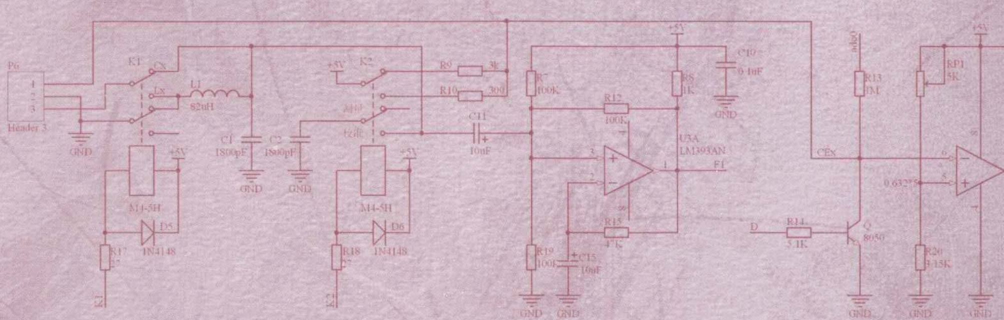
新世纪

普通高等教育电气工程与自动化类课程规划教材

电路分析实验教程

DIANLU FENXI SHIYAN JIAOCHENG

主编　程荣龙



大连理工大学出版社

普通高等教育电气工程与自动化类课程规划教材

新世纪

电路分析实验教程

DIANLU FENXI SHIYAN JIAOCHENG

主　编　程荣龙
参　编　杨春兰　颜　红

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电路分析实验教程 / 程荣龙主编. — 大连 : 大连理工大学出版社，2013.3

普通高等教育电气工程与自动化类课程规划教材

ISBN 978-7-5611-7733-4

Ⅰ.①电… Ⅱ.①程… Ⅲ.①电路分析—实验—高等学校—教材 Ⅳ.①TM133-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 049675 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　　印张:7.5　　字数:180 千字

印数:1～2000

2013 年 3 月第 1 版　　2013 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:赵晓艳　　责任校对:吴楠楠

封面设计:波　朗

ISBN 978-7-5611-7733-4　　定　价:18.00 元

前言

《电路分析实验教程》是普通高等教育电气工程与自动化类课程规划教材之一。

“电路分析”是电气电子类各专业必修的技术基础课，也是非电类各专业电工与电子技术或电工学课程中不可缺少的组成部分，其配套的实验课是在整个教学环节中必不可少的组成因素。本教材正是为适应这一教学环节要求而编写的。

为了适应教学改革不断深入的需要，根据应用型人才培养的要求，本教材在理论教学的基础上，加强对学生应用能力和实践能力的培养。电路实验作为学习电路分析基础、电路原理、电工技术及电工学等理论课的一个重要实验教学环节，通过验证理论，对巩固和加深所学理论知识，增强感性认识，提高学生实际工作技能，培养分析和处理实际问题的能力和科学严谨作风，为学习后续课程和从事实践技术工作奠定基础具有重要作用。

本教材包括4章，内容涵盖电路实验测试基本知识、直流电阻电路与基本测量、动态电路、正弦稳态电路、常用电子仪器设备等。第1章主要介绍测量误差、数据处理等电测量的基本知识；第2章主要介绍常用电子元器件及其检测；第3章主要介绍电路分析基础实验，共包含17个实验项目，不同的理论课可根据教学大纲要求选择适当的实验内容；第4章主要介绍常用电子仪器及实验设备，并且简单介绍了KHDG-1型高性能电工综合实验装置的结构组成及使用。

本教材可作为高等院校工科电气电子各专业“电路分析”课程的实验教材，非电类各专业“电工技术基础”课程的实验参考教材，高等职业教育、成人教育和网络教育等同类专业的实验课教材，也可作为工程技术人员工作实践中的

参考资料。

本教材由蚌埠学院程荣龙担任主编，蚌埠学院杨春兰、颜红参加了部分章节的编写工作。具体编写分工如下：第1、2章由程荣龙编写，第3章由杨春兰编写，第4章由颜红编写。程荣龙负责全书的统稿和定稿工作。同时，在本教材的编写过程中，许多老师给予了很大帮助，在此表示衷心的感谢！

由于作者的水平有限、经验不足，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请读者批评指正，并将意见和建议反馈给我们，以便修订时改进。

编 者

2013年3月

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com
欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com
联系电话：0411-84707424 84706676

目　录

第 1 章　电测量的基本知识 …… 1

1.1　实验误差分析及仪表的准确度 …… 1

1.2　实验数据的处理 …… 6

1.3　实验数据的分析整理和实验报告 …… 15

第 2 章　常用电子元器件及其检测 …… 17

2.1　电阻器和电位器 …… 17

2.2　电容器 …… 24

2.3　电感器 …… 30

2.4　变压器 …… 34

2.5　二极管 …… 37

2.6　三极管 …… 42

第 3 章　电路分析基础实验 …… 47

3.1　元件参数及性能的测定 …… 47

3.2　电位的测量及电位图的绘制 …… 50

3.3　基尔霍夫定律及叠加原理的测定 …… 52

3.4　戴维南定理的验证及电源等效变换 …… 55

3.5　受控源 VCVS、VCCS、CCVS、CCCS 的实验 …… 61

3.6　典型电信号的观察与测量 …… 65

3.7　RC 一阶电路的响应测试 …… 67

3.8　二阶动态电路响应的研究 …… 70

3.9　元件阻抗特性的测定 …… 72

3.10　正弦稳态交流电路相量的研究 …… 74

3.11　串联谐振电路的研究 …… 77

3.12　二端口网络测试 …… 80

3.13　互感电路研究 …… 83

3.14　三相交流电路中电压、电流的测量 …… 86

3.15 三相鼠笼式异步电动机正反转控制 …… 88
3.16 单相电度表的校验 …… 92
3.17 功率因数及相序的测量 …… 94
第 4 章 常用电子仪器及实验设备 …… 97
4.1 直流稳压电源 …… 97
4.2 交流毫伏表 …… 98
4.3 万用表 …… 99
4.4 函数信号发生器 …… 102
4.5 示波器 …… 105
4.6 功率表 …… 110
4.7 KHDG-1 型高性能电工综合实验装置简介 …… 111
参考文献 …… 113

第1章

电测量的基本知识

1.1 实验误差分析及仪表的准确度

1.1.1 实验数据的误差分析

被测量有一个真值，它由理论给定或由计量标准规定。在实际测量该量时，由于受测量仪表、测量方法、环境条件或测量者能力等因素的限制，测量值与真值之间不可避免地存在误差，即测量误差。人们常用绝对误差、相对误差或有效数字来说明测量值的准确程度。作为一名工程技术人员，为了评定实验数据的精确性或误差，认清误差的来源及其影响，需要对实验的误差进行分析和讨论。应能正确分析误差产生的原因，采取措施减少误差，使测量结果更加准确；同时也应学会正确处理实验数据，最终得到正确的实验结果。

1. 误差的基本概念

测量是人类认识事物本质不可缺少的手段。通过测量和实验能使人们对事物获得定量的概念并发现事物的规律性。科学上很多新的发现和突破都是以实验测量为基础的。测量就是用实验的方法，将被测量与所选用作为标准的同类量进行比较，从而确定它的大小。

(1)真值与平均值

真值是待测物理量客观存在的确定值，也称为理论值或定义值。真值通常是无法测得的。在实验中，若测量的次数无限多时，根据误差的分布定律，正、负误差出现的概率相等。再细致地消除系统误差，将测量值加以平均，可以获得非常接近于真值的数值。但是实际上实验测量的次数总是有限的，用有限的测量值求得的平均值只能是近似真值，常用的平均值有以下几种：

①算术平均值

算术平均值是最常见的一种平均值。设 x_1、x_2、…、x_n 为各次测量值，n 代表测量次数，则算术平均值为

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{1-1}$$

②几何平均值

几何平均值是将一组 n 个测量值连乘并开 n 次方求得的平均值，即

$$\bar{x}_{几} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \tag{1-2}$$

③均方根平均值

均方根平均值是将一组 n 个测量值平方和的平均值开平方后所求得的值，即

$$\bar{x}_{均} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \tag{1-3}$$

④对数平均值

在化学反应、热量和质量传递中，其分布曲线多具有对数的特性，在这种情况下表征平均值常用对数平均值。

设两个变量 x_1 和 x_2，其对数平均值为

$$\bar{x}_{对} = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\ln \dfrac{x_1}{x_2}} \tag{1-4}$$

可以看出，变量的对数平均值总小于算术平均值。当 $x_1/x_2 \leqslant 2$ 时，可以用算术平均值代替对数平均值。

当 $x_1/x_2 = 2$ 时，$\bar{x}_{对} = 1.443$，$\bar{x} = 1.50$，$(\bar{x}_{对} - \bar{x})/\bar{x}_{对} = 4.2\%$，则 $x_1/x_2 \leqslant 2$ 时，引起的误差不超过 4.2%。

介绍以上各平均值的目的是要从一组测量值中找出最接近真值的那个值。在化工实验和科学研究中，数据的分布多数属于正态分布，所以通常采用算术平均值。

(2)测量误差的来源

在任何测量中，由于各种主观和客观因素的影响，使得测量值不可能完全等于被测量的真值，而只是它的近似值。一般产生测量误差的原因如下：

①仪表误差：是指由于仪表的电气或机械性能不完善所产生的误差。

②使用误差(操作误差)：是指在使用仪表过程中，因安装、调节、布置、使用不当引起的误差。

③人身误差：是指由于人的感觉器官和运动器官的限制所造成的误差。

④环境误差：是指由于受到温度、湿度、大气压、电磁场、机械振动、声音、光、放射性等影响所造成的误差。

⑤方法误差：又称为理论误差，是指使用的测量方法不完善、理论依据不严密、对某些经典测量方法做了不适当的修改简化所产生的误差，即凡是在测量结果的表达式中没有得到反映的因素，而实际上这些因素又起作用时所引起的误差。例如，用伏安法测量电阻时，若直接以电压表值与电流表值之比作为测量结果，而不计电表本身内阻的影响，就会引起方法误差。

(3)误差的分类

根据误差的性质和产生的原因，一般分为以下三类。

①系统误差

系统误差是指在测量和实验中未发觉或未确认的因素所引起的误差，而这些因素的

影响结果永远朝一个方向偏移，其大小及符号在同一组实验测定中完全相同，当实验条件一经确定，系统误差就获得一个客观上的恒定值。

当改变实验条件时，就能发现系统误差的变化规律。

系统误差产生的原因：测量仪表不良，如刻度不准，仪表零点未校正或标准表本身存在偏差等；周围环境的改变，如温度、压力、湿度等偏离校准值；实验人员的习惯和偏向，如读数偏高或偏低等引起的误差。针对测量仪表的缺点、外界条件变化影响的大小、个人的偏向，待分别加以校正后，系统误差是可以清除的。

②偶然误差

在已消除系统误差的一切量值的测量中，所测数据仍在末一位或末两位数字上有差别，而且它们的绝对值和符号的变化时大时小、时正时负，没有确定的规律，这类误差称为偶然误差或随机误差。偶然误差产生的原因不明，因而无法控制和补偿。但是，若对某一量值作足够多次的等精度测量后，就会发现偶然误差完全服从统计规律，误差的大小或正负的出现完全由概率决定。因此，随着测量次数的增加，偶然误差的算术平均值趋近于零，所以多次测量结果的算术平均值将更接近于真值。

③过失误差

过失误差是一种显然与事实不符的误差，它往往是由于实验人员粗心大意、过度疲劳和操作不正确等原因引起的。此类误差无规则可寻，只要加强责任感、多方警惕、细心操作，过失误差是可以避免的。

2. 精密度、准确度和精确度

反映测量值与真值接近程度的量，称为精确度（也称为精度）。它与误差大小相对应，测量的精度越高，其测量误差就越小。精度应包括精密度和准确度两层含义。

(1)精密度

测量中所测得数值重现性的程度，称为精密度。它反映偶然误差的影响程度，精密度高就表示偶然误差小。

(2)准确度

测量值与真值的偏移程度，称为准确度。它反映系统误差的影响程度，准确度高就表示系统误差小。

(3)精度

它反映测量中所有系统误差和偶然误差综合的影响程度。

在一组测量中，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度也不一定高，若精度高，则精密度和准确度都高。

为了说明精密度与准确度的关系，可用下述打靶子例子来说明，如图 1-1 所示。图 1-1(a)表示精密度和准确度都很高，则精度高；图 1-1(b)表示精密度高，但准确度却不高；图 1-1(c)表示精密度与准确度都不高。在实际测量中没有像靶心那样明确的真值，而是设法去测定这个未知的真值。

在实验过程中，学生往往满足于实验数据的重现性，而忽略了数据测量值的准确程度。绝对真值是不可知的，人们只能制定出一些国际标准作为测量仪表准确性的参考标准。随着人类认识运动的推移和发展，数据测量值可以逐步逼近绝对真值。

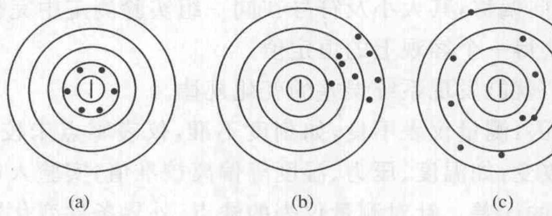


图 1-1 精密度和准确度的关系

3.误差的表示方法

利用任何量具或仪表进行测量时，总存在误差，测量值总不可能准确地等于被测量的真值，而只是它的近似值。测量质量的高低以测量精度作指标，根据测量误差的大小来估计测量的精度。测量值的误差越小，则认为测量越精确。

(1)绝对误差

测量值 X 和真值 A_0 之差为绝对误差，通常称为误差，即

$$D=X-A_0 \tag{1-5}$$

由于真值 A_0 一般无法求得，因而式(1-5)只有理论意义。常用高一级标准仪表的示值作为实际值 A 以代替真值 A_0。由于高一级标准仪表存在较小的误差，因而 A 不等于 A_0，但总比 X 更接近于 A_0。X 与 A 之差称为仪表的示值绝对误差，即

$$d=X-A \tag{1-6}$$

与 d 相反的数称为修正值，即

$$C=-d=A-X \tag{1-7}$$

通过检定，可以由高一级标准仪表给出被检仪表的修正值 C。利用修正值便可以求出该仪表的实际值 A，即

$$A=X+C \tag{1-8}$$

(2)相对误差

衡量某一测量值的准确程度，一般用相对误差来表示。示值绝对误差 d 与被测量的实际值 A 的百分比称为实际相对误差，即

$$\delta_A=\frac{d}{A}\times 100\% \tag{1-9}$$

以仪表的测量值 X 代替实际值 A 的相对误差称为示值相对误差，即

$$\delta_X=\frac{d}{X}\times 100\% \tag{1-10}$$

一般来说，除了某些理论分析外，用示值相对误差较为适宜。

(3)引用误差

为了计算和划分仪表精度等级，从而提出引用误差的概念。其定义为仪表的示值绝对误差与量程范围之比，即

$$\delta_A=\frac{示值绝对误差}{量程范围}\times 100\%=\frac{d}{X_n}\times 100\% \tag{1-11}$$

式中 d——示值绝对误差；

X_n——标尺上限值－标尺下限值。

(4)算术平均误差

算术平均误差是各个测量点的误差的平均值,即

$$\delta_{平} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i|}{n} \tag{1-12}$$

式中 n——测量次数;

d_i——第 i 次测量的误差。

(5)标准误差

标准误差也称为均方根误差。其定义为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}}, \quad n \to \infty \tag{1-13}$$

式(1-13)适用于无限测量的场合。实际测量工作中,测量次数 n 是有限的,则改用下式

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n-1}} \tag{1-14}$$

标准误差不是一个具体的误差,σ 的大小只说明在一定条件下等精度测量集合所属的每一个测量值对其算术平均值的分散程度。σ 的值越小则说明每一次测量值对其算术平均值的分散程度越小,测量的精度越高;反之,σ 的值越大则说明每一次测量值对其算术平均值的分散程度越大,测量的精度越低。

在化工原理实验中最常用的 U 形管压差计、转子流量计、秒表、量筒、电压表等仪表原则上均取其最小刻度值为最大误差,而取其最小刻度值的一半作为绝对误差计算值。

1.1.2 测量仪表的精度

测量仪表的精度等级是用最大引用误差(又称为允许误差)来标明的。它等于仪表示值的最大绝对误差与仪表量程范围的百分比。

$$\delta_{\max} = \frac{示值最大绝对误差}{量程范围} \times 100\% = \frac{d_{\max}}{X_n} \times 100\% \tag{1-15}$$

式中 $\delta_{\max}$——仪表的最大引用误差;

$d_{\max}$——仪表示值的最大绝对误差;

X_n——标尺上限值－标尺下限值。

通常情况下是用标准仪表校验较低级的仪表。所以,示值的最大绝对误差就是被校仪表与标准仪表之间的最大绝对误差。

测量仪表的精度等级是国家统一规定的,把允许误差中的百分号去掉,剩下的数字就称为仪表的精度等级。仪表的精度等级常以圆圈内的数字形式标明在仪表的面板上。例如某台压力计的允许误差为 1.5%,这台压力计电工仪表的精度等级就是 1.5,通常简称为 1.5级仪表。

仪表的精度等级为 a,它表明仪表在正常工作条件下,其最大引用误差 $\delta_{\max}$ 不能超过的界限,即

$$\delta_{\max}=\frac{d_{\max}}{X_n}\times100\%\leqslant a\% \tag{1-16}$$

由式(1-16)可知，在应用仪表进行测量时所能产生的最大绝对误差(简称为误差限)为

$$d_{\max}\leqslant a\%\cdot X_n \tag{1-17}$$

而用仪表测量的最大值相对误差为

$$\delta_{\max}=\frac{d_{\max}}{X_n}\leqslant a\%\cdot\frac{X_n}{X} \tag{1-18}$$

由上式可以看出，用指示仪表测量某一被测量所能产生的最大示值相对误差，不会超过仪表允许误差 $a\%$ 乘以仪表的测量上限 X_n 与测量值 X 的比。在实际测量中为可靠起见，可用下式对仪表的测量误差进行估计，即

$$\delta_m=a\%\cdot\frac{X_n}{X} \tag{1-19}$$

【例 1-1】 用量程为 5 A，精度等级为 0.5 级的电流表，分别测量两个电流，$I_1=5$ A，$I_2=2.5$ A，试求测量 I_1 和 I_2 的相对误差为多少？

$$\delta_{m1}=a\%\times\frac{I_n}{I_1}=0.5\%\times\frac{5}{5}=0.5\%$$

$$\delta_{m2}=a\%\times\frac{I_n}{I_2}=0.5\%\times\frac{5}{2.5}=1.0\%$$

由此可见，当仪表的精度等级选定时，所选仪表的测量上限越接近被测量的值，则测量误差的绝对值越小。

【例 1-2】 欲测量约 90 V 的电压，实验室现有 0.5 级 0～300 V 和 1.0 级 0～100 V 的电压表。问选用哪一种电压表进行测量较好？

用 0.5 级 0～300 V 的电压表测量 90 V 的相对误差为

$$\delta_{m0.5}=a_1\%\times\frac{U_n}{U}=0.5\%\times\frac{300}{90}=1.7\%$$

用 1.0 级 0～100 V 的电压表测量 90 V 的相对误差为

$$\delta_{m1.0}=a_2\%\times\frac{U_n}{U}=1.0\%\times\frac{100}{90}=1.1\%$$

上例说明，如果选择恰当，用量程范围适当的 1.0 级电压表比用量程范围较大的 0.5 级电压表能够得到更准确的测量结果。因此，在选用仪表时，应根据被测量的大小，在满足被测量数值范围的前提下，尽可能选择量程较小的仪表，并使测量值大于所选仪表满刻度的三分之二，即 $X>\frac{2}{3}X_n$。这样既可以满足测量误差的要求，又可以选择精度等级较低的测量仪表，从而降低仪表的成本。

1.2 实验数据的处理

1.2.1 有效数字及其运算规则

在科学与工程中，总是以一定位数的有效数字来表示测量或计算结果，但并不是数值

中小数点后面的位数越多越准确。实验中从测量仪表上所读数值的位数是有限的，取决于测量仪表的精度，其最后一位数字往往是仪表精度所决定的估计数字，即一般应读到测量仪表最小刻度的十分之一位。数值准确度大小由有效数字位数来决定。

1.有效数字

测量中常会遇到大量数据的读取、记录和运算。如果位数过多，将增加数据处理的工作量，而且会被误认为测量精度很高造成错误的结论。反之，位数过少，将丢失测量应有的精度，影响测量的准确度。因此在记录和计算测量数据时，必须掌握有效数字的正确取舍。所谓有效数字，是指从左边第一个非零的数字开始直到右边最后一位数字为止所包含的数字。对于有效数字有以下三点规定：

(1)数字 0 可以是有效数字，也可以不是有效数字。例如：40.70 mV 是四位有效数字，4.0 mV 是两位有效数字，0.040 7 V 是三位有效数字。

(2)如果某数值的最后几位都是 0，应根据有效数字写成不同的形式。例如：12 000 若取两位有效数字应写成 1.2×10^4 或者 12×10^3；若取三位有效数字，应写成1.20×10^4、12.0×10^3 或 120×10^2。

(3)换算单位时，有效数字不能改变。例如：测得的频率为 0.016 5 MHz，可换算写成 16.5 kHz，都是三位有效数字。

为了清楚地表示数值的精度，明确读出有效数字的位数，常用指数的形式表示，即写成一个小数与相应 10 的整数幂的乘积。这种以 10 的整数幂来记数的方法称为科学记数法。

例如：75 200　　有效数字为四位时，记为 7.520×10^4

有效数字为三位时，记为 7.52×10^4

有效数字为二位时，记为 7.5×10^4

0.004 78　　有效数字为四位时，记为 4.780×10^{-3}

有效数字为三位时，记为 4.78×10^{-3}

有效数字为二位时，记为 4.8×10^{-3}

2.数字的舍入规则

传统的四舍五入法是有缺点的，因为 1 与 9，2 与 8，3 与 7，4 与 6 的舍入误差在舍入次数足够多时也可能抵消，而当被处理的数是 5 时，如果仍按四舍五入法，只入不舍就会产生较大的累积误差。因此，在测量技术中目前广泛地采用如下的舍入规则：

(1)舍弃部分大于所保留的末位单位数字的 0.5，则末位加 1。

(2)舍弃部分小于所保留的末位单位数字的 0.5，则舍掉而末位不变。

(3)舍弃部分等于所保留的末位单位数字的 0.5，则将末位凑成偶数。

即末位为偶数时(0，2，4，6，8)，末位不变；末位为奇数时(1，3，5，7，9)，末位加 1。

例如：下列各数均取四位有效数字时有：

3.141 59 则写成 3.142

8.672 36 则写成 8.672

6.314 50 则写成 6.314

4.103 501 则写成 4.104

3.计算中各有效数字的运算规则

(1)记录测量数值时,只保留一位可疑数字。

(2)加减法运算规则。以其中小数点后位数最少的为准,其余各数均保留比它多一位。所得的最后结果与小数点后位数最少的位数相同。

例如:8.23+5.062 5+1.401 78 则写成 8.23+5.062+1.402。

(3)乘除法运算规则。以各数中位数最少的为准,其余各数或乘积(或商)均比它多一位,而与小数点位置无关。

例如:3.12×1.817 05×3.642 3÷0.007 189 则写成 3.12×1.817×3.642÷0.007 189。

(4)对数运算规则。所取对数位数应与真数位数相等。

(5)平均值运算规则。若由四个数值以上数据组成则取其平均值,则平均值的有效位数可增加一位。

1.2.2 误差的基本性质及数据处理

在实验中通过直接测量或间接测量得到有关的参数数据,其可靠程度如何?如何提高其可靠性?因此,必须研究在给定条件下误差的基本性质和变化规律。

1.误差的正态分布

如果测量数列中不包括系统误差和过失误差,从大量的实验中发现偶然误差的大小有如下几个特征:

(1)绝对值小的偶然误差比绝对值大的偶然误差出现的机会多,即偶然误差的概率与偶然误差的大小有关。这是偶然误差的单峰性。

(2)绝对值相等的正偶然误差或负偶然误差出现的次数相当,即偶然误差的概率相同。这是偶然误差的对称性。

(3)极大的正偶然误差或负偶然误差出现的概率都非常小,即大的偶然误差一般不会出现。这是偶然误差的有界性。

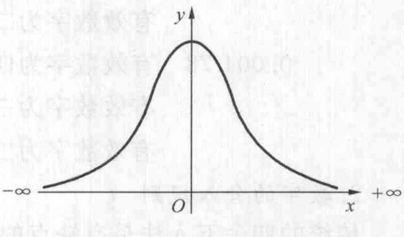


图 1-2 偶然误差概率分布

(4)随着测量次数的增加,偶然误差的算术平均值趋近于零。这是偶然误差的抵偿性。

根据上述误差特征,偶然误差概率分布如图 1-2 所示。图中横坐标表示偶然误差,纵坐标表示偶然误差出现的概率,图中曲线称为误差分布曲线,以 $y=f(x)$ 表示。其数学表达式由高斯提出,具体形式为

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{1-20}$$

或

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-h^2x^2} \tag{1-21}$$

式(1-20)和式(1-21)称为高斯误差分布定律，也称为误差方程。其中 σ 为标准误差，h 为精度指数，σ 和 h 的关系为

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \tag{1-22}$$

若误差按函数关系分布，则称为正态分布。σ 越小，测量精度越高，分布曲线的峰越高且越窄；σ 越大，分布曲线越平坦且越宽，如图 1-3 所示。由此可知，σ 越小，小误差占的比例越大，测量精度越高；反之，则大误差占的比例越大，测量精度越低。

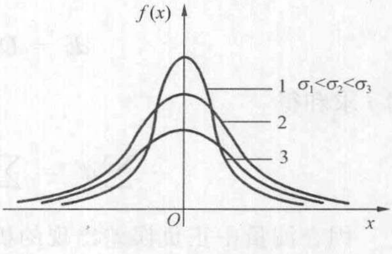


图 1-3 不同 σ 的误差分布曲线

2. 测量集合的最佳值

在测量精度相同的情况下，由一系列测量值 M_1，M_2，M_3，…，M_n 所组成的测量集合，假设其平均值为 $\overline{M}$，则各次测量误差近似为

$$x_i \approx M_i-\overline{M}\ ,\quad i=1,2,\cdots,n$$

当采用不同的方法计算平均值时，所得到误差值不同，误差出现的概率亦不同。若选取适当的计算方法，使误差最小，且概率最大，由此计算的平均值为最佳值。根据高斯分布定律，只有各点误差平方和最小，才能实现概率最大，这就是最小乘法值。由此可见，对于一组精度相同的测量值，采用算术平均得到的值是该组测量值的最佳值。

3. 有限测量次数中标准误差 σ 的计算

由误差基本概念可知，误差是测量值和真值之差。在没有系统误差存在的情况下，以无限多次测量所得到的算术平均值为真值。当测量次数为有限时，所得到的算术平均值近似于真值，称为最佳值。因此，测量值与真值之差不同于测量值与最佳值之差。

令真值为 A，计算平均值为 a，测量值为 M，并令 $d=M-a$，$D=M-A$，则

$$d_1=M_1-a,D_1=M_1-A$$
$$d_2=M_2-a,D_2=M_2-A$$
$$\vdots$$
$$d_n=M_n-a,D_n=M_n-A$$
$$\sum d_i=\sum M_i-na,\sum D_i=\sum M_i-nA$$

因为 $\sum M_i-na=0$，则 $\sum M_i=na$，代入 $\sum D_i=\sum M_i-nA$ 中，即得

$$a=A+\frac{\sum D_i}{n} \tag{1-23}$$

将式(1-23)代入 $d_i=M_i-a$ 中得

$$d_i=(M_i-A)-\frac{\sum D_i}{n}=D_i-\frac{\sum D_i}{n} \tag{1-24}$$

将式(1-24)两边各平方得

$$d_1^2 = D_1^2 - 2D_1 \frac{\sum D_1}{n} + (\frac{\sum D_1}{n})^2$$

$$d_2^2 = D_2^2 - 2D_2 \frac{\sum D_2}{n} + (\frac{\sum D_2}{n})^2$$

$$\vdots$$

$$d_n^2 = D_n^2 - 2D_n \frac{\sum D_n}{n} + (\frac{\sum D_n}{n})^2$$

对 i 求和得

$$\sum d_i^2 = \sum D_i^2 - 2\frac{(\sum D_i)^2}{n} + n(\frac{\sum D_i}{n})^2$$

因在测量中正负误差出现的机会相等，故将 $(\sum D_i)^2$ 展开后，$D_1 \cdot D_2$、$D_1 \cdot D_3$、…为正、为负的数目相等，彼此相消，故得

$$\sum d_i^2 = \sum D_i^2 - 2\frac{\sum D_i^2}{n} + n\frac{\sum D_i^2}{n^2}$$

$$\sum d_i^2 = \frac{n-1}{n}\sum D_i^2$$

从上式可以看出，在有限测量次数中，由算术平均值计算的误差平方和永远小于由真值计算的误差平方和。根据标准误差的定义有

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n}}$$

式中，$\sum D_i^2$ 代表测量次数为无限多时误差的平方和，故当测量次数有限时有

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}} \tag{1-25}$$

4. 可疑测量值的舍弃

由概率积分可知，偶然误差正态分布曲线下的全部积分相当于全部误差同时出现的概率，即

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = 1 \tag{1-26}$$

若误差 x 以标准误差 σ 的倍数表示，即 $x = t\sigma$，则误差出现在$[-t\sigma, t\sigma]$范围内的概率为 $2\Phi(t)$，超出这个范围的概率为 $1-2\Phi(t)$。$\Phi(t)$称为概率函数，表示为

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \tag{1-27}$$

在数学手册或专著中一般附有此类积分表，$2\Phi(t)$与 t 在取定时，可在该表中查到，读者需要时可自行查取。在使用积分表时，需已知 t 值。表 1-1 和图 1-4 给出几个典型及其相应的超出或不超出$|x|$的概率。