新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

初中二年级数学

主编：杨 骞

展开思想的翅膀
活跃在奥林匹克广场上
为了明天的成功
哪怕今天摸爬滚打
让我们手挽手
深挖智慧的力量
奋斗——，前进——
这里是练兵的战场

科学技术文献出版社

初中二年级

数学

◆新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

初中二年级数学

主　编　杨　骞

编　著　杨　骞　刘　莉

左道波　张毓新

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

初中二年级数学/杨骞主编 .-北京:科学技术文献出版社,1999.3
(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)
ISBN 7-5023-3236-7

Ⅰ.初… Ⅱ.杨… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第40171号

出　　版　　者:科学技术文献出版社
图 书 发 行 部:北京市复兴路15号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼B段/100038
图 书 编 务 部:北京市西苑南一院8号楼(颐和园西苑公汽站)/100091
邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953
图书编务部电话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789
图书发行部电话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009
门 市 部 电 话:(010)68515544-2172
图书发行部传真:(010)68514035
图书编务部传真:(010)62878317
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑:王亚琪　王　琦
责 任 编 辑:平　平
责 任 校 对:李正德
责 任 出 版:周永京
封 面 设 计:宋雪梅
发　　行　　者:新华书店北京发行所
印　　刷　　者:北京国马印刷厂
版(印)次:1999年3月第1版　1999年3月第1次印刷
开　　　　本:850×1168　32开
字　　　　数:373千
印　　　　张:13.875
印　　　　数:1—10000册
定　　　　价:19.50元

前 言

近些年来，世界范围内的学科奥林匹克竞赛方兴未艾。我国自参赛以来，不断取得优异成绩。1997 年，我国参加在阿根廷布宜诺斯艾利斯举办的第 37 届世界数学奥林匹克竞赛，6 名选手均获金牌，并取得了团体第一名的好成绩。学生参加各学科的奥林匹克竞赛活动，不但为国家争得了荣誉，也已成为他们丰富学习内容、增长知识、提高各门功课学习成绩的重要方式之一。

为了帮助广大中小学生完整、准确、全面地掌握各门功课的学习内容，在日常的学习和参加奥林匹克竞赛活动中取得好的成绩，同时为了配合目前中小学素质教育，我们邀请了京内外著名奥校具有多年教学与辅导经验的权威老师，编写了这套《新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书》。

参加本丛书编写工作的老师，全部来自于教学第一线，具有扎实的基础理论功底和丰富的教学实践经验。他们结合自己多年教学、科研和奥校辅导的经验，在总结各类奥林匹克竞赛教学讲义、习题解答及辅导材料的基础上，博采众家之长，形成了本丛书独具特色的风格和特点：

(1)学科门类齐全。全套丛书共 18 分册，涵盖数学、物理、化学、生物、计算机 5 个学科，跨越小学、初中、高中三个阶段，是目前此类图书中覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强的奥林匹克竞赛系列丛书之一。

(2)普及与提高并重。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强、应用性广、具有代表性的教学内容作为专题，进行重点讲解，旨在提高大多数学生的学习水平。同时又根据各学科竞赛的实际需要，选择针对性强的专题，以点带面，重点讲解。

(3)科学准确，结构合理。各分册按照学科特点进行科学编排，内容繁简适当。对于教学中的重大疑难问题，分析透彻，注重科学性和准确性。重点、难点部分举一反三，力求使学生在理解的基础上，学会灵活运用。

(4)新颖独特，趣味性强。各分册力求做到选题典型、新颖有趣，例题讲解富有启发性，注意培养学生独立思考的能力。注重从学习方法、分析思路和解题技巧上，全方位、多角度地培养学生对各种知识的综合运用能力。

为便于学生掌握各门功课的学习要领，各分册除对基础知识进行系统讲解外，还配备有一定数量的练习，并附有提示及答案，供同学们根据自己的实际情况有选择地使用。

我们真诚地希望本套丛书能对同学们参加奥林匹克竞赛和各类学科竞赛有所裨益，能有助于我国中小学生全面提高各门功课的学习成绩。书中如有错漏或不当之处，欢迎读者批评指正。

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

主要作者简介

吴文虎　中国计算机学会普及委员会主任
国际信息学奥林匹克中国队总教练
清华大学计算机系教授

吕　品　全国计算机教材审查委员会委员
北京信息学奥林匹克学校副校长
中学高级教师

刘　尧　北京教育学院化学教研室主任、教授

陆　禾　北京14中化学特级教师
北京市有突出贡献的专家

黄儒兰　北京教育局化学教研室主任
中学特级教师

冯士腾　北京宣武区教育学会秘书长
中学特级教师

李方烈　北京宣武区中学数学教研室主任
中学特级教师

赵欣如　北京师范大学生物系教授
中国生物奥林匹克竞赛委员会委员

曹保义　北京师范大学二附中副校长
生物教研组组长
中学高级教师

高建军　湖南长沙一中生物教研组组长
　　　　中学高级教师
石长地　首都师范大学研究生处教师
　　　　数学奥林匹克专业研究生毕业
　　　　教育学硕士
贺贤孝　辽宁师范大学数学系教授
　　　　辽宁数学教育学会副会长
杨　骞　辽宁师范大学数学系副教授
　　　　大连市奥林匹克学校校长
由　崚　北京市宣武区中学教研室主任
秦家达　北京市 66 中物理教研组组长
　　　　中学高级教师
高玉镶　北京师范大学附中物理高级教师
马凌风　北京市 15 中物理教研组组长
　　　　中学高级教师
王健子　北京市 15 中物理高级教师

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

根据初二数学教学内容以及《初中数学竞赛大纲》要求，结合初二学生的学习规律和心理特点，本书初二分册安排的内容主要有：因式分解；分式、根式的化简与证明；算术根、非负数；三角形、特殊四边形、相似形；几何变换；反证法、面积法等数学解题思维方法。本书在写作过程中，为达到"拓宽知识、启迪思维，开发智力，培养能力，优化素质"教学目的，特别重视数学思想方法的渗透和运用，注重问题的提出和分析，强调解题规律的揭示和讲解；并充分地考虑到科学性、系统性、全面性、实用性、可读性、超前性等特点。

本书可作为数学奥林匹克培训班教材，也可作为学有余力的初二学生的辅助资料，还可作为教师教学的参考用书。

目　录

第 1 讲　整数问题选讲

【例 1】　求一个最小的正整数，使它的$\frac{1}{2}$是平方数，$\frac{1}{3}$是立方数，$\frac{1}{5}$是五次方数．

分析与解　因为这个整数的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$是整数，所以它一定能被2、3、5 整除，再考虑这个整数的最小性要求，它应具有形式：

$$N=2^a3^b5^c,(a\neq0,b\neq0,c\neq0)$$

又因为　$\frac{1}{2}N=2^{a-1}3^b5^c$ 是平方数，则

$a-1,b,c$ 均为偶数．

因为　$\frac{1}{3}N=2^a3^{b-1}5^c$ 是立方数，则

$a,b-1,c$ 均为 3 之倍数．

因为　$\frac{1}{5}N=2^a3^b5^{b-1}$是 5 次方数，则

$a,b,c-1$ 为 5 之倍数．

进而知　a 是 3 和 5 的倍数，且为奇数，则最小为 15；

b 是 2 和 5 的倍数，且被 3 除余 1，则最小数为 10；

c 是 2 和 3 的倍数，且被 5 除余 1，则最小数为 6；

故所求数为　　$N=2^{15}\times3^{10}\times5^6$．

【例 2】　能同时表示成连续9 个整数之和、连续 10 个整数之和及连续 11 个整数之和的最小正整数是哪一个？

分析与解　设所求正整数为 A，则依题意 A 可表示为(其中 p，n，k 均为整数)：

$$A=(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+9)=9p+45 \quad ①$$

$$A=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+10)=10n+55 \quad ②$$

$$A=(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+11)=11k+66 \quad ③$$

由①、②、③可得：

$$9p = 10(n+1) \quad ④$$

$$10n = 11(k+1) \quad ⑤$$

再由④、⑤知 n 是 11 的倍数，且除以 9 余 8．故 n 最小可取 44．

所以 A 的最小值为 $10\times 44 + 55 = 495$．

☞ **【例 3】** 有一个三位数，能被 35 整除，并且各位数字之和为 15，求这个数．

☞ **分析与解** 设所求三位数为 $N=\overline{abc}$，则有

$$N = 100a + 10b + c$$

$$a + b + c = 15$$

因为 $35\mid N$，当然有 $5\mid N$，故

$c=0$ 或 $c=5$．

当 $c=0$ 时，有

$$\begin{aligned} N &= 100a + 10b = 100a + 10(15-a) \\ &= 90a + 150 \\ &= 7(12a+21) + 3(2a+1) \end{aligned}$$

由 $7\mid N$ 知 $7\mid 3(2a+1)$

从而 $7\mid 2a+1$

因为 $a+b=15$， 所以 $6\leqslant a\leqslant 9$，

故满足 $7\mid 2a+1$ 的 a 不存在．

当 $c=5$ 时，有

$$N = 7(12a+15) + 6a$$

由 $7\mid N$ 推出 $7\mid 6a$

显然当 $a=7$ 时成立．

这时 $b=3$，

故所求三位数为 735．

☞ **【例 4】** 一个两位数除以它的反序数所得的商恰好等于余数，求这个两位数．

分析与解　设这个两位数为 $N=10x+y$,则由题意可得:

$$10x+y=(10y+x)q+q \quad (\text{其中 } q \text{ 为自然数})$$

变形为
$$(10-q)x-(10q-1)y=q$$

以下就 q 的取值进行讨论:

(1) $q=1$,有　$9(x-y)=1$,不可能成立;

(2) $q=2$,有　$8x-19y=2$,

这时,y 为偶数:　$y=2$ 时,$x=5$;

$y=4,6,8$ 时,均不可能成立;

(3) $q=3$,有　$7x-29y=3$,不存在 x、y;

(4) $q=4$,有　$6x-39y=4$,这样的 x、y 也不存在;

(5) $q\geqslant5$,有　$5x\geqslant(10-q)x=(10q-1)y+9\geqslant54$,

$x\geqslant11$,即无解.

综上所述,所求两位数为 52.

【例 5】　一整数 a 若不能被 2 和 3 整除,则 a^2+47 必能被 24 整除.

分析与解　因为　$a^2+47=a^2-1+48$,所以需往证　$24\mid a^2-1$.

因为 a 不能被 2 整除,则 a 为奇数,即可表示为:

$$a=2k+1 \quad (k \text{ 为整数})$$

所以　$a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1)$　能被 8 整除.

又　$a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$为连续三整数之积,必能被 3 整除,而 a 不能被 3 整除,则 a^2-1 一定能被 3 整除.

由$(3,8)=1$,知 a^2-1 能被 $3\times8=24$ 整除.

即证.

【例 6】　若整数 a、b、c、d 和 m 使

am^3+bm^2+cm+d 能被 5 整除,且 d 不能被 5 整除,证明:总可以找到这样的整数 n,使得　dn^3+cn^2+bn+a 也能被 5 整除.

分析与证　设$A=am^3+bm^2+cm+d$

$$B=dn^3+cn^2+bn+a$$

消去 d 得:

$An^3-B=(mn-1)[a(m^2n^2+mn+1)+bmn^2+cn^2+1]$

又由题设 d 不能被 5 整除,知 m 不能被 5 整除,故 m 的取值为下列四种情形:

$m=5k+1$,此时取 $n=5t+1$,

$m=5k+2$,此时取 $n=5t+3$,

$m=5k+3$,此时取 $n=5t+2$,

$m=5k+4$,此时取 $n=5t+4$,

都能有 $5\mid mn-1$, 即有 $5\mid An^3-B$,

从而 $5\mid B$.

即对任何的 m,都可找到相应的 n,使 $5\mid B$.

☞ **【例 7】** 试求一个三位数 $\overline{abc}$,使得它的平方的末三位数字仍是 $\overline{abc}$.

☞ **分析与解** 由题意,我们作

$$\overline{abc}^2-\overline{abc}=\overline{abc}(\overline{abc}-1)$$

它应为 1000 的倍数. 而 $1000=8\times125$

因为 $(8,125)=1$、$(\overline{abc},\overline{abc}-1)=1$,所以由 $1000\mid\overline{abc}(\overline{abc}-1)$

推出 $8\mid\overline{abc},125\mid\overline{abc}-1$

或 $125\mid\overline{abc},8\mid\overline{abc}-1$

由 $125\mid\overline{abc}-1$,知 $\overline{abc}=126,251,376,501,626,751$;这里仅有 $\overline{abc}=376$,使 $8\mid\overline{abc}$;

由 $125\mid\overline{abc}$,知 $\overline{abc}=125,250,375,500,625,750$,这里仅有 $\overline{abc}=625$ 时,使 $8\mid\overline{abc}-1$.

所以满足条件的三位数有 376 和 625.

☞ **【例 8】** 如果 a 为合数,则 a 的最小质因数一定不大于 $\sqrt{a}$.

☞ **分析与证** 设 $a=bq$,其中 q 为最小质因数.

若 $q>\sqrt{a}$, 显然同时也有 $b>\sqrt{a}$,

则 $a=bq>\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ 矛盾,

所以结论成立．

说明 这一结论表明，合数 a 一定是不大于$\sqrt{a}$的质数的倍数．换句话说，如果所有不大于$\sqrt{a}$的质数都不能整除$a(a\neq 1)$，那么 a 一定是质数．这就给出了判断一个数是不是质数的一种方法，如判断 191 是不是质数，由于$\sqrt{191}<14$，小于 14 的质数 2，3，5，7，11，13 都不能整除 191，所以 191 是质数．利用这种方法，可以求出不大于 a 的所有质数．例如求 50 以内的所有质数．由于不大于$\sqrt{50}<8$的质数有 2、3、5、7，可在 2，3，4，…，50 中依次划去 2、3、5、7 的倍数（保留 2、3、5、7）最后余下的数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47 就是 50 以内的全体质数．这就是著名的爱拉托斯散素数筛选法．

思考 用爱拉托斯散筛选法求出 100 以内的所有质数．

【例 9】 如果 p 和 $8p^2+1$ 都是质数，求证：$8p^2-p+2$ 也是质数．

分析与解 按整数除以 3 的余数对 p 进行分类讨论：

当 $p=3k+1$ 时，

$$8p^2+1=8(3k+1)^2+1=3(24k^2+16k+3)$$

为合数，故 $p\neq 3k+1$；

当 $p=3k+2$ 时，

$$8p^2+1=3(24k^2+32k+11)$$

为合数，故 $p\neq 3k+2$；

于是 $p=3k$，由 p 为质数，仅有 $p=3$，

$8p^2+1=73$ 为质数，

$8p^2-p+2=71$ 也为质数．

所以只要 p 和 $8p^2+1$ 为质数，$8p^2-p+2$ 也为质数．

【例 10】 有两个两位数，它们的差为 56，它们的平方末两位数相同，求这两个数．

分析与解 设这两个数为 a、$b(a>b)$，则有

$$a-b=56=7\times8$$

即有　$4\mid a-b$,

又由题设有　$100\mid a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

从而　$25\mid a+b$.

不妨设　$a+b=25n$

进而有　$2b=25n-56$

由于 a、b 是两位数($a>b$),所以　$25n-5b\leqslant2(99-56)=86$,

即　$n<6$ 且 n 为偶数,

即有　$n=2$　或　$n=4$.

经验证　当 $n=4$ 时,$b=22$,$a=78$.

故所求两个数为 78,22.

【例 11】 把一个两位质数写在另一个两位质数后而得到一个四位数,已知这个四位数恰能被这两个质数之和的一半整除,试求所有这样的四位数 .

分析与解　设这两个两位质数分别为 $x=\overline{ab}$, $y=\overline{cd}$, $x\neq y$,由题设可得:

$$100x+y=m\cdot\frac{x+y}{2}\quad(m\text{ 为整数})$$

即
$$200x+2y=m(x+y)$$
$$198x=(m-2)(x+y)$$

因为　$(x,x+y)=1$,

所以　$x+y\mid198$.

由 x, y 是两个不同的两位质数,知 x, y 是两位奇数,且　$11\leqslant x\leqslant99$, $11\leqslant y\leqslant99$,

从而　$x+y$ 是偶数,且　$24\leqslant x+y\leqslant196$.

又　$198=2\times3^2\times11$

则只有　$x+y=66$

而　$66=13+53=19+47=23+43=29+37$,

故符合条件的四位数有 8 个: