何运用运筹学的理论和方法对经济管理中一些典型问题或经济活动进行案例分析。

本书共分10章，第1章主要介绍运筹学的起源、内涵，以及各分支。第2章重点介绍线性规划的基本原理和求解思路，以及线性规划在经济管理中的应用。第3章介绍对偶线性规划的基本概念和理论，对偶线性规划的经济意义和价值，线性规划的经济活动分析及其应用。第4章介绍线性运输问题的基本原理和求解思路，以及不平衡运输问题在经济管理中的应用。第5章介绍线性整数规划的基本原理和求解思路，以及线性整数规划在经济管理中的应用。第6章介绍线性目标规划的基本原理和求解思路，以及线性目标规划在经济管理中的应用。第7章介绍图与网络分析，重点介绍树、路、流的基本理论和求解思路，以及网络分析在经济管理中的应用。第8章介绍存贮论的基本原理，重点介绍确定型存贮模型和随机存贮模型的基本原理和求解思路，以及存贮问题在经济管理中的应用。第9章介绍对策论的基本原理，重点介绍矩阵对策、多人非合作对策、委托—代理理论，以及对策问题在经济管理中的应用。第10章介绍决策分析的基本原理和基本方法，重点介绍不确定决策、风险型决策、效用理论、多目标决策及其在经济管理中的应用。

本书第1、6章由浙江工业大学周根贵编写；第5、8、10章由浙江工业大学孟志青编写；第7、9章由浙江工业大学曹柬编写；第2、3、4章由浙江工业大学蒋敏编写。全书最后由周根贵教授修改、统稿。

本书既注重理论与方法的系统介绍，也注重问题和模型的应用和求解，同时也穿插了大量的应用实例，特别是每章后都系统地介绍了相关的案例分析。书中使用了大量图表，特别是问题求解方面的技巧等的图表以加强读者的直观理解。本书可作为高等院校

经济管理类专业的教材，也可用作各类专业学位和广大企业管理人员的培训教材或参考用书。

我们在编写本书的过程中，尽可能做到深入浅出，力求概念正确，理论联系实际。同时，也参考了大量国内外的同类教材，在此表示衷心的感谢！

本书难免有不当和疏漏之处，望广大读者批评指正。

作者

2012年9月于杭州

目　录

第1章 绪 论

1.1 运筹学的起源与发展

运筹学的英文名字为 Operational Research 或 Operations Research，简称 OR，我国学者从“夫运筹帷幄之中，决千里之外”这句古语中摘取“运筹”二字，从其决策谋划的内涵译为运筹学。尽管中国古代文献中有不少记载朴素的运筹学思想，如田忌赛马等，但是，现代运筹学的起源还是要追溯到第二次世界大战初期。当时迫切需要把各项稀少的资源以更有效的方式分配给各种不同的军事作业及在每一作业内的各项活动，从而，英国及随后美国的军事管理部门召集大批各领域的科学家，组成了最早的军事运筹小组，运用科学手段来处理各种战略与战术问题。其代表性的工作有 1938 年英国为解决空袭的早期预警，积极研究雷达的同时，研究了雷达站与整个防空作战系统的协调配合问题；1942 年美国和加拿大研究反潜战的侦查和组织有效的对敌轰炸等问题；1939 年苏联学者康托洛维奇对列宁格勒胶合板厂的生产计划任务建立的线性规划模型，为数学与管理科学的结合做了开创性的工作。

战争结束后，运筹学在战争中获得的成功引起了在军事领域以外其他行业应用的广泛兴趣，特别是战后经济的快速发展，人们面临的大量经济建设问题本质上与战争中所面临的问题类似，只是现实环境发生了变化，因此，运筹学很自然地被引入到工商企业和政府管理部门。其代表性的工作是 1948 年英国成立“运筹学俱乐部”，在煤炭、电力等部门推广应用运筹学取得的一些进展，20 世纪 50 年代末美国大约有半数的大公司在自己的经营管理中应用运筹学的各种思想和方法，如制订生产计划、物资储备、资源分配、设备更新等方面的决策问题。与此同时，世界各国相继成立了运筹学的专门学术组织、出版运筹学的专门学术刊物，召开运筹学的国际学术会议，并于 1959 年成立国际运筹学联合会（International Federation of Operations Research Societies，IFORS）。

事实上，至少有两个因素对运筹学的飞速发展起到了重要作用。一是在改进运筹学的方法上有了实质性的进步。战后许多参加过运筹学小组或者听说过这项工作的科学家主动对相关领域进行研究，这直接推动了运筹学方法在技术上的巨大进步，在此期间最有代表性的工作是 1947 年，美国科学家乔治·丹茨格（George Dantzig）提出了求解线性规划问题的一般数学模型及其单纯形算法，直到 20 世纪 50 年代末，形成了如线性规划、动态规划、排队论、存储论等内容的运筹学的基本理论和方法。

另一个重要因素是电子计算机技术的发展对促进运筹学发展的巨大贡献。对于运筹学中的复杂问题，手工计算通常难以有效地处理大量的计算工作，借助计算机的运算能力显然要比手工计算快几千倍甚至几百万倍，因而计算机技术的发展对运筹学研究起到了极大的促进作用。特别是20世纪80年代个人计算机和相关商业软件的快速普及推动了运筹学的进一步发展，第三代数字计算机的出现，促使运筹学得以用来研究一些大的复杂社会经济系统，如城市交通、环境污染、国民经济计划与协调等。总之，今天已有数百万人使用运筹学软件，大量的计算机包括大型计算机和家用计算机被用来解决运筹学问题，运筹学已成为当今经济、民政、国防等部门中一门不可缺少的应用科学。

1.2　运筹学的内涵与影响

1.2.1　运筹学的内涵

顾名思义，运筹学（Operations Research）包含了运作研究的含义。据《大英百科全书》释义，“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学”，“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”。《中国大百科全书》的释义为：运筹学是“用数学方法研究经济、民政和国防等部门在内外环境的约束条件下合理分配人力、物力、财力等资源，使实际系统有效运行的技术科学，它可以用来预测发展趋势，制定行动规划或优选可行方案”。《中国管理百科全书》的释义为：运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中的人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。

运筹学的第一个特征是它运用的研究方法类似于已有其他科学领域所采用的科学方法，特别是定量分析方法。它开始于仔细地观察和阐明问题，同时收集所有相关数据；接下来构建一个可以概括问题本质的数学模型；然后假设这个模型可以充分精确地表示问题的本质特征，并且从模型中获得的结论也是有效的；最后用适当的案例来验证这种假设，并且按照需要调整，最终证明这种假设是正确的。

运筹学的第二个特征是它的广泛视野。它不仅广泛地应用于各个领域，例如制造业、运输业、建筑业、通信业、金融业、卫生保健、军事领域和公共服务等，而且，它研究的问题包括对组织和活动的基本特性进行创造性科学研究，以及参与组织的实际管理。运筹学试图用一种方法解决组织中各成员利益的冲突以实现整个组织的最优，这不仅意味着每个问题的研究都要清楚地考虑到组织的所有部分，而且所要实现的目标必须与组织的整体利益保持一致。

运筹学的第三个特征是它常常考虑寻求解决问题的最优解。它的目标是确定最可行的运作过程，而不是简单地改善现状，寻求最优解是运筹学的一个重要主题。然而，没有任何一个人可以是运筹学工作各个方面的专家，因此，运筹学强调的是团队成员的合作，特别是一组具有不同背景和技能的人才，才能有效解决各种复杂的组织管理与决策优化问题。

1.2.2 运筹学的影响

运筹学对于提高全球许多组织的效率都有很大的影响，同时，运筹学在提高各国的生产效率方面也起到了重要作用。国际运筹学联合会（IFORS）目前有几十个成员国，每个国家也有自己的运筹学会。我国于 1956 年在中国科学院力学研究所成立第一个运筹学小组，从而开始了我国在这一领域的研究与推广工作。1980 年 4 月成立了中国运筹学会后，全国各省、市也相继成立了运筹学会的二级学会，在农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油化工、水利、邮电、纺织等部门得到应用推广。

具有重大影响的工作在于各种国际会议的举办和国际学术刊物的出版，运筹学与管理科学学会（INFORMS）是一个国际性的运筹学社团，在它的名下有一系列的刊物，定期发表一些运筹学研究的理论成果及其对各类组织带来的效益。表 1－1 列出了国际上有影响的代表性运筹学应用成果，最新成果的进一步了解可以参考著名刊物《Interface》上发表的 INFORMS 及其下属的管理科学与实践学会（College for the Practice of the Management Sciences）每年颁发的 Franz Edelman 奖项。

虽然大部分运筹学的日常研究产生的经济效益要比表 1－1 中应用小得多，但是，表 1－1中的成效正确地反映了大型的计划完善的运筹学研究可能给经营管理工作带来的重要影响。无论在国内或国外，运筹学在经营管理中的应用前景都是非常广阔的，但是，现实世界存在的问题也是很多的，还有大量的工作需要我们去做。

1.3 运筹学的分支与方法

1.3.1 运筹学的分支

表 1－1 运筹学应用的成功案例

组织	应用	效果
联合航空公司	在满足顾客需求的前提下，以最低成本进行订票及机场工作班次安排	每年节约成本 600 万美元
Citgo 石油公司	优化炼油程序及产品供应、配送和营销	每年节约成本 7000 万美元
荷马特发展公司（Ho-mart Development Co.）	优化商业区和办公楼销售程序	每年节约成本 4000 万美元
AT&T	优化商业用户的电话销售中心选址	每年节约成本 4.06 亿美元，销售额大幅增加
标准品牌公司	控制成品库存（制定最优再订购点和订购量确保安全库存）	每年节约成本 380 万美元

续表

组织	应用	效果
施乐公司	通过战略调整，缩短维修机器的反应时间和改进维修人员的生产率	生产率提高50%以上
宝洁公司	重新设计北美生产和分销系统以降低成本并加快了市场进入速度	每年节约成本2亿美元
法国国家铁路公司	制定最优铁路时刻表并调整铁路日运营量	每年节约成本1500万美元
Delta 航空公司	优化配置上千个国内航线航班来实现利润最大化	每年节约成本1亿美元
IBM	重组全球供应链，保持最小库存的同时满足客户需求	第一年节约成本7.5亿美元
Merit 青铜制品公司	安装统计销售预测和成品库存管理系统，改进客户服务	为客户带来更优质的服务
Taco Bell	优化员工安排，以最低成本服务客户	每年节约成本1300万美元
西尔斯 Sears	安排内部服务和货物运送的车辆、路线	每年节约成本4200万美元
三星电子	缩减制造时间和存贮量	每年增加收入2亿美元
加拿大太平洋铁路	铁路货运的日常安排	每年节约成本1亿美元

运筹学按要解决的问题性质的差别，可以归结为一些不同类型的数学模型。这些不同类型的数学模型构成了运筹学的各个分支。本书主要涉及以下一些分支。

（1）线性规划（Linear Programming）。

经营管理中常常是如何有效地利用现有人力、财力、物力完成更多的任务，或在预定的任务目标下，如何耗用最少的人力、财力、物力去实现这个目标。线性规划就是一种解决人、财、物等资源在线性约束条件下追求最大或最小的线性目标函数的方法。

（2）线性整数规划（Linear Integer Programming）。

线性整数规划是一种解决特殊的线性规划问题的方法，它要求某些决策变量的解必须是整数值，许多组合优化问题都是线性整数规划，如机器排序问题。

（3）线性目标规划（Linear Goal Programming）。

目标规划是解决存在多个目标的最优化问题的方法，线性目标规划是把多目标决策问题转化为线性规划问题来解决的一种方法。

（4）图与网络分析（Graph Theory and Network Analysis）。

运筹学中把一些研究的对象用节点表示，对象之间的联系用边（或弧）表示，点、边（弧）的集合构成图。图论是研究由点和边所组成图形或模型的数学理论和方法。这些特殊的图形或模型可以使我们有效地解决很多诸如系统设计、项目进程管理和控制等方面的问题，称之为网络分析。

（5）存贮论（Inventory Theory）。

存贮论专门研究在各种供应与需求的条件下，什么时候、多大的订货批量来补充存储，使得订购费、库存费以及缺货所带来的损失的费用的总和为最小等问题。

(6) 对策论(Game Theory)。

对策论是用于解决具有博弈性或对抗性局势的模型，在这类模型中，参与博弈或对抗的各方都有一些策略可供选择，对策论为博弈或对抗各方提供获得最优对策的方法。

(7) 决策分析(Decision-Making Analysis)。

决策分析是研究在决策环境不确定和存在风险的情况下，如何用科学的决策替代经验的决策，对整个决策过程涉及的决策方案目标的选取、度量、风险的衡量、效用值的计算等因素综合考虑，直到选取最优方案或策略。

1.3.2 运筹学的方法

运筹学作为一门规范的学科，从研究范畴讲，它有四个方面的任务：从观察现象所得到的结果和进行这种观察所需要的特殊方法；理论和模型的建立；将理论与观察相结合，并从结果得到预测；将这些预测同新的观察比较，并加以证实。从研究方法讲，它有一套严密的解决问题的方法，或称为解决问题周期过程。

(1) 明确问题。

运筹学研究的大部分实际问题最初是以模糊的、不精确的方式被描述出来的。因此，被研究的问题要得到明确的说明和阐述。具体地说，要确定合适目标，问题解决的关键因素，以及与这些因数相关的资源与环境制约。通常在明确问题的同时，还需要收集问题解决的相关数据，为下一阶段研究建立数学模型提供保障。

(2) 建立模型。

模型是对现实世界的事物、现象、过程和系统的简化描述，是对实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达。运筹学解决问题的主要手段是建立数学模型，建模的目的就是寻找解决问题的可行方案，而且是最优方案。所谓定量分析，就是基于能刻画问题的本质的数据和数量关系，建立能描述问题的目标、约束及其关系的数学模型，通过一种或多种数量方法，找到最好的解决方案。

(3) 求解模型。

在所考虑问题的数学模型建立之后，运筹学研究的下一工作是开发程序(通常是基于计算机的程序)求解模型，运筹学的一个共同主题是搜索最优或者最好的解。然而，需要认识的是这些解仅仅对所使用的模型来讲是最优的。由于模型是理想化的而不是问题的真实表示，所以不能不切实际地保证模型的最优解是对现实问题能够实施的最好可能解。现实问题有太多无法估量的因素和不确定性，如果模型被很好地定义和检验，那么产生的解应该是对现实问题理想行动的良好近似。求解模型本身也是获取解决实际问题的各种方案。

(4) 检验模型。

将实际问题的数据资料代入模型，找出的解毕竟是模型的解。为了检验得到的解是否正确，常需采用回溯的方法，即将历史的资料输入模型，研究得到的解与历史实际的符合程度，以判断模型是否正确。当发现有较大误差时，要将实际问题同模型重新对比，检查实际问题中的重要因素在模型中是否已考虑，检查模型中各公式的表达是否前后一致。因

此，在使用模型之前，模型必须被完全地检验以尽可能找出纠正尽可能多的缺陷。

(5) 应用模型。

在检验阶段已经完成并且模型可以被接受，运筹学研究的最后阶段是按管理层的指示实施模型系统。运筹学研究团队应参与发起这个阶段，确保模型的解能够被准确地转换成操作程序并且修正任何被发现的缺陷。实施阶段的成功依赖于大量来自高级管理层以及运作管理层的支持。实施阶段包括很多步骤。首先，运筹学研究团队为运作管理层提供新系统的详细解释以及它怎样与实际运作相联系。其次，双方分担系统实施过程中的责任。

在实施阶段的模型整个使用周期内，必须保持获得系统的运作情况以及模型的假设是否继续满足的反馈信息。当发生对原有假设的重要偏差时，模型应该被重新检验以确定是否需要对系统进行一些改动，甚至重新认清问题。事实上，上述步骤往往需要交叉反复进行。

综上所说，运筹学的一项主要工作就是努力去建立一个用以描述现实世界复杂问题的数学模型，这个模型是近似的，它既精确到足以反映问题的本质，又粗略到能够求出数量上的解。由于现实世界是复杂的，本书只能介绍各类简化的模型例子，帮助对运筹学模型的理解，从而达到举一反三，用于解决各种实际问题。

第2章 线性规划

2.1 线性规划模型

线性规划（Linear Programming）问题主要解决以下两类问题：

（1）当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源（如资金、设备、原材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标。

（2）在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产量最多、成本最低、利润最大等）。

2.1.1 线性规划问题的数学模型

在经济活动和生产管理中，经常会遇到线性规划问题。如何利用线性规划的方法对上述问题进行分析研究，下面举例来加以说明。

例2.1：英飞公司计划生产甲和乙两种产品，已知产品甲和乙的单位产品利润分别是8元和10元。产品生产需要某种原料，每件产品甲和乙所需的原料数分别为2公斤和3公斤，每天可用的原料总数为40公斤；各产品的生产均需经过工厂的两个车间，它们在每个车间中所需要的加工时间，以及每个车间每天可用的总加工时间如表2－1所示。试问：该公司每天应制造这两种产品各多少件，才能使公司获得的利润最大？

表2－1　**产品甲和乙的生产及利润数据**

	产品甲	产品乙	每天可用数量
原料	2	3	40公斤
车间1	3	2	40个工时
车间2	1	1	20个工时
利润（元/件）	8	10	

解：假设生产甲、乙两种产品各 x_1，x_2件/天，所获利润为 z 元/天。则生产甲、乙两种产品的总利润为：

$$z = 8x_1 + 10x_2$$

在生产过程中，每天所需的原料总数 $2x_1 + 3x_2$不可能超过每天可用总数40公斤；生产所

需在车间 1 与车间 2 的总加工时间分别为 $3x_1+2x_2$，x_1+x_2；它们分别不可能超过车间 1 与车间 2 的可用总加工时间 40，20 个工时。也就是说，x_1，x_2 应满足下面的约束条件：

$$s.t.\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 40\\3x_1+2x_2\leqslant 40\\x_1+x_2\leqslant 20\end{cases}$$

其中，x_1 和 x_2 为每天生产的产品件数，所以均为非负变量，即 x_1，$x_2\geqslant 0$。符号 *s.t.*（*subject to* 的缩写）表示"受约束于"。x_1，x_2 称为决策变量。

这样，该问题就变为：在满足以上的约束条件下使公司的利润达到最大。我们用如下数学模型来表示上述问题：

$$\max z=8x_1+10x_2$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 40\\3x_1+2x_2\leqslant 40\\x_1+x_2\leqslant 20\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}\qquad(2-1)$$

例 2.2：小明根据医嘱，每天需补充 A、B、C 三种营养，A 不少于 90 单位，B 不少于 120 单位，C 不少于 160 单位。小明准备每天从四种食物中摄取这三种营养成分。已知这四种食物每公斤的营养成分含量及食物价格如表 2－2 所示。试问：小明每天应购买食物一、二、三、四各多少公斤，才能既满足健康的需要又使得总的花费最小？

表 2－2　　　　四种食物的营养成分及价格

营养成分 \ 食物	食物一	食物二	食物三	食物四
A	13	25	14	40
B	24	19	30	25
C	18	17	21	34
食物单价（元/公斤）	1.5	1.4	1.8	1.9

解：设购买食物一 x_1 公斤，食物二 x_2 公斤，食物三 x_3 公斤，食物四 x_4 公斤，总的花费为 z 元/天。

$$\min z=1.5x_1+1.4x_2+1.8x_3+1.9x_4$$

$$s.t.\begin{cases}13x_1+25x_2+14x_3+40x_4\geqslant 90\\24x_1+19x_2+30x_3+25x_4\geqslant 120\\18x_1+17x_2+21x_3+34x_4\geqslant 160\\x_{1-4}\geqslant 0\end{cases}\qquad(2-2)$$

与上述问题类似的还有很多，这类问题包括一个目标函数和若干个约束条件，它们都是线性函数，我们把这种类型的问题称为线性规划问题。决策变量、目标函数、约束条件为线性规划问题的三要素。通常，线性规划问题具有以下特征：

（1）有一组决策变量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$。决策变量表示对应方案的取值，不同的值表示不同的方案。在很多时候，其取值是非负的。

（2）变量的取值并不是任意的，而是必须受到一定的约束，称之为约束条件。这些约束条件都可用线性不等式或等式来表示。通常，约束条件是指可用资源的有限性。

（3）有一个要求达到的目标，不同的方案所对应的目标值也不同，问题是求使目标达到最大（或最小）的一个方案。同时，目标函数也是线性函数。

假定在线性规划问题中，含有 n 个决策变量，分别用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$表示。在目标函数中，决策变量 $x_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 的系数为 $c_j(j=1, 2, \cdots, n)$，通常称为价值系数。x_j的取值受约束于 m 项资源的限制，第 i 种资源的数量为 b_i，则线性规划的一般形式如下：

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{2-3}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (\text{或}=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (\text{或}=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (\text{或}=, \geqslant) b_m \end{cases} \tag{2-4}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{2-5}$$

其中，a_{ij}表示决策变量 x_j 取值为 1 个单位时所消耗的第 i 种资源的数量。

我们称方程（2-3）为线性规划模型的目标函数，方程（2-4）与（2-5）为线性规划模型的约束条件；方程（2-5）也称为决策变量的非负条件。

线性规划的一般形式可以简写成以下形式：

$$\max(\min) z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{2-6}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或}=, \geqslant) b_i,\ i=1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0,\ j=1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{2-7}$$

如果我们令 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}=(P_1, P_2, \cdots, P_n),\ P_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j=1, 2, \cdots, n,$$

那么，我们用矩阵形式表达，线性规划的一般形式也可以简写成以下形式：

$$\max(\min) z=CX \tag{2-8}$$

$$s.t.\begin{cases} AX \leqslant (\text{或}=, \geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-9}$$

需要要说明的是：

（1）本书中约定向量大于等于零是指其所有的分量均大于等于零。

（2）变量 x_j 的取值一般为非负，即 $x_j \geqslant 0$；从数学意义上，变量 x_j 既可能小于等于零，即 $x_j \leqslant 0$；也可能在 $(-\infty, +\infty)$ 范围内取值，称 x_j 取值不受约束或是取值无约束。

2.1.2 线性规划问题的标准形式

我们约定线性规划的标准形式如下所示：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2-10}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2-11}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{2-12}$$

其中，$b_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$。运用向量和矩阵形式表达，线性规划问题的标准形式还可以简写成以下两种形式：

（1）

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0, & j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

（2）

$$\max z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

对于非标准形式的线性规划问题，可以简单地将一个一般的线性规划问题转化为标准形式，简称标准型。

（1）如果目标函数是求极小化的，即 $\min z = CX$。则，

令 $z' = -z$，求 $\min z = CX$ 等价于求 $\max z' = -CX$。

（2）如果约束条件是不等式。

①如果约束条件是“≤”，不等式的左端加上一个非负变量（称为松弛变量），将不等式方程转化为等式方程，其中，松弛变量是一个≥0 的变量。

②如果约束条件是“≥”，不等式的左端减去一个非负变量（称为剩余变量），将不等式方程转化为等式方程，其中，剩余变量是一个≥0 的变量。

（3）如果约束条件的右端项是负数。则，

在等式左右两端同时乘以（−1）即可。

（4）如果决策变量不满足“≥”的条件。

①如果 $x_j \leqslant 0$，那么，令 $x_j' = -x_j$，$x_j' \geqslant 0$。

②如果 x_j 不受任何约束（取值无约束），那么令 $x_j = x_j' - x_j''$，其中 x_j''，$x_j' \geqslant 0$。