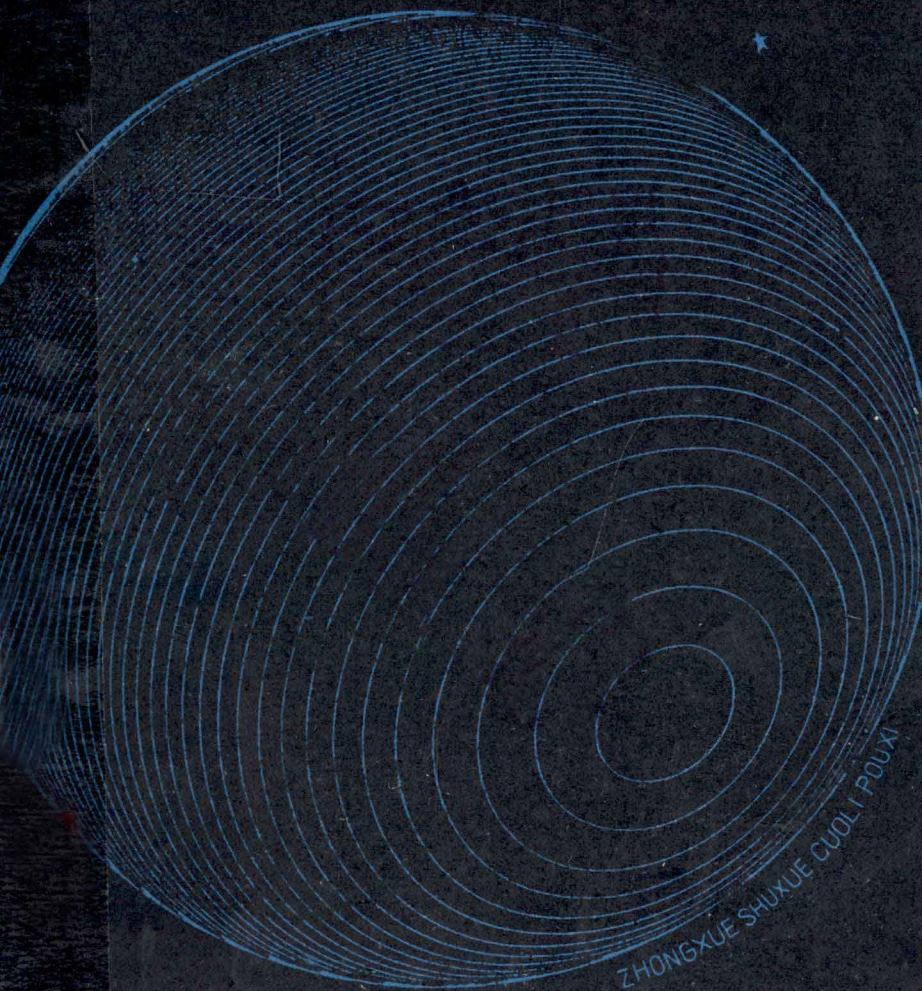


中学数学错例剖析



ZHONGXUE SHUXUE CUOLI POUXI

中学数学错例剖析

朱健生 刘根洪

江苏教育出版社

中学数学错例剖析

朱健生 刘根洪

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行 南京人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张7.25 字数147,000

1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

印数1—28300册

统一书号: 7351·474 定价: 1.10元

责任编辑 何震邦

编 者 的 话

“1是最大的自然数”，“大圆和小圆的半径相等”，“蚊子和大象一样重”，这些结论多么荒谬！但是这些荒谬的结论却得到了似乎是天衣无缝的“证明”。你能找出这些“证明”中的错误吗？

两个五分的硬币，固定其中一个，让另一个沿着第一个的边缘转动，直到硬币上两个原来接触的点再次接触时，第二个硬币转动了几圈？这是一个多么简单、有趣而耐人寻味的问题！

往往在一次考试过后，听到一些同学懊悔莫及地说：“真粗心！又错了！”。果真全是因为粗心才错的吗？

学会正确的判断，严密而合乎逻辑的推理分析以及善于总结正反两个方面的经验，这是学好数学的一个很重要的环节。

为此，我们收集了初、高中各年级学生在学习数学过程中，易犯的各种类型的错误，编写成84道似是而非、真假难辨的习题。然后，对每一道习题详加剖析，让你看到原解法中哪些地方有毛病？病根在哪里？诡辩题中耍了什么花招？或者，是不是题目本身有懈可击？正确的解答是什么？阅读本书的过程，就是思考和探索的过程；每读完一题，就像是侦察员侦破了一个小小的疑案，如果你能及时小结，就会觉得不但有趣，而且能对学习带来帮助。

本书在注意到趣味性的同时，还尽可能注意到思维的规

律性，推理的逻辑性，以及概念和图形的准确性，并尽量用通俗的语言加以表达。但终因水平所限，恐怕还是难以满足广大读者的要求。

本书所收集的虽然是中学生在解题中常见的一些错误问题，但其中的部分错误即使对于高等师范院校高年级的学生来说也不是显而易见的。因此，本书既是广大中学生学习数学的辅助读物，也可以作为高等师范院校学生的课外参考书，中学数学教师也可选择合适的内容用于课堂教学的反例和开展第二课堂素材。

在本书编写过程中，曾得到许多同志的帮助，特别是常州市第五中学的陈淦老师，他详细地阅读了本书的初稿，并提出了许多宝贵的意见和建议。苏州大学的徐志鹏和张筑生两位老师为本书精心绘制了插图。在此，谨向帮助过我们的同志和老师们表示衷心的感谢。

朱健生 刘根洪

一九八七年四月

目 录

一、约分、开方和比例

问题 1	蚊子和大象同重.....	1
问题 2	谁是谁非.....	4
问题 3	我和太阳公公同年龄.....	6
问题 4	$8 = -2$	8
问题 5	梯形上下底边之和等于零.....	9
问题 6	线段的部分长等于其全长.....	11
问题 7	求等比数列公比的简便方法.....	13
问题 8	$2 = -1$	15
问题 9	$-1 > 1$	19

二、指数与对数

问题10	$39 > 40$	20
问题11	$\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$	21
问题12	在实数集内, 负数也有对数.....	22
问题13	一个新发现的对数公式.....	23

三、反证法

问题14	1 是最大的正整数.....	25
问题15	a 究竟取什么值.....	26
问题16	在定圆的一切内接多边形中, 面积最	

大的内接多边形的边数必为奇数.....28

四、极值与最优化

问题17 无法达到的最大值.....30

问题18 明知有最大值,就是无法求出来.....33

问题19 $\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$35

问题20 听听你的评论.....38

问题21 看看相等,实际不等.....40

问题22 $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ (a 、 b 是不相等
的正数).....43

问题23 椭圆=圆.....45

问题24 $\sqrt{x^2-2x-1}$ 的最小值是 $\sqrt{2}$ ($x \in R$).....47

问题25 选择最佳抽水站址.....48

问题26 请你设计一条公路.....53

五、几何证明与作图

问题27 平面上两相异点间的距离为零.....56

问题28 由直线上一点可引所在直线的两条
垂线.....59

问题29 一组对边及一组对角相等的四边形
是平行四边形.....61

问题30 矩形就是正方形.....63

问题31 两边和其中一边上的高对应相等的
两个三角形是全等三角形.....67

问题32	两条边和其中一条边所对的角对应 相等的两个三角形是全等三角形.....	68
问题33	角的一部分等于它的全部.....	71
问题34	一切三角形皆是等腰三角形.....	73
问题35	直角等于钝角.....	77
问题36	真的是 40° 吗?	80
问题37	轨迹中的学问.....	84
问题38	劝君切莫“想当然”!	91

六、数学归纳法

问题39	费马定理.....	96
问题40	凡自然数必相等.....	98
问题41	凡是人, 年龄必相同	104

七、复数

问题42	$2 = -2$	106
问题43	$i = 0$	108
问题44	$-i = 1$	109
问题45	费尽心机, 一无所获	110
问题46	一切正整数都等于零	113
问题47	$i^2 = 1$	115
问题48	$2\pi = 0$	116

八、无穷级数、极限、积分

问题49	加一加, 结果有三种, 哪种对?	118
问题50	二个奇妙的无穷级数	123
问题51	整数经过四则运算其结果可以是复	

数	127
问题52 一直线的垂线和斜线永远不会相交	134
问题53 圆周率 $\pi = 2$	135
问题54 绝妙的“剪”和“拼”	138
问题55 $\frac{1}{2} = 0$	144
问题56 $8 = -1$	148
问题57 $1 = -3$	150
问题58 三个互不相等的数既成等差数列， 又成等比数列	152
问题59 $\pi = 0$	154
问题60 $1 = 0$	159
问题61 心脏曲线 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 的周长等于 零	160
问题62 难道牛顿—莱布尼兹公式错了吗？	162

九、其他

问题63 平面上任意两条线段都等长	165
问题64 集合 $\{-1, 1\} = \{x x = 4k \pm 1, k \in Z\}$	168
问题65 $\pi = \sqrt{2}$	170
问题66 蚂蚁转圈	173
问题67 作茧自缚	176
问题68 任何正实数的十六分之一都等于零	179
问题69 奇妙的平行四边形	181
问题70 勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$ 的两种证法	183

问题71	证明圆周长 $C = 2\pi R$ 的“新法”	184
问题72	并非解题者的错误	187
问题73	负线段是否存在	191
问题74	凡圆的半径必相等	192
问题75	差之毫厘，失之千里	196
问题76	一道竞赛题的风波	199
问题77	可以用圆规直尺三等分任意角吗？	200
问题78	应当选择哪个答案	203
问题79	在 $\triangle ABC$ 中，满足条件 $\lg \operatorname{tg} A + \lg \operatorname{tg} B$ $= 2 \lg \operatorname{tg} C$ 的角 C 应在什么范围	206
问题80	$\angle B$ 的最大角是 60° 吗？	208
问题81	n 个相等的实数	209
问题82	参数 λ 之值是否存在？	212
问题83	当 $b < -m < a^2$ 时有四个交点	214
问题84	一道值得探讨的几何题	216

一、约分、开方和比例

生物的生存离不开空气和水份，在一定的条件下才能有一定的结论。忽视了这一点，就和下面一系列例题一样，造成一连串令人啼笑皆非的怪论。

【问题1】 蚊子和大象同重。

这是一个连三岁孩子也会摇头否定的结论。但是，看看下面的证明吧！也许会使你张口结舌。

证明 假设蚊子的重量为 x ，大象的重量为 y ，则它们的重量之和是一个常数，我们用记号 M 来表示这个常数，即

$$x + y = M. \quad (1)$$

将(1)式变形为

$$x = M - y, \quad (2)$$

和 $x - M = -y. \quad (3)$

将(2)，(3)两式的左端和左端，右端和右端分别相乘，则得

$$x(x - M) = (M - y)(-y). \quad (4)$$

将(4)式化简为

$$x^2 - Mx = y^2 - My. \quad (5)$$

在(5)式的两端同时加上一个常数 $\frac{M^2}{4}$ ，可得

$$x^2 - Mx + \frac{M^2}{4} = y^2 - My + \frac{M^2}{4},$$

即
$$\left(x - \frac{M}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{M}{2}\right)^2. \quad (6)$$

由(6)式两端开方，得

$$x - \frac{M}{2} = y - \frac{M}{2}. \quad (7)$$

(7)式两端再同时加一常数 $\frac{M}{2}$ ，使得

$$x = y.$$

这就是说蚊子和大象的重量相等！

【错误剖析】看了以上的证明，我们可以发现，错误的根源是由于(6)式两端开方引起的。这是因为：

(6)式两端开方的结果应该是

$$\pm \left(x - \frac{M}{2}\right) = y - \frac{M}{2}. \quad (8)$$

这样一来就不会有 $x = y$ 的笑话了。至于，由(6)式两端开方的结果为什么是(8)式而不是(7)式呢？可以作如下的解释：

事实上，蚊子的重量远小于大象的重量，从而有

$x - \frac{M}{2} < 0$, $y - \frac{M}{2} > 0$, 按算术根的定义

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{当 } a > 0 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } a = 0 \text{ 时;} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

故(6)式两端开方的结果应该是(8)式而不是(7)式。

下面再应用方程同解变形的概念对证明中的错误作较为详细地剖析。

大家知道,在方程的求解的过程中,常常需要将原方程进行适当的变形,转化为更容易求解的新方程。把一个方程用与其同解的方程去代换,这种变换叫做同解变换,所得的新方程就叫同解方程。一般方程的同解变换有如下的定理:

(1) 方程两边同时加以同一整式,那么所得新方程与原方程是同解方程;

(2) 方程两边同时乘以同一不等于零的数,那么所得的新方程与原方程是同解方程。

除此以外,方程变形后所得的新方程就有可能失去原方程的解(称失解),也可能增加原方程的解(称增解)。

现在,我们来剖析这个问题错误的原因。在整个解题过程中方程有两次是非同解变形:第一次是方程(1)变形到方程(4),是用含有未知数的式子乘以方程的两边,这样引入了增解 $x = y$;第二次方程(6)变形到方程(7)时,方程两边

平同时开方，忽视了算术根的运算，失去了原方程的解 $x = M - y$ 。这样失去了原有的解，增加了不是应有的解，而从造成了蚊子和大象同重的笑话。

通过上面问题，清楚地告诉我们，一旦方程的变形超越同解变形的范围时，就有可能隐藏着错误的根源。对于那些不超越同解变形范围就无法求解的方程（例如分式方程或无理方程等），就要求我们仔细去研究，有无增解或失解的可能性，如有增解，通过验算加以剔除，如有失解，则必须设法把失去的解补进来。

【问题 2】 谁是谁非。

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x^2 - y} = 1, & (1) \\ y = 2x - 1. & (2) \end{cases}$$

小明和小宏在解这方程组时，小明解后说，此方程组无解，小宏说，此方程组有两组解。二人争得面红耳赤，相持不下。现在请你看一看他们各自解的过程，判断一下谁是谁非吧！

小明的解法：

$$\begin{aligned} \text{用代入法先得出 } & \sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 - (2x - 1)} \\ & = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{代简为} \quad \sqrt{x^2 + 2x - 1} + (x - 1) = 1,$$

$$\text{即} \quad \sqrt{x^2 + 2x - 1} = -x + 2.$$

上式平方解得 $x = \frac{5}{6}$,

代入(2)式后得 $y = 2\left(\frac{5}{6}\right) - 1 = \frac{2}{3}$ 。

将 x 、 y 值代入(1)的左端后

$$\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3}} + \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}} = \frac{7}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \neq 1。$$

所以, 小明说此方程组无解。

再看小宏的解法:

由(1)化为 $\sqrt{x^2 + y} = 1 - \sqrt{x^2 - y}$,

平方后整理得 $2\sqrt{x^2 - y} = 1 - 2y$ 。

再平方整理得 $4x^2 = 1 + 4y^2$,

以(2)代入上式 $4x^2 = 1 + 4(2x - 1)^2$,

解得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5}{6}$,

再代入(2)得 $y_1 = 0, y_2 = \frac{2}{3}$ 。

因此, 小宏说此方程组有两组解。

【错误剖析】 根据上面他们两人的解法看来, 小明的解法既有失解, 又有增解; 小宏的解法仅有增解, 没有失解。究竟怎样才能求出正确的解呢?

由算术根定义, 化简方程必须分下面三种情况加以讨

论:

(1) 当 $x - 1 > 0$, 这时方程解法按小明所解的过程得到 $x = \frac{5}{6}$, 显然, 与 $x > 1$ 矛盾, 故方程无解;

(2) 当 $x - 1 = 0$, 这时方程(3)化为

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = 1,$$

解得 $x = -1 \pm \sqrt{3}$, 与 $x = 1$ 矛盾, 这时方程也无解;

(3) 当 $x - 1 < 0$, 这时方程(3)化为

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x - 1) = 1,$$

平方后得出 $x = \frac{1}{2}$, 与假设条件不矛盾, 经验算后可知此方

程组的解是 $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

通过上面的叙述, 读者不难判断出谁是谁非, 而且告诉我们, 以后遇到非要超出同解方程的解法, 必须认真考虑失解与增解的可能性, 全面地分析, 仔细地思考, 慎重地下结论!

【问题 3】我和太阳公公同年龄。

“小太阳”足球队刚成立的时候, 由于报名参加的同学太多, 足球队长小凡宣布年龄不满12岁的暂不参加。当人们问起小胖的年龄时, 小胖笑笑说: “我和太阳公公同年龄”。大家听了哈哈大笑, 小胖却认真地说: “谁要不相信, 我可以当场用两种方法证明给你们看, 假若你们找不出其中的错误, 那

就应该批准我参加足球队”。

我们把小胖的两种证明抄录在下面，请读者评一评小胖究竟有没有资格参加“小太阳”足球队。

证法 1 假定我的年龄是 a ，太阳公公的年龄是 b ，当然 a 和 b 是不相等的，否则，你们已经承认我和太阳公公同年龄了。这样，我们一定可以找到一个数 c ，使得

$$a = b + c \quad (1)$$

成立(例如 $a = 4$ ， $b = 3$ ，则 $c = 1$ 。又如 $a = 1$ ， $b = 6$ ，则 $c = -5$)。

由于假定 $a \neq b$ ，所以 $a - b \neq 0$ ，从而在(1)式两端同时乘以 $(a - b)$ 是不会有问题的，这样便得到

$$a(a - b) = (b + c)(a - b). \quad (2)$$

化简并将右端的 ac 项移到等式的左端，得

$$a(a - b - c) = b(a - b - c), \quad (3)$$

约去公因式 $(a - b - c)$ 后即得 $a = b$ 。

也就是说，太阳公公和我年龄相等。

证法 2 令 $a + b = 2e$. (4)

在(4)式两端同时乘以 $(a - b)$ 得

$$(a + b)(a - b) = 2e(a - b), \quad (5)$$

在(5)式的两端同时加上 $b^2 - 2ae + e^2$ ，得

$$a^2 - b^2 + b^2 - 2ae + e^2 = 2ae - 2be + b^2 - 2ae + e^2,$$

化简后得 $(a - e)^2 = (b - e)^2$. (6)