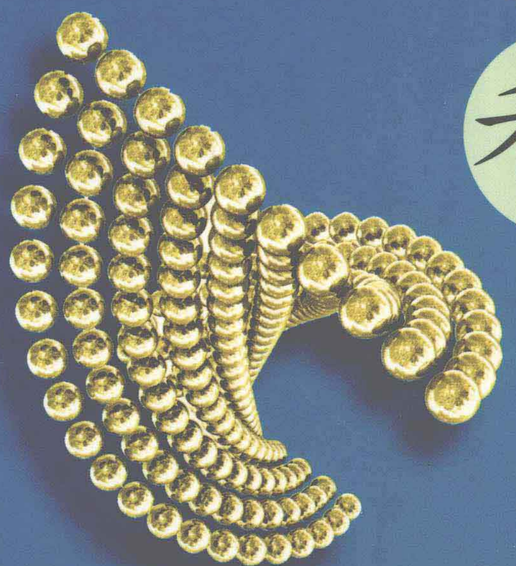
第二卷

下册（第二版）

高中竞赛数学教程

刘诗雄 熊 斌 主编



全国优秀出版社
武汉大学出版社

第二卷

下册（第二版）

高中竞赛数学教程

主编　刘诗雄　熊　斌

编著（以姓氏笔画为序）

边红平　冯志刚　刘诗雄

岑爱国　范端喜　姚华鹏

郭希连　董方博　裴光亚

熊　斌

全国优秀出版社

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中竞赛数学教程:第2卷下册/刘诗雄,熊斌主编.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2003.5
ISBN 7-307-03865-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②熊… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第001497号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本:787×960　1/16　印张:20.375　字数:333千字　插页:1
版次:1993年3月第1版　　2003年4月第2版
2003年5月第2版第1次印刷
ISBN 7-307-03865-X/G・615　定价:22.00元

再版前言

本书自初版以来，受到了广大读者的持久欢迎。作为作者，没有比经常收到读者因使用此书而获得数学学习长足进步或参加国内外竞赛获奖后写来感谢信更高兴的事了——能为中国数学基础教育的提高和科学人才的发现培养尽绵薄之力这正是我们的初衷！谨借此书再版之机，向为中国数学教育事业倾情奉献的广大数学教育工作者致以崇高的敬意！

此次再版，我们对原书作了较大修改。其中第一卷修改由熊斌、冯志刚、范端喜完成；第二卷由刘诗雄、郭希连、边红平、岑爱国、姚华鹏完成。诚恳欢迎广大读者指正书中错漏。

编　　者

2002 年 12 月

序　言

数学竞赛是当今中国教育界的热点之一。自1986年我国派出整队参加国际奥林匹克数学竞赛以来，连获佳绩，令世人侧目。国人在欢欣之余，不断升温，以至各级领导、各类学校都将它列入议事日程，此种“热”，在世界上也堪称独步。

关于“数学竞赛”在数学教育中的地位和作用，国际上是有争论的。1992年8月，在加拿大魁北克市举行的第七届国际数学教育会议上，就有一场特意设计的辩论会（Crossfire），题目就是数学竞赛。会上，攻之者说“数学竞赛只为少数天才服务，题目怪偏，不反映数学的应用功能，在社会公众中带来不好影响。”辩之者称“数学竞赛是培养学生数学兴趣的重要途径，竞赛题思考性强，有助于创造性能力的培养，天才学生的选拔对整个国家的人才开发有利，等等。”辩论没有统一的结论，但是多数人似乎赞成数学竞赛，问题是要组织得好，尽量使多数人受益，数学题目有很多档次，应该在不同水平上组织竞赛，吸收更多的人参加。

我想，这里还是用得到一句名言：“在普及的基础上提高，在提高的指导下普及。”我国的数学竞赛已取得巨大成绩，频夺奖牌之际，今后也许应在普及上多下些功夫，多从教育意义上着眼。

有念及此，恰闻熊斌、刘诗雄等先生编著《高中竞赛数学教程》一书，洋洋近百万字中，有一部分内容安排得和当今的数学教学进度同步，便于一般教师采用，这倒是一个进步。数学竞赛和日常教学相结合，该会更有生命力吧！

作者告诉我，此书非常全，又非常新，几乎囊括了历届的竞赛题及世界各国近几年来的试题，可称数学竞赛的“百科全书”。以我国数学竞赛规模之大，水平之高，出这样一部“全书”，应该是合适的。

二位主要作者都是30岁上下的年轻人，尤令人高兴，我国的数学竞赛专家，早期由华罗庚、苏步青等亲自领导。近10年来则以中国科技大学等高校的一批教授为中坚。现在，欣喜地看到第三梯队也在成长。这是我国数学竞赛事业继续兴旺的标志之一。我想：他们的努力将会是跨世纪

的，应该给予支持。我对数学竞赛可说是外行，但因希望中国数学竞赛继续取得成功，遂乐于作此序，并就教于方家。

张奠宙

1992 年 10 月 8 日于华东师大

前　言

数学奥林匹克是一项历史悠久的国际性智力竞赛活动。自 1894 年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕始，近百年来，开展数学竞赛的范围由欧洲而北美，而澳洲，而亚洲、非洲，不断扩大。尤为引人注目的是，在有着五千年光辉文明的中华大地，鼓励、支持和参加数学竞赛正在成为一种社会风尚。

悠久的历史，普遍的热情，广泛的参与，促成了数学奥林匹克的形式和内容日臻完善。一门奥林匹克数学（又称竞赛数学）正在发育成熟。奥林匹克数学是数学百花园中的一株奇葩，她把现代的数学内容与趣味性的陈述、独创性的技巧有机地结合起来，充分展示了数学的统一美、简洁美、对称美和奇异美。

作为一次甘冒失败风险的尝试，我们编写了这套《高中竞赛数学教程》。也许她过于早产，过于稚嫩。但我们还是抱着聊胜于无的想法将她献给我们所敬重的数学教育界的前辈、专家学者和年轻的同仁，献给跃跃欲试立志在数学奥林匹克赛场上一抖雄风的广大中学生朋友。

鉴于数学奥林匹克培训在我国已经形成的特点，《高中竞赛数学教程》的编写突出了以下两点：(1) 基础与提高并重，本书采用同一内容分“A”和“B”两部分的编写方法，“A”强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识，掌握中学数学以外的竞赛内容；“B”强调提高，帮助学生掌握奥林匹克数学的一些较难的内容和技巧。(2) 同步与超前结合。“A”内容顺序与中学数学内容同步，但在数学思想方法的渗透和思维能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；“B”则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握奥林匹克数学的内容，提高数学素养和综合解题的能力。

这套《高中竞赛数学教程》由熊斌、刘诗雄共同策划和主编。其中第 2,4,5,7,8,9,10,13,14 章由熊斌和冯志刚编写；第 3,6,16,20 章由裴光亚编写；第 15,18,19 章由董方博编写；第 1,11,12,17 章由刘诗雄编写。

正值《高中竞赛数学教程》出版之机，我们向热情为本书题写书名的全国政协副主席、我国数学竞赛创始人之一的著名数学家苏步青老前辈致

以无比的敬意和谢忱；向支持和关心本书写作的数学家、数学教育家张奠宙教授致以崇高的谢意；我们要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造。

由于水平所限，书中错漏难免，敬请专家和读者批评指正。作为抛砖引玉，我们热情地期待更多的优秀奥林匹克数学教材问世。

编　　者

1992 年 9 月 1 日

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数 0,1,2,…构成的集合
$\mathbf{N}^+$	正整数集
$\arg z$	复数 z 的辐角主值
$\tan \alpha$	角 α 的正切函数值
$\cot \alpha$	角 α 的余切函数值
(a,b)	整数 a,b 的最大公约数
$[a,b]$	整数 a,b 的最小公倍数
$a \mid b$	整数 a 能整除 b
$p^\alpha \parallel a$	表示 $p^\alpha \mid a$，而 $p^{\alpha+1} \nmid a$，这里 p 为质数，$\alpha \in \mathbf{N}^+$
$[x]$	不超过实数 x 的最大整数
$\{x\}$	实数 x 的小数部分，即 $\{x\} = x - [x]$
$\binom{n}{m}$	从 n 个元素中选出 m 个元素的组合数
$\delta_m(a)$	a 对模 m 的指数
$\mathbf{Z}[x]$	整系数多项式全体构成的集合
$\deg f$	多项式 $f(x)$ 的次数

目　录

第 16 章　立体几何 …… 1
A
§16.1　空间中的“角”和“距离” …… 1
§16.2　截面、射影、折叠与展开 …… 9
§16.3　四面体 …… 18
§16.4　球 …… 24
B
§16-1　多面角与正多面体 …… 30
§16-2　轨迹和非常规问题 …… 35

第 17 章　解析几何 …… 42
A
§17.1　几个基本问题 …… 42
§17.2　直线 …… 51
§17.3　圆 …… 63
§17.4　非圆二次曲线 …… 70
§17.5　参数方程与极坐标 …… 79
B
§17-1　二次曲线的切线与法线 …… 87

第 18 章　平面几何 …… 95
§18.1　平面几何解题思路探寻 …… 95
§18.2　直线形 …… 103
18.2.1　三角形的四心 …… 103
18.2.2　点共线、线共点 …… 109
18.2.3　面积问题 …… 118
§18.3　圆 …… 125
18.3.1　圆的有关问题 …… 125
18.3.2　西姆松定理和托勒密定理 …… 131

§18.4 轨迹 …… 136
§18.5 定值与定点 …… 144
§18.6 几何作图 …… 154

第19章 几何不等式 …… 162
§19.1 几何方法 …… 162
§19.2 代数方法 …… 171
§19.3 三角方法 …… 179

第20章 几何变换 …… 188
§20.1 平移和旋转 …… 188
§20.2 反射及其变换的乘积 …… 195
§20.3 相似变换 …… 202
§20.4 向量几何 …… 209
20.4.1 平面向量 …… 209
20.4.2 空间向量 …… 218

习题答案或提示 …… 232

第 16 章 立体几何

立体几何研究三维空间基本图形的基本性质. 因此，在处理立体几何问题时，要对研究对象产生正确的空间想象. 一般情况下，还要通过作图来反映几何构形的特点及其元素间的相互关系，利用图形对推理进行解释，帮助我们解决问题. 因此，作图是一项重要的基本功，尽管如此，它仍不过是一种辅助手段. 几何中主要的是逻辑论证，任何图形都不能代替逻辑证明，展现在图中的任何几何事实，必须严格地论证，而不是靠图形得到. 另外，立体几何题虽然以空间形式出现，但在解题时，往往涉及代数、三角等方面的知识和技巧，这说明数学竞赛中的立体几何问题对逻辑推理能力、空间想象能力和运算能力都有较高的要求.

A

§16.1 空间中的“角”和“距离”

立体几何中许多问题都是求“角”和“距离”，或者已知条件中给出了“角”和“距离”等. 凡涉及空间中的“角”或“距离”，都需要根据定义把它们找出来或者作出来，然后再进行推理和运算.

1. 空间中的“角”

空间中的角主要包括异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角，它们的大小都是通过平面上的角来度量的，解题正是从作这个“平面上的角”入手.

解有关异面直线所成角的问题，往往将两异面直线所成角的顶点选在其中一条直线上的某个特殊位置较为有利.

例 1 如图 16-1，正四面体 $ABCD$ 中，MN 是连接 AC 中点 N 与 $\triangle BCD$ 中心 M 的线段，DE 是 AB 边上的高. 求异面直线 MN 与 DE 所成角的大小.

解 设正四面体边长为 a，连 AM，则 $AM\perp$平面 BCD，连 MC, EN.

因为 N 是 $\mathrm{Rt}\triangle AMC$ 的斜边 AC 的中点，故 $MN=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}$．又 DE 是正三角形 ABD 中 AB 边上的高，所以 E 为 AB 的中点，从而 $EN \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$．

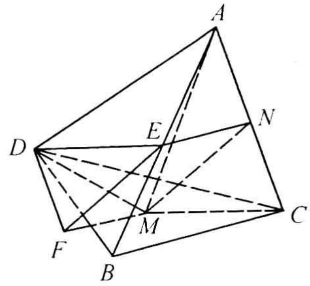


图 16-1

过 E 作 $EF\mathbin{/\!/}MN$，交平面 BCD 于 F，连 DF, MF，则 $\angle DEF$ 为 DE 与 MN 所成的角，且 $EN\mathbin{/\!/}BC$．因为 $EN \underline{\mathbin{/\!/}} MF=\frac{a}{2}$，又 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$DM\perp BC$，所以 $DM\perp MF$，从而可求得

$$DF=\sqrt{DM^2+MF^2}=\sqrt{\frac{7}{12}}a.$$

在$\triangle DEF$ 中，由余弦定理知

$$\angle DEF=\arccos\frac{DE^2+EF^2-DF^2}{2\cdot DE\cdot EF}=\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18},$$

即异面直线 MN 与 DE 之间所成的角是 $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$．

例 2　如图 16-2，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 的中点，F 是 AA_1 上的点，且 $A_1F:FA=1:2$．求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角．

解法 1　如图 16-2，设两平面 B_1EF 与 AA_1D_1D 的交线为 GFH，其中 G 在 AD 上，H 在 D_1A_1 的延长线上．因平面 $AA_1D_1D\mathbin{/\!/}$平面 BB_1C_1C，所以

$$FG\mathbin{/\!/}B_1E.$$

又 $FA\mathbin{/\!/}B_1B$，所以$\angle AFG=\angle BB_1E$，因此

$$\tan\angle AFG=\frac{BE}{BB_1}=\frac{1}{2}.$$

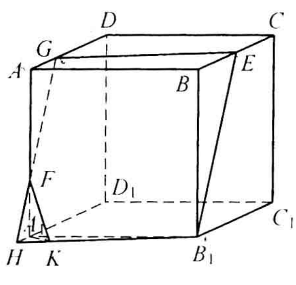


图 16-2

不妨设正方体的棱长为 6．由 $A_1F:FA=1:2$，可得 $A_1F=2$，$FA=4$，从而

$$A_1H=A_1F\cdot\tan\angle HFA_1=2\times\frac{1}{2}=1,$$

$$HB_1=\sqrt{A_1H^2+A_1B_1^2}=\sqrt{37}.$$

作 $A_1K\perp HB_1$（K 为垂足），连接 FK，则 $FK\perp HB_1$，$\angle FKA_1$ 为所求二面角的平面角．因为 $HB_1\cdot A_1K=A_1H\cdot A_1B_1$，即

$$A_1K=\frac{A_1H\cdot A_1B_1}{HB_1}=\frac{6}{\sqrt{37}},$$

所以 $\tan\angle FKA_1=\dfrac{A_1F}{A_1K}=\dfrac{\sqrt{37}}{3}$. 从而$\angle FKA_1=\arctan\dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

这种寻找二面角的平面角的方法是最基本的，但在平面角不很明显的情况下，添辅助线是困难的.

解法 2 如图 16-3，过 B 作平面B_1EF 的垂线BO，O 为垂足. 因为两个平面所成二面角的平面角与两平面的垂线所成的角相等或互补,注意到 BB_1 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的垂线，求平面 B_1EF 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的二面角，只需求$\angle B_1BO$ 即可. 而$\triangle B_1BO$ 是直角三角形，若令正方体的棱长为 1，只需求出 BO 的长.

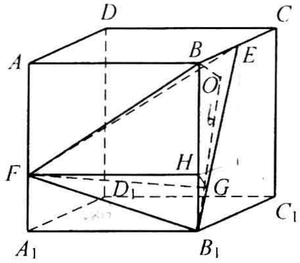


图 16-3

利用四面体体积公式 $V_{B\text{-}B_1EF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle B_1EF}\cdot BO$ 和

$$V_{F\text{-}B_1EB}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1EB}\cdot A_1B_1=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\right)\times1=\frac{1}{12},$$

可得 $BO=\dfrac{1}{4S_{\triangle B_1EF}}$.

现在关键是求$\triangle B_1EF$ 的面积. 过 F 作$FG\perp B_1E$，交 B_1E 于G，即找出$\triangle FB_1E$ 的高FG；再过 F 作$FH/\!/A_1B_1$，交 B_1B 于H，连接 HG. 因为

$$\left.\begin{array}{l}FH\perp\text{平面 }BB_1C_1C,\\ B_1E\perp FG\end{array}\right\}\Rightarrow B_1E\perp HG,$$

所以$\triangle B_1GH$ 是 Rt$\triangle$. 利用$\triangle B_1GH\backsim\triangle B_1BE$，有

$$\frac{HG}{BE}=\frac{HB_1}{B_1E}.$$

而$BE=\dfrac{1}{2}$，$HB_1=A_1F=\dfrac{1}{3}$，$B_1E=\sqrt{BB_1^2+BE^2}=\dfrac{\sqrt5}{2}$，所以 $HG=\dfrac{1}{3\sqrt5}$. 从而 $FG^2=FH^2+HG^2=\dfrac{46}{45}$，因此

$$S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}B_1E\cdot FG=\frac{\sqrt{46}}{12},$$

$$BO=\frac{1}{4S_{\triangle B_1EF}}=\frac{3}{\sqrt{46}}.$$

设$\angle B_1BO=\alpha$（$\alpha\leqslant90^\circ$），则 $\cos\alpha=\dfrac{BO}{BB_1}=\dfrac{3\sqrt{46}}{46}$，$\alpha=\arccos\dfrac{3\sqrt{46}}{46}$，即平面 B_1EF 与底面$A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角为 $\arccos\dfrac{3\sqrt{46}}{46}$.

例 3 如图 16-4，设平面 AC 和 BD 相交于 BC，它们所成的一个二面角为 45°，P 为平面 AC 内的一点，Q 为平面 BD 内的一点．已知直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影，并且 M 在 BC 上．又设 PQ 与平面 BD 所成的角为 β，$\angle CMQ=\theta$（$0°<\theta<90°$）．又线段 PM 的长为 a，求线段 PQ 的长．

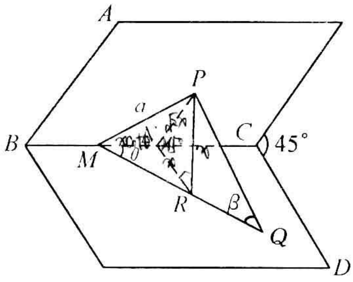


图 16-4

解 如图 16-4，自点 P 作平面 BD 的垂线，垂足为 R．由于直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影，所以 R 在 MQ 上．过 R 作 BC 的垂线，设垂足为 N，则 $PN\perp BC$．因此 $\angle PNR$ 是所给二面角的平面角，$\angle PNR=45°$．

由于直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影，所以 $\angle PQR=\beta$.

在 Rt△PNR 中，$NR=PR\cdot\cot 45°=PR$.

在 Rt△MNR 中，$MR=NR\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=PR\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}$.

在 Rt△PMR 中，

$$a^2=PR^2+MR^2=PR^2+\frac{PR^2}{\sin^2\theta}=PR^2\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right).$$

而已知 $0°<\theta<90°$，所以 $PR=\dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

在 Rt△PRQ 中，$PQ=PR\cdot\dfrac{1}{\sin\beta}=\dfrac{a\sin\theta}{\sin\beta\cdot\sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

故线段 PQ 的长为 $\dfrac{a\sin\theta}{\sin\beta\cdot\sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

有时，题目并无角的概念，但在证题时，角却起着重要的作用.

例 4 求证：4 个侧面面积相等的四面体为等腰四面体（3 双对棱相等的四面体）.

证 如图 16-5，设四面体 $ABCD$ 中，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}$.

又设二面角 A-BC-D，A-DC-B，A-BD-C 的平面角分别为 γ,α,β．于是有 $S_{\triangle ABC}\cos\gamma+S_{\triangle ACD}\cos\alpha+S_{\triangle ADB}\cos\beta=S_{\triangle BCD}$，即

$$\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta=1. \quad ①$$

又设二面角 C-AB-D，B-AC-D，C-AD-B 的平面角分别为 x,y,z，同理可得

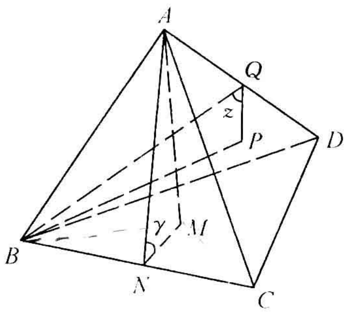


图 16-5

$$\cos x+\cos y+\cos \gamma=1, \qquad ②$$

$$\cos \alpha+\cos y+\cos z=1, \qquad ③$$

$$\cos \beta+\cos x+\cos z=1. \qquad ④$$

由①,②,③,④式易得

$$\cos x=\cos \alpha, \quad \cos y=\cos \beta, \quad \cos z=\cos \gamma.$$

注意到 $0<x, y, z, \alpha, \beta, \gamma<\pi$，所以

$$x=\alpha, \quad y=\beta, \quad z=\gamma.$$

作 $AM\perp$平面 BCD，M 为垂足；$AN\perp BC$，N 为垂足；$BP\perp$平面 ACD，P 为垂足；$BQ\perp AD$，Q 为垂足．由

$$V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}AM\cdot S_{\triangle BDC}=\frac{1}{3}BP\cdot S_{\triangle ACD},$$

知 $AM=BP$，从而 $AN=BQ$．又 $\frac{1}{2}AN\cdot BC=\frac{1}{2}BQ\cdot AD$，所以

$$BC=AD.$$

同理可证 $AB=CD$，$AC=BD$．

因此四面体 $ABCD$ 是等腰四面体．

2．空间中的“距离”

立体几何中非常活跃的是异面直线之间的距离．求异面直线之间的距离，是从作公垂线出发的．

例5 设 l, m 是两条异面直线，在 l 上有三点 A, B, C，且 $AB=BC$．过 A, B, C 分别作 m 的垂线 AD, BE, CF，垂足依次为 D, E, F．已知 $AD=\sqrt{15}$，$BE=\frac{7}{2}$，$CF=\sqrt{10}$．求 l 与 m 之间的距离．

解 设 LM 是直线 l 与 m 的公垂线，$L\in l$，$M\in m$．过 m 作平面 P 平行于直线 l，过 A, B, C 分别作平面 P 的垂线 AG, BH, CK，垂足分别为 G, H, K，则点 G, H, K 落在与 l 平行的直线 l' 上，连 GD, HE, KF，如图16-6．

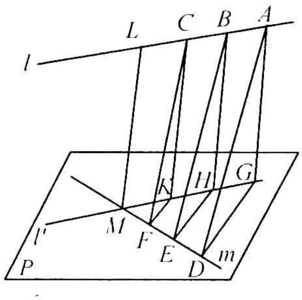


图 16-6

因为 $AB=BC$，$AG\parallel BH\parallel CK$，故 $GH=HK$．又 $AD\perp m$，$BE\perp m$，$CF\perp m$．由三垂线定理得

$$GD\perp m, \quad HE\perp m, \quad KF\perp m.$$

从而 $GD\parallel HE\parallel KF$，且 E, H 分别为 FD, KG 的中点．设 l 与 m 的距离为 x，则

$$AG=BH=CK=LM=x.$$

又

$$GD=\sqrt{AD^2-AG^2},\ HE=\sqrt{BE^2-BH^2},\ KF=\sqrt{CF^2-CK^2},$$

结合 $AD=\sqrt{15}$，$BE=\dfrac{7}{2}$，$CF=\sqrt{10}$知，当 A,B,C 在 L 点同一侧时，有 $2HE=KF+GD$，即

$$2\sqrt{\frac{49}{4}-x^2}=\sqrt{10-x^2}+\sqrt{15-x^2}.$$

解得 $x=\pm\sqrt{6}$.

例 6　如图 16-7，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，点 E,F 分别是 AB 和 CC_1 的中点．求 EF 和 AD_1 之间的距离．

解　取 BC 的中点为 G，连 EG,AC，则 $EG/\!/AC$；连 GF，则 $GF/\!/AD_1$．故平面 $EGF/\!/$平面 ACD_1.

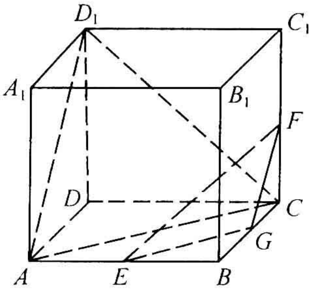


图 16-7

作 $CH\perp$平面 EGF 于 H，则 CH 的长度是平面 EGF 与平面 ACD_1 的距离，即异面直线 EF 与 AD_1 的距离．

因为 $EG/\!/AC$，$GF/\!/AD_1$，$\angle D_1AC=60^\circ$，所以$\angle EGF=120^\circ$．从而

$$S_{\triangle EGF}=\frac{1}{2}EG\cdot GF\cdot\sin 120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2,$$

这样就有

$$V_{三棱锥C\text{-}EGF}=\frac{1}{3}S_{\triangle EGF}\cdot CH=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}a^2\cdot CH=\frac{\sqrt{3}}{24}a^2\cdot CH.$$

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC=\dfrac{1}{2}a^2$，$CE$ 是$\triangle ABC$ 的 AB 边上的中线，故

$$S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}a^2.$$

又由 EG 是$\triangle EBC$ 的边 BC 上的中线知，$S_{\triangle EGC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle EBC}=\dfrac{1}{8}a^2$．所以

$$V_{三棱锥F\text{-}EGC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{8}a^2=\frac{1}{48}a^3.$$

又由 $V_{三棱锥C\text{-}EGF}=V_{三棱锥F\text{-}EGC}$，得$\dfrac{\sqrt{3}}{24}a^2\cdot CH=\dfrac{1}{48}a^3$，所以 $CH=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

上述两例，介绍了两种重要的方法：

（1）设法作出两异面直线的公垂线；

（2）转化为直线和与它平行的平面（或平面与平面）之间的距离．

例 7　已知三棱锥 $S\text{-}ABC$，底面是边长为 $4\sqrt{2}$的正三角形，棱 SC 的长为 2，且垂直于底面，E,D 分别为 BC,AB 的中点．求 CD 与 SE 之间