

高等数学

(第二版)

主编 王仲英



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学

Gaodeng Shuxue

(第二版)

主 编 王仲英
副主编 邱雨生 夏云青
汪俭彬 李玉凯



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是根据教育部新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合作者多年教学经验，对第一版进行修订而成的。

本书的主要内容有函数、极限与连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，线性代数，向量与空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数，积分变换，概率论与数理统计初步，数学软件包 MATLAB。书后附有初等数学常用公式，常用函数的拉普拉斯变换表，标准正态分布数值表， χ^2 分布表， t 分布表， F 分布表，练习题、习题及自测题参考答案与提示。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校以及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校理工类专业的高等数学教材，也可作为相关技术人员和其他大专类学生的学习参考书和教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 王仲英主编. --2 版. --北京: 高等教育出版社, 2012. 6

ISBN 978 - 7 - 04 - 034831 - 6

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学 - 高等职业教育 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 088693 号

策划编辑 崔梅萍 责任编辑 崔梅萍 封面设计 王 隼 版式设计 余 杨
责任校对 杨凤玲 责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京市密东印刷有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 22.5
字 数 540 千字
购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landrraco.com>
<http://www.landrraco.com.cn>
版 次 2009 年 7 月第 1 版
2012 年 6 月第 2 版
印 次 2012 年 6 月第 1 次印刷
定 价 35.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究
物 料 号 34831 - 00

第二版前言

为了贯彻落实教育部《关于推进中等和高等职业教育协调发展的指导意见》(教职成[2011]9号)、《关于推进高等职业教育改革创新引领职业教育科学发展的若干意见》(教职成[2011]12号)和《关于全面提高高等教育质量的若干意见》(教高[2012]4号)文件精神,遵循“以必需、够用为度”的原则,真正落实高素质高端技能型人才的培养目标,结合高等职业教育数学教学的特点和专业技能课程对数学的要求,吸收第一版教学使用的反馈意见并根据目前高等职业教育的现状,我们组织修订了这本教材。

第二版在继承第一版教材编写风格的基础上作了如下的一些修改:

1. 适当增删、替换了部分例题、练习题和习题;
2. 订正了几处错误或不当之处;
3. 增加了每章测试题;
4. 书名改为《高等数学》。

参加第二版修订工作的有王仲英、汪俭彬、郝祥晖和燕春霞等。

编 者

2012年4月

第一版前言

应用数学课程是高等职业教育、高等专科学校教育、成人高等教育中理工类专业的一门必修的重要基础课和工具课。它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了贯彻落实教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高[2006]16号)文件精神,适应高等职业教育以服务为宗旨,以就业为导向,深化校企合作、工学结合和顶岗实习的需要,根据示范性高职院校建设和基于工作过程导向的课程改革的需求,真正落实高素质技能型专门人才的培养目标,结合高等职业教育数学教学的特点和专业技能课程对数学的要求,我们组织编写了这本教材。

本教材遵循高职高专教育的教学规律,本着重能力、重素质、求创新的总体思路,强化概念,淡化计算,注重应用,充分体现了“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,编写过程体现了严谨性与职业教育目标相结合的特点,侧重了对学生数学思维能力的培养,注意其中问题的提出、引入,具有结构严谨、逻辑清晰、叙述得当、题量适中、便于自学等特点,全书通俗易懂,具有科普特色。

本教材在尽量保持数学的系统性、逻辑性与科学性的同时,适度淡化理论,强调直观,减少论证。对难度较大的部分基础理论和结论,考虑到教学目标和学生学习特点,一般不做论证和推导,只叙述定理,仅做简单说明,尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值,由此加深对基本理论和概念的理解;对与专业联系较多的基本知识、基本理论和基本运算技能给予了重点加强;注重基本运算技能的训练,但不过分追求复杂的计算和变换的技巧,复杂的运算注意使用数学软件;注重贯彻循序渐进原则和启发式教学原则。

本教材内容结合专业,为突出培养专业人才的能力,服务专业课教学,体现数学的工具性,无论从概念、定理等的引入角度,还是在概念、定理的应用方面都编入了大量贴近生活和具有理工类专业背景的引例、案例和习题,强化数学的应用性,特别适合高职高专理工类各专业使用。

本书的主要内容有函数、极限与连续,导数与微分,导数应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,线性代数,向量与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数,积分变换,概率论与数理统计初步,数学软件包 MATLAB。书后附有初等数学常用公式,常用函数的拉普拉斯变换表,标准正态分布数值表,练习题、习题参考答案及提示供读者参考。

本教材是应用数学教学资源整体建设工作的一部分,除《应用数学》主教材外还配套有电子教案、自测题、试题库、教学重点难点分析、应用案例库等。

根据目前学时普遍减少的情况,同时为了保证教材的适用性,在教材内容安排方面,理工类不同专业在完成一元函数微积分必修内容的基础上,可根据专业特色和学时的不同而选学,特别适合“6+0”、“4+4”或“4+2”的教学,即应用数学开设一学期,周6学时;应用数学开设两学期,第一学期周4学时,第二学期周4或周2学时。

本书由王仲英任主编,邱雨生、夏云青、汪俭彬、李玉凯任副主编,其中前言、绪论由王仲英编写,第一章由邱雨生编写,第二章由余建熙编写,第三、九章由汪俭彬编写,第四章及附录由燕春霞编写,第五章由郝艳莉编写,第六、十一章由夏云青编写,第八章由黄静编写,第十章由李玉凯编写,第十二章由王斌编写,第七、十三章由郝祥晖编写。全书框架结构安排、统稿和定稿由王仲英承担。参加编写工作的还有高育晓、付艳茹等。

本书由贾积身教授担任主审,他对本书的框架和内容编写提出了非常好的建议,在此表示感谢。本书在编写过程中,自始至终得到了王冰和邓雁城两位编辑的大力支持和帮助,他们为本书的出版付出了辛勤的劳动,并提出诸多好的建议,在此一并致以诚挚的谢意。

限于编者的水平,书中一定存在缺点和不足之处,敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编 者

2009年5月

目 录

绪论	(1)	一、两个实例	(32)
一、为什么要学习应用 数学	(1)	二、导数和高阶导数的 概念	(33)
二、应用数学学习的主要 内容	(1)	三、导数的几何意义	(36)
三、如何学好应用数学	(2)	四、可导与连续	(36)
第一章 函数、极限与连续	(3)	练习题 2.1	(37)
第一节 函数的概念	(3)	第二节 导数的运算法则	(37)
一、函数的概念	(3)	一、函数和、差、积、商的求导 法则	(37)
二、函数的几种特性	(7)	二、复合函数的求导法则	(38)
练习题 1.1	(8)	三、隐函数的求导法则	(39)
第二节 极限的概念	(8)	四、参数式函数的求导 法则	(41)
一、函数的极限	(8)	练习题 2.2	(42)
二、无穷小与无穷大	(12)	第三节 函数的微分	(42)
练习题 1.2	(13)	一、微分的概念	(42)
第三节 极限的运算	(13)	二、微分法则	(43)
一、极限的四则运算法则	(14)	三、微分在近似计算中的 应用	(44)
二、复合函数的极限法则	(15)	练习题 2.3	(45)
三、两个重要的极限	(17)	习题二	(45)
四、无穷小比较	(19)	自测题二	(46)
练习题 1.3	(20)	第三章 导数应用	(49)
第四节 函数的连续性	(21)	第一节 函数的单调性及极值	(49)
一、函数连续的概念	(21)	一、函数的单调性	(49)
二、函数的间断点	(25)	二、函数的极值	(51)
三、闭区间上连续函数的 性质	(26)	练习题 3.1	(54)
练习题 1.4	(27)	第二节 函数的最值及应用	(54)
习题一	(27)	一、闭区间上连续函数的 最值	(54)
自测题一	(28)	二、实际问题的最值	(55)
第二章 导数与微分	(32)		
第一节 导数的概念	(32)		

练习题 3.2	(57)	练习题 5.1	(95)
第三节 曲线的凹向与拐点	(57)	第二节 微积分基本公式	(95)
一、曲线的凹向	(58)	一、变上限定积分函数及其	
二、曲线的拐点	(59)	导数	(96)
练习题 3.3	(60)	二、牛顿 - 莱布尼茨公式 ...	(97)
第四节 洛必达法则	(60)	练习题 5.2	(98)
一、洛必达法则	(60)	第三节 定积分的换元积分法和	
二、求未定型 $\frac{0}{0}$ 的极限	(61)	分部积分法	(99)
三、求未定型 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限	(62)	一、定积分的换元积分法 ...	(99)
练习题 3.4	(63)	二、定积分的分部积分法 ...	(101)
习题三	(63)	练习题 5.3	(102)
自测题三	(64)	第四节 无穷区间上的反常	
第四章 不定积分	(68)	积分	(102)
第一节 不定积分的概念及		练习题 5.4	(104)
性质	(68)	第五节 定积分的应用	(104)
一、原函数	(68)	一、微元法	(104)
二、不定积分的概念	(69)	二、用定积分求平面图形的	
三、不定积分的性质	(70)	面积	(105)
四、直接积分法	(71)	三、用定积分求旋转体的	
练习题 4.1	(74)	体积	(107)
第二节 不定积分的换元积		练习题 5.5	(109)
分法	(74)	习题五	(109)
一、第一换元积分法	(74)	自测题五	(110)
二、第二换元积分法	(77)	第六章 常微分方程	(113)
练习题 4.2	(80)	第一节 常微分方程的基本	
第三节 不定积分的分部积		概念	(113)
分法	(81)	练习题 6.1	(116)
练习题 4.3	(84)	第二节 变量可分离的微分	
习题四	(84)	方程	(116)
自测题四	(86)	练习题 6.2	(120)
第五章 定积分及其应用	(89)	第三节 一阶线性微分方程	(120)
第一节 定积分的概念	(89)	一、一阶线性微分方程的	
一、两个实例	(89)	定义	(120)
二、定积分的概念	(91)	二、一阶线性微分方程的	
三、定积分的几何意义	(92)	求解方法	(121)
四、定积分的性质	(93)	练习题 6.3	(124)
		第四节 二阶常系数线性齐次	
		微分方程	(125)
		一、二阶常系数线性齐次微	

分方程的定义	(125)	一、平面的点法式方程	(171)
二、二阶常系数线性齐次微		二、平面的一般式方程	(172)
分方程解的性质	(125)	三、两平面间的关系	(174)
三、二阶常系数线性齐次微		练习题 8.3	(175)
分方程的解法	(127)	第四节 空间直线方程	(175)
练习题 6.4	(130)	一、空间直线的点向式	
习题六	(130)	方程	(175)
自测题六	(130)	二、空间直线的一般方程 ...	(176)
第七章 线性代数	(133)	三、直线与平面、直线与直	
第一节 矩阵的概念及运算	(133)	线间的平行与垂直	(177)
一、矩阵的概念	(134)	练习题 8.4	(178)
二、矩阵的运算	(135)	第五节 空间曲面与曲线的	
练习题 7.1	(141)	方程	(179)
第二节 初等行变换	(142)	一、空间曲面的概念	(179)
一、初等行变换	(142)	二、球面的方程	(179)
二、矩阵的秩	(143)	三、柱面的方程	(180)
三、逆矩阵	(145)	四、以坐标轴为旋转轴的	
练习题 7.2	(147)	旋转面的方程	(181)
第三节 线性方程组的解法	(148)	五、常见的二次曲面	(182)
一、线性方程组	(148)	六、空间曲线的方程	(183)
二、高斯消元法解线性		练习题 8.5	(184)
方程组	(150)	习题八	(185)
练习题 7.3	(155)	自测题八	(186)
习题七	(156)	第九章 多元函数微积分	(189)
自测题七	(158)	第一节 多元函数及其极限	(189)
第八章 向量与空间解析几何	(161)	一、平面区域	(189)
第一节 直角坐标系与向量的		二、多元函数的概念	(189)
概念	(161)	三、二元函数的极限	(191)
一、空间直角坐标系	(161)	练习题 9.1	(191)
二、向量的概念	(163)	第二节 偏导数	(192)
三、向量的坐标表示法	(165)	一、二元函数的偏导数	(192)
练习题 8.1	(166)	二、高阶偏导数	(194)
第二节 向量的数量积与		练习题 9.2	(194)
向量积	(167)	第三节 全微分	(195)
一、向量的数量积	(167)	一、全微分的定义	(195)
二、向量的向量积	(168)	二、全微分的计算	(196)
练习题 8.2	(171)	三、全微分在近似计算中的	
第三节 平面方程	(171)	应用	(197)
		练习题 9.3	(198)

第四节 复合函数的求导法则	(198)	二、以 $2l$ 为周期的函数的	
一、复合函数的求导法则	(198)	傅里叶级数	(233)
二、隐函数的微分法	(200)	练习题 10.4	(236)
练习题 9.4	(201)	习题十	(237)
第五节 二重积分的概念与		自测题十	(238)
性质	(201)	第十一章 积分变换	(240)
一、二重积分的概念	(201)	第一节 傅氏变换	(240)
二、二重积分的性质	(203)	一、傅氏变换的定义	(240)
练习题 9.5	(203)	二、傅氏变换的性质	(241)
第六节 二重积分的计算	(203)	练习题 11.1	(243)
一、直角坐标系下计算二重		第二节 拉氏变换及逆变换	(243)
积分	(203)	一、拉氏变换	(243)
二、极坐标系下计算二重		二、拉氏逆变换	(246)
积分	(206)	练习题 11.2	(247)
练习题 9.6	(208)	第三节 拉氏变换的应用	(247)
习题九	(208)	练习题 11.3	(249)
自测题九	(210)	习题十一	(249)
第十章 无穷级数	(212)	自测题十一	(250)
第一节 数项级数的概念与		第十二章 概率论与数理统计	
性质	(212)	初步	(253)
一、数项级数的概念	(212)	第一节 随机事件与概率	(253)
二、数项级数的性质	(215)	一、随机试验与随机事件	(253)
练习题 10.1	(216)	二、随机事件的概率	(255)
第二节 数项级数及其敛散性	(217)	三、概率的运算法则	(257)
一、正项级数及其审敛法	(217)	练习题 12.1	(259)
二、交错级数及其审敛法	(219)	第二节 随机变量及数字特征	(259)
练习题 10.2	(221)	一、随机变量的概念	(260)
第三节 幂级数	(222)	二、离散型随机变量的	
一、幂级数的概念	(222)	概率分布	(260)
二、幂级数的收敛域	(222)	三、连续型随机变量及其	
三、幂级数的性质	(224)	概率密度	(263)
四、将函数展开成幂级数	(225)	四、随机变量的数字特征	(267)
练习题 10.3	(229)	练习题 12.2	(270)
第四节 傅里叶级数	(229)	第三节 抽样及抽样分布	(271)
一、以 2π 为周期的函数的		一、抽样与随机样本	(271)
傅里叶级数	(229)	二、常用统计量及其	

概率分布	(272)	练习题 13.4	(298)
练习题 12.3	(275)	第五节 用 MATLAB 做线性	
第四节 常用统计方法	(276)	代数	(299)
一、参数估计	(276)	一、矩阵的运算	(299)
二、假设检验	(280)	二、解线性方程组	(300)
三、正态总体的假设检验 ..	(282)	练习题 13.5	(300)
练习题 12.4	(284)	第六节 用 MATLAB 做多元函	
习题十二	(284)	数微积分运算	(301)
自测题十二	(285)	一、向量的运算	(301)
第十三章 数学软件包 MATLAB ..	(289)	二、作三维图形	(301)
第一节 MATLAB 简介	(289)	三、求二元函数的极限	(302)
一、命令与窗口环境	(289)	四、求偏导数与全微分	(303)
二、MATLAB 初步	(290)	五、求二重积分	(303)
练习题 13.1	(291)	练习题 13.6	(304)
第二节 用 MATLAB 做初等		第七节 用 MATLAB 做级数	
数学	(291)	运算	(304)
一、算术运算	(291)	一、求级数的和	(304)
二、代数运算	(291)	二、幂级数展开	(304)
三、函数运算	(292)	练习题 13.7	(305)
四、解代数方程	(292)	习题十三	(305)
练习题 13.2	(293)	附录	(306)
第三节 用 MATLAB 做一元函		A. 初等数学常用公式	(306)
数微分运算	(293)	B. 常用函数的拉普拉斯变换表 ..	(310)
一、求函数极限	(293)	C. 标准正态分布数值表	(311)
二、求函数导数	(294)	D. χ^2 分布表	(312)
三、求函数的极值及最值 ..	(295)	E. t 分布表	(314)
四、绘制函数的图形	(295)	F. F 分布表	(315)
练习题 13.3	(296)	练习题、习题及自测题参考答案与	
第四节 用 MATLAB 做一元函		提示	(317)
数积分运算	(296)	参考文献	(343)
一、求不定积分	(296)		
二、求定积分	(297)		
三、求反常积分	(297)		
四、求常微分方程的解	(298)		

绪 论

高等数学是高等学校特别是高等职业学校理工类专业学生必修的一门重要基础课程,也是人们描述自然现象、社会现象的变化规律的重要手段和有力工具。

一、为什么要学习应用数学

随着科学技术的发展,人们越来越深刻地认识到:没有数学,就像鸟儿没有翅膀,不能在科学的蓝天自由翱翔;就像盲人没有拐杖,在科学的迷宫举步维艰.没有它,就难于创造出当代的科学成就.科学技术发展越快越高,对数学的需求就越多。

如今,伴随着计算机技术的迅速发展、自然科学各学科数学化的趋势、社会科学各部门量化的要求,使许多学科都在直接或间接地,或先或后地经历了一场数学化的进程(在基础科学和工程建设研究方面,在管理机能和军事指挥方面,在经济计划方面,甚至在人类思维方面,我们都可以看到强大的数学化进程)。

联合国教科文组织在一份调查报告中强调指出:“目前科学研究工作的特点之一是各门学科的数学化。”

凡讲求高精度、高速度、高效率、高自动、高安全、高质量的东西,只有通过数学模型来设计,用数学方法借助计算机的计算、控制,才能得以实现这些高性能.正如马克思所说:“一门科学只有当它达到了能够成功应用数学时,才算真正发展了。”

学好高等数学是学好专业课的必要条件,同时又是培养理性思维的工具,解决专业问题的工具,学好它就为将来专业课的学习打好了坚实的基础。

数学是一种语言,一切科学的共同语言;数学是一把钥匙,一把打开科学大门的钥匙;数学是一种工具,一种思维的工具;数学是一门艺术,一门理性的艺术。

二、应用数学学习的主要内容

高等数学作为理工类专业的一门重要基础理论课程,其主要内容有哪些?课程要求是什么?

我们要学习的“高等数学”这门课程包括函数、极限与连续,一元函数微积分及应用,多元函数微积分,常微分方程,线性代数,向量与空间解析几何,无穷级数,积分变换,概率论与数理统计基础,数学软件包 MATLAB 等内容.对于一个学习理工类专业的大学生来说,通过这些内容的学习要掌握应用数学的理论和方法,为后续课程(如数据结构、电工学、电子技术基础和信号与系统等)的学习准备必要的数学工具和奠定良好的基础;进一步培养自己逻辑思维的能力和应用数学解决专业问题的能力。

总之,一方面在知识和能力方面打下一个坚实的基础;另一方面,我认为对同学们来说,更具战略意义而又容易忽视的是培养从事科学研究的基本素质和数学修养,这包括:树立勇攀科学高峰的目标和雄心壮志,培养热爱科学和献身科学的精神,在学习上有知难而进的顽强毅力,思想

活跃,学风踏实,态度谦逊,团结合作等等.

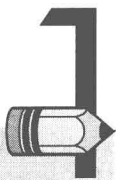
三、如何学好应用数学

一位青年科学工作者问世界杰出的物理学家爱因斯坦创立相对论的秘密,爱因斯坦的回答是: $W = X + Y + Z$, W 表示成功, X 表示艰苦劳动, Y 表示正确方法, Z 表示少说空话. 这也是我们学好应用数学的秘诀. 应用数学由于高度抽象, 应用广泛, 一些基本概念如极限、连续、导数、微分和积分不易理解, 教学内容多, 学时少, 进度快, 难度大, 不付出艰辛的劳动, 不勤奋的学习是学不好的. 我们要不断改进学习方法, 迅速完成从中学向大学的转变. 凡是学得好的同学, 他们除了勤奋学习外, 还有一套好的适合自己的学习方法.

因此, 要学好应用数学就要求同学们应尽快适应高校的学习方法, 这就是: 制订计划—课前预习—专心听讲—做好笔记—课后复习—独立作业—解决疑难—系统小结.

也可借鉴国外流行的五步学习法——SQ3R 法, 这是英文 Survey (浏览), Question (发问), Read (阅读), Recite (复述), Revise (复习) 五个词首字母的缩写.

除了要重视上述学习环节之外, 还有一点应该大力提倡, 那就是互助合作、共同研讨、共同提高. 团队精神对于学好应用数学同样重要.



第一章 函数、极限与连续

函数是数学的基本概念,也是高等数学的主要研究对象.极限是贯穿高等数学的一个重要概念,是微积分的理论基础,在高等数学中占有很重要的地位.连续是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识,为微积分的学习奠定必要的基础.

第一节 函数的概念

微积分是从研究函数开始的.本节将在中学数学知识的基础上,进一步学习函数的概念、反函数、复合函数及初等函数的主要性质,为微积分的学习打下基础.

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个非空数集,如果对于 D 中的每一个 x ,按照某种对应关系 f ,都有唯一确定的 y 值和它对应, y 就叫做定义在 D 上的 x 的函数,记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量,自变量的取值范围 D 叫做函数的定义域,当 x 取遍 D 中所有值时,所得函数值的集合 M 叫做函数的值域.

例如,一次函数 $y=2x-1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,因为对于 $x \in \mathbf{R}$ 的每一个值,按照“2 乘 x 减 1”的对应关系, y 都有唯一确定的值和 x 对应,所以 $y=2x-1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的 x 的一个函数.

如果同时研究两个及其以上的函数,要用不同的符号表示不同的函数.除 $f(x)$ 外,还常用 $g(x), F(x), G(x)$ 等.

由函数的定义知道,一个函数是否确定,就在于它的定义域和对应关系是否确定.如果两个函数是相同的,那么它们的定义域和对应关系也必须是相同的,否则,就不是同一个函数.因此,称函数的定义域和对应关系为函数的两要素.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.若不考虑函数的实际意义,只研究用解析式表达的函数,则函数的定义域是使解析式有意义的一切实数.

通常求函数的定义域应注意以下几点:

- (1) 分式函数的分母不能为零;
- (2) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零;

(3) 对数函数的真数必须大于零;

(4) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1, 1]$;

(5) 如果函数表达式中同时含有上述几种函数, 则应取各部分定义域的交集. 通常用不等式、区间或集合形式表示定义域.

下面我们再介绍一个应用数学中常用的概念——邻域.

设 δ 是任一正数, 表示实数集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 其中 x_0 点称为邻域中心, δ 称为邻域半径. 去掉中心的开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的去心邻域, 它表示实数集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$.

案例 1.1 在机械中常用一种曲柄连杆机构(图 1.1). 主动轮转动时, 连杆带动滑块 B 作往复直线运动. 设主动轮半径为 r , 转动角速度为 ω , 连杆长度为 l , 求滑块 B 的运动规律.

解 设在运动开始后, 经过时间 t (s) 时, 滑块 B 离 O 点的距离为 s , 求滑块 B 的运动规律就是建立 s 和 t 的函数关系式.

假设主动轮开始旋转时 A 点恰在 OB 连线上, 经过时间 t 后主动轮转了角 α (弧度), 那么

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega t, \\ OC &= r \cos \alpha = r \cos \omega t, \\ CA &= r \sin \alpha = r \sin \omega t, \\ CB &= \sqrt{AB^2 - CA^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}s &= OC + CB \\ &= r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}, \quad t \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

这就是滑块 B 的运动规律.

案例 1.2 已知一个三角脉冲电压, 其波形如图 1.2 所示. 求电压 u 与时间 t 的函数关系式.

解 由图 1.2 可知, u 随 t 变化的规律在各段时间区间内是各不相同的, 所以要分段进行考虑:

当 $t < 0$ 时, 函数的图形是横轴的一部分, 因此

$$u = 0.$$

当 $0 \leq t < \frac{s}{2}$ 时, 函数的图形是连接原点 $(0, 0)$ 与点

$(\frac{s}{2}, E)$ 的直线段, 于是

$$u = \frac{2E}{s}t.$$

当 $\frac{s}{2} \leq t < s$ 时, 函数的图形是连接点 $(\frac{s}{2}, E)$ 与点 $(s, 0)$ 的直线段, 故

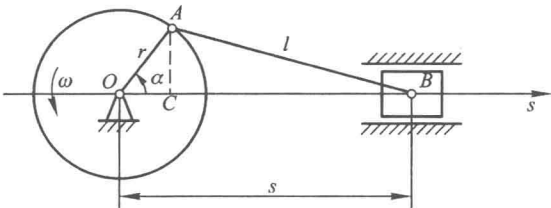


图 1.1

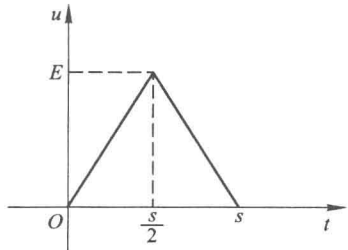


图 1.2

$$u - 0 = \frac{E - 0}{\frac{s}{2} - s}(t - s),$$

即

$$u = -\frac{2E}{s}(t - s).$$

当 $t \geq s$ 时, 函数的图形是横轴的一部分, 因此

$$u = 0.$$

归纳上述讨论可知, u 与 t 的函数关系式可写成分段的形式:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{2E}{s}t, & 0 \leq t < \frac{s}{2}, \\ -\frac{2E}{s}(t - s), & \frac{s}{2} \leq t < s, \\ 0, & t \geq s. \end{cases}$$

形如这样的对应关系在不同的范围内由不同的式子表示的函数通常叫分段函数.

例 1.1 设 $f(x) = 2x^2 - x - 1$, 求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(a)$, $f(2t - 1)$.

解 $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - (-1) - 1 = 2$; $f(0) = 2 \times 0^2 - 0 - 1 = -1$;

$$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 1 = 3 - \sqrt{2}; f(a) = 2a^2 - a - 1;$$

$$f(2t - 1) = 2(2t - 1)^2 - (2t - 1) - 1 = 8t^2 - 10t + 2.$$

例 1.2 判断下列各组函数是否相同:

$$(1) y = x \text{ 与 } y = \sqrt{x^2}; \quad (2) y = |x| \text{ 与 } y = \sqrt{x^2}.$$

解 (1) 函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域相同, 都是 $\mathbf{R}$, 而函数 $y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ 与

函数 $y = x$ 对应关系不同, 所以这两个函数不相同.

(2) 因为 $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 而且 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$, 这两个函数的对应关系和定义域都是相同的, 所以这两个函数相同.

例 1.3 求下列函数的定义域:

$$(1) y = x^2 - 2x + 3; \quad (2) y = \sqrt{x + 3} - \frac{1}{x^2 - 1}.$$

解 (1) 函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 为多项式函数, 当 x 取任何实数时, y 都有唯一确定的值与之对应, 故所求函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 若使 $\sqrt{x + 3}$ 有意义, 需 $x + 3 \geq 0$, 即 $x \geq -3$; 若使 $\frac{1}{x^2 - 1}$ 有意义, 需 $x^2 - 1 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$,

所以函数的定义域为 $\{x | x \geq -3\} \cap \{x | x \neq \pm 1\}$.

例 1.4 设函数 $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 0, \\ 2x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 $f(1)$.

解 $f(-2) = -2(-2) - 1 = 3$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$.

2. 反函数

定义 1.2 设给定的 y 是 x 的函数 $y=f(x)$, 如果把 y 看作自变量, x 看作 y 的函数, 则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

通常总是用 x 表示自变量, 用 y 表示函数, 所以, 往往把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$, 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作

$$y=f^{-1}(x).$$

例如, 函数 $y=2x-1$, 由解析式解出 $x=\frac{1}{2}(y+1)$. 这里 $x=\frac{1}{2}(y+1)$ 是 $y=2x-1$ 的反函数, 但是习惯把 $x=\frac{1}{2}(y+1)$ 改写成 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 的形式.

把函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个平面直角坐标系上, 那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.5 求函数 $y=-x^2+1, x \in (0, +\infty)$ 的反函数.

解 由 $y=-x^2+1, x \in (0, +\infty)$ 得 $x=\sqrt{1-y}, y \in (-\infty, 1)$, 所以函数 $y=-x^2+1$ 的反函数是 $y=\sqrt{1-x}, x \in (-\infty, 1)$.

3. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为基本初等函数, 它们的定义、性质、图像不再赘述.

4. 复合函数

引例 1.1 设 $y=\sqrt{u}, u=1+x^2$, 以 $1+x^2$ 代替 $\sqrt{u}$ 中的 u , 得 $y=\sqrt{1+x^2}$, 我们称它为由 $y=\sqrt{u}, u=1+x^2$ 复合而成的函数.

定义 1.3 设 $y=f(u), u=\varphi(x)$, 且函数 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内, 那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数, 我们把 y 叫做 x 的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫做中间变量.

例 1.6 试求由函数 $y=u^3, u=\tan x$ 复合而成的函数.

解 将 $u=\tan x$ 代入 $y=u^3$ 中, 即得所求复合函数 $y=\tan^3 x$.

有时, 一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如, 由函数 $y=2^u, u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 可以复合成函数 $y=2^{\sin(x^2+1)}$, 其中 u 和 v 都是中间变量.

例 1.7 指出下列复合函数的结构:

$$(1) y=\cos^2 x; \quad (2) y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}.$$

解 (1) $y=\cos^2 x$ 由 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成.

(2) $y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ 由 $y=\sqrt{u}, u=\cot v$ 和 $v=\frac{x}{2}$ 复合而成.

5. 初等函数

定义 1.4 由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成的, 并且可