中小学教师参考丛书

怎样教与学平面几何

第 二 册

光明日报出版社

中小学教师参考丛书

怎样教与学平面几何

（第二册）

主编　贾士代　　常克峰

编者　李子良　马法仁　闻传俭　黄绪焕
　　　冯立海　司马仲杰　于士宽　孙天胜
　　　于德贵　王志高　许卣京　樊建义

审订：翟连林

光明日报出版社

怎样教与学平面几何

（第二册）

主编　常克峰　贾士代

光明日报出版社出版发行

（北京永安路106号）

新华书店北京发行所经销

保定市满城太行印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张 7.375　字数120千字

1991年2月第一版　1991年2月第一次印刷

书号：ISBN7—80014—918—X/G·331

印数：19310册　定价：3.45元

丛书出版说明

实现我国四个现代化的重要因素是人的素质，提高人的素质的关键是教育，提高教育质量的关键是教师。为了帮助教师备好课，提高教学质量，我们组织全国有丰富教学经验的特级教师、高级教师和教研员，编写出版了这套“中小学教师参考丛书”。

这套丛书主要内容是：交流教学经验、教学资料和教学科研成果。

由于我们的水平有限，欢迎广大教师提出宝贵意见。

“中小学教师参考丛书”编委会

1991、1.

“中小学教师参考丛书”编辑委员会

目 录

第六章　相似形

一、　比例线段

1.　比例

比例就是两个比相等的式子，用字母可表示为$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

比例的性质定理“$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$”是推证其它比例定理的基础，我们学习这个定理时，要注意以下几点：

（1）　定理左边的比例式与右边的等积式互为因果，它们是四条线段a、b、c、d同一数量关系的两种不同形式，其中四个字母都不等于零；

（2）　比例式和等积式可以互化，在任何场合都可以互相代替，也就是说它们是等价的；

（3）　“$\Rightarrow$”是一个推出符号，读作“推出”，而“$\Longleftrightarrow$”是互推符号，读作“等价于”，引入这两个符号可以缩短证明过程，显示出证明过程的逻辑结构，使证明层次分明，清晰易懂；

（4）　根据比例的性质定理，一个比例式（或等积式）都可以写成七种不同形式，掌握这七种形式的变换，对以后学习比例线段和相似形会带来一定的方便。

证明合比定理“$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$”的方法是在$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的两边同加上$\pm 1$，这个方法是如何想起来的呢？

我们分析如下：

要证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$，

只需证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\pm\frac{b}{b}=\frac{c}{d}\pm\frac{d}{d}$，

即证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$。

象这样，将一个等式的两边同加上或同减去一个相同的数或式，以达到解题目的的方法叫做比值法，这种方法在数学中经常用到。

课本中等比定理“$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$”是运用比值法进行证明的。这种方法是数学上解决问题的有力杠杆，特别是对解决有关比例式的问题非常有效。

为了帮助读者切实掌握这一方法，下面我们用比值法证明合比定理。

设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则 $a=bk$，$c=dk$。

从而 $\dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{bk \pm b}{b} = k \pm 1$, $\dfrac{c \pm d}{d} = \dfrac{dk \pm d}{d} = k \pm 1$。

于是 $\dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d}$.

例1 从下列各式中，求$\dfrac{a}{b}$.

(1) $(a+b):b = 11:9$；(2) $b:2 = (a-b):3$；

(3) $b = \sqrt{6ab}$；(4) $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{4}{7}$.

解：(1) $(a+b):b = 11:9 \Rightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{11}{9}$

$$\Rightarrow \frac{a+b-b}{b} = \frac{11-9}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{9};$$

(2) $b:2 = (a-b):3 \Rightarrow \dfrac{b}{2} = \dfrac{a-b}{3}$

$$\Rightarrow \frac{b+a-b}{2+3} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{2};$$

(3) $b = \sqrt{6ab} \Rightarrow b^2 = 6ab \Rightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{ab}{b^2} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{6}$;

(4) $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow \dfrac{a+b-a}{a} = \dfrac{7-4}{4}$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3}.$$

例2 （1）已知：$2x-3y=0$，且$x\neq 0$。求证：$\dfrac{x+y}{x-y}=5$。

（2）已知：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，$a\neq 0$，$c\neq 0$。

求证：$\dfrac{a^2+2b^2}{a^2}=\dfrac{c^2+2d^2}{c^2}$。

证明：（1）$2x-3y=0\Rightarrow 2x=3y\Rightarrow\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{3+2}=\frac{x}{3}\\&\frac{x-y}{3-2}=\frac{x}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{x+y}{3+2}=\frac{x-y}{3-2}$$

$$\Rightarrow\frac{x+y}{x-y}=5.$$

（2）$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\Rightarrow\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{2b^2}{2d^2}$

$$\Rightarrow\frac{a^2+2b^2}{c^2+2d^2}=\frac{a^2}{c^2}\Rightarrow\frac{a^2+2b^2}{a^2}=\frac{c^2+2d^2}{c^2}.$$

例3 已知：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{5}{7}$，且$2b-d+7f\neq 0$，

求$\dfrac{2a-c+7e}{2b-d+7f}$的值。

解法一：

$$\text{已知}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{5}{7}b, \\ c=\dfrac{5}{7}d, \\ e=\dfrac{5}{7}f. \end{cases}$$

从而

$$\frac{2a-c+7e}{2b-d+7f}=\frac{\dfrac{5}{7}(2b-d+7f)}{2b-d+7f}=\frac{5}{7}.$$

解法二：

$$\text{已知}\Rightarrow\frac{2a}{2b}=\frac{-c}{-d}=\frac{7e}{7f}=\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{2a-c+7e}{2b-d+7f}=\frac{5}{7}.$$

例4 已知：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{11}$，$x\neq0$，$y\neq0$，$z\neq0$。

求$\dfrac{x+y-z}{x}:\dfrac{x+y+z}{y}$的值。

解法一： 设$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{11}=k\,(k\neq0)$，则$x=3k$，

$y=4k$，$z=11k$。

从而 $$\frac{x+y-z}{x}=\frac{3k+4k-11k}{3k}=-\frac{4}{3},$$

$$\frac{x+y+z}{y}=\frac{3k+4k+11k}{4k}=\frac{9}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{x+y-z}{x} : \frac{x+y+z}{y} = \left(-\frac{4}{3}\right) : \frac{9}{2} = -\frac{8}{27}.$$

解法二： $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{11} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{-z}{-11}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y-z}{3+4-11}=\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x+y-z}{-4}=\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y-z}{x}=-\frac{4}{3},$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{11} \Rightarrow \frac{x+y+z}{3+4+11}=\frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{y}=\frac{9}{2}.$$

于是 $$\frac{x+y-z}{x} : \frac{x+y+z}{y} = \left(-\frac{4}{3}\right) : \frac{9}{2}$$

$$=-\frac{8}{27}.$$

例5 已知：$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，且$a$、$b$、$c$互不相等，求$x+y+z$的值。

解法一： 设$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，则$x=k(a-b)$，$y=k(b-c)$，$z=k(c-a)$.

$$\therefore\quad x+y+z=k(a-b)+k(b-c)+k(c-a)$$

$$=k(a-b+b-c+c-a)=0。$$

解法二： $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}\Rightarrow\frac{x+y}{a-c}=\frac{z}{c-a}$

$$\Rightarrow x+y=-z\Rightarrow x+y+z=0。$$

说明： 因为$a-b+b-c+c-a=0$，所以本题不能直接用三个比相等的等比定理，即

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}\\ m+n+p\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x+y+z}{m+n+p}=\frac{x}{m}.$$

例6 已知：$x=\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}$，求$x$的值。

解： 当$a+b+c\neq 0$时，

已知$\Rightarrow x=\frac{c+a+b}{a+b+b+c+c+a}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$，

当$a+b+c=0$时，则

$$a+b=-c\Rightarrow x=\frac{c}{a+b}=-1。$$

说明：(1) 解答本题，要注意分$a+b+c\neq 0$和$a+b+c=0$两种情况；

(2) 本题的解答进一步说明，用等比定理$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$时，一定要注意这个定理成立的条件$b+d+\cdots+n\neq 0$。

例7 已知$a:b:c=3:4:5$，且$a+b+c=24$，求a、b和c。

解： 由$a:b:c=3:4:5$，可设

$a=3k$，$b=4k$，$c=5k$。

$\because$ $a+b+c=24$，$\therefore$ $3k+4k+5k=24$。

解之，得 $k=2$。

于是 $a=6$，$b=8$，$c=10$。

小结： 当已知条件中有$x:y:z=a:b:c$时，设$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$，是解这类题的一种通法。

2. 比例线段

(1) 两条线段的比

用字母表示线段有两种意义：一是形的意义，即表示作为几何图形的线段；二是表示这条线段的长度．而在同一单位下，两条线段长度的比称为这两条线段的比，换句话说，两条线段之比是用同一单位度量两条线段所得数量的比，这个“比”是两条线段的倍数关系的表现，这表示一条线段是另一条线段的几倍或几分之一．在几何图形中，任何一条线段的长度都是一个正量，所以两条线段之比是一个正数，并且两条线段的比值与所采用的长度单位没有关系．但我们必须注意，当给出的两条线段长度所使用的单位不一样时，一定要化为同一种单位，再计算其比值．

(2) 比例线段

在四条线段中，如果某两条线段的比等于另两条线段的比，那么这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段．用字

母表示，记作$a:b=c:d$或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。其中b、c称为比例的内项，a、d称为比例的外项，d称为a、b、c的第四比例项。

若a与b的比等于b与c的比，即$a:b=b:c$，则b称为a、c的比例中项，常表示成以下三种形式：

(i) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$（或$a:b=b:c$）；

(ii) $b^2=ac$； (iii) $b=\sqrt{ac}$。

有关数的比和比例的各种性质，完全适应于线段的比和比例线段。

例1 如图6—1，已知：在$\triangle ABC$中，点D、E分别在边AB、AC上，且$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$。

求证：(1) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$；

(2) $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$。

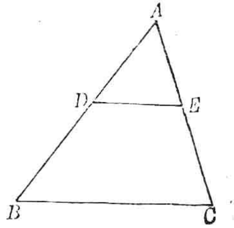

图 6—1

证明：(1) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}\Rightarrow\frac{DB+AD}{AD}$

$=\frac{EC+AE}{AE}\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$。

(2) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{EC}.$$

例2 已知：线段a、b、c的长度分别为1，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$和$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。求证：b是a、c的比例中项。

分析： 要证b是a、c的比例中项，即证$b^2 = ac$。

证明： $\because$ $a=1$，$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$c=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，

$$\therefore \quad b^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} = ac.$$

即 b是a、c的比例中项。

（3） 黄金分割点的作法

如图6—2，所谓黄金分割就是指把一条线段分成两条线段，使其中较长的线段（AC）是原线段（AB）与较短的线段（BC）的比例中项，即$AC^2 = AB \cdot BC$，点C叫做线段AB的黄金分割点。由此可得

图 6—2

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB\approx 0.618AB.$$

把一条线段黄金分割和作该线段的黄金分割点是同一个问题。下面介绍作黄金分割点的思路与方法。

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}}{2}AB-\frac{1}{2}AB$$

$$=\sqrt{\frac{(4+1)AB^2}{4}}-\frac{AB}{2}$$

$$=\sqrt{AB^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}-\frac{AB}{2}$$

即 $AC=\sqrt{AB^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}-\frac{AB}{2}$.

由这个式子可知，AC等于以AB、$\frac{1}{2}AB$为直角边的直角三角形的斜边与$\frac{1}{2}AB$的差。从而，得到黄金分割法的一种作法（见平面几何课本第二册P_9）

3. 平行线分线段成比例定理

平行线分线段成比例定理在本章的理论上占有重要的地位，它既是一个重点，又是一个难点。课本中对平行线分线段成比例定理并没有进行严格的证明，只是给出了一个描述性的"证明"，这个"证明"要以平行线等分线段定理为基础。下面，我们对这个定理给出一个既严谨又简捷的证法。

已知： $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$（如图6—3）。