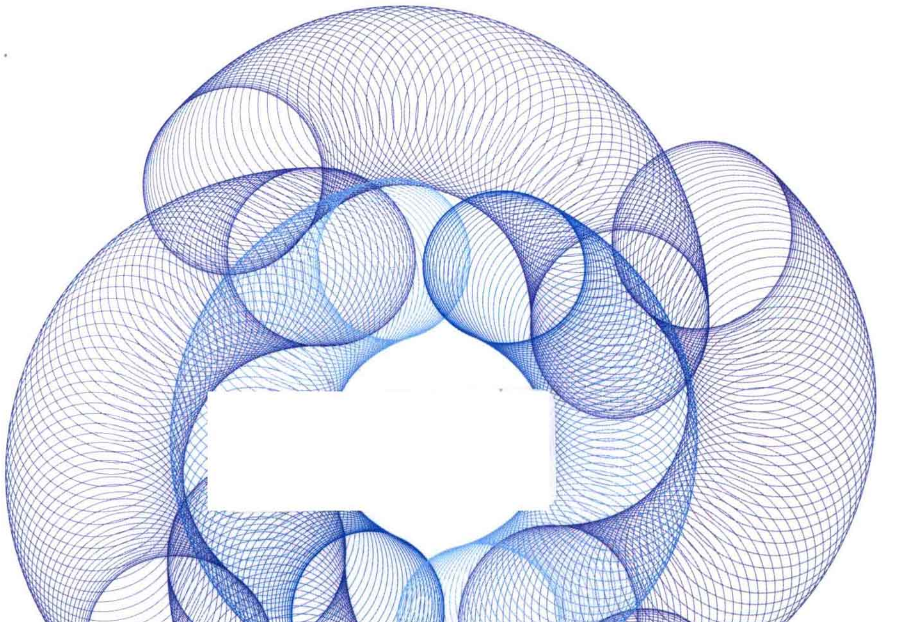
高考不猜题

高考数学万能解题法

只做50道题就参加高考

窦志民　曹湘江　编著

- 提前放弃题海战术，只做最精的实战优选题目
- 摸清高考出题策略，从2012真题中挑战最高分



化学工业出版社

高考不猜题

高考数学万能解题法

只做50道题就参加高考

窦志民　曹湘江　编著

化学工业出版社

·北京·

本书是一本特别针对高考数学而编写的实用应考指南，旨在帮助考生在短时间内完整掌握高考数学的知识点和解题要点，从而快速准确地解答高考题，大幅度提高解题速度和质量.

本书甄选50道最具代表性的高考题，从中总结高中数学的解题思路、解题步骤和知识要点. 本书选题普遍具有“基础”、“知识点突出”和“强化细节”的特点，对于高考第二轮复习，也就是知识点综合运用，相当有帮助. 每道例题之后，都会再延伸出5道类似的题目作为练习，让考生能够学以致用，进一步加强认识.

本书知识点全面，选题精辟、重点突出，是广大高考生必备的实用指南.

图书在版编目（CIP）数据

高考数学万能解题法：只做50道题就参加高考/窦志民，曹湘江编著. —北京：化学工业出版社，2012.10
（高考不猜题）
ISBN 978-7-122-15200-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①窦… ②曹… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第205277号

责任编辑：张素芳　　装帧设计：关　飞
责任校对：王素芹

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：化学工业出版社印刷厂
710mm×1000mm　1/16　印张$9\frac{3}{4}$　字数220千字　2013年8月北京第1版第3次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00元

学习导言

高考是中国学生通往大学的必经之路．有人形容高考是一座独木桥，只有胆大心细的人才能闯过去，更多的人，因为慌张或者技术技巧问题而落水．但是，当那些成功闯过独木桥的人回头看的时候，会惊讶地发现，原本桥身并没有想象中的那样狭窄，究其原因，不过是人在高中时期所掌握的知识面不够广，技术技巧不够娴熟，心理机制不够完善，凭空放大了困难的模样．

实际上，高考确实是一种能力与技能的考试，它考察的并非是你是否掌握了某种知识，而是你是否拥有掌握这种知识的能力，以及你运用这种知识的技能有多么娴熟．这个考试思想在数学学科里的体现尤为明显．

中国的高考数学题目，向来在世界范围内颇受好评，因为它梯度明显，解答弹性好，涉及的知识面广而精炼，可以直接测试出一个学生在数学方面的知识接受能力和逻辑思维程度．对于高中学生来说，高考数学从集合、函数开始，至解析、立体几何为止，理科学生比文科学生要多接受算法、极限等方面的训练，因此，一张高考数学答卷里，几乎每道题都考到了一个知识点，而这些通常被称为“考点”的知识点，普遍是高中数学学习过程中的重点，而并非难点．高考的难度体现在个别（约1～3道）题目上，仅针对挑战高分、满分和能力有余的学生，对于绝大多数学生来说，高考数学题目并不难做，即使完全放弃以上所说的难度题，仍然能有可观的分数——这也是高考命题委员会的出题原则——基础题占据了试卷的70%甚至更多．

但是，为什么绝大多数学生头疼的科目，偏偏就是数学？

在很多学生心目中，数学是一个靠海量练习累积而成的学科，同样的题目，条件和结论换位，算法立刻产生了翻天覆地的变化，即使几个数字略加更改，也可能导致完全不一样的解答，好像除了“做遍天下数学题”以外，并没有其他良好的解决办法．然而，不容忽视的是，在长期“不假思索”的解题过程中，学生对题目产生了熟悉感，却离知识和基础的数学思想越来越

远，以至于只会解传统题，一旦题目发生法则以外的变化，学生就只能陷入痛苦重复的错误演算中，自信心受挫，完全找不到解决办法.

有个很典型的例子．某题说，某小区有一个面积为 A 的池塘，种植了面积为单位 1 的一片荷叶，每一天，这片荷叶都会长大，面积是前一天的 2 倍，20 天后，这片荷叶铺满了整个池塘，求问，当荷叶面积等于 A/2 的时候，是生长期的第几天?

很多学生在拿到题目的时候，瞬间会想到，这是一个等比数列——你是否知道相关的公式和解法——绝大多数学生都知道，但是这道题的答题正确率并不算高，甚至有人写出带分数线、根号的答案．对于一道填空题来说，花去这样的精力列算式是非常吃亏的，题目本身的巧妙点就在于，它从另一个角度考察了你对“等比数列”这个概念的理解，那就是，后一个数字和前一个数字的比，与前一个数字和再前一个数字的比，是一样的．这个最基础最浅显的概念才是解题的关键，答案非常简单，第 20 天时，荷叶面积是 A，那么鉴于“2 倍”的公比，第 19 天的时候，面积就是 A/2．不需要算式，甚至，不需要动笔.

这道题目道破了高考数学的天机，对于数学学科来说，掌握基础知识，并且在实践中总结、运用基础知识才是制胜的关键点，高超的解题技巧固然可以带来事半功倍的效果，然而对基础知识的理解，永远是最关键的一部分.

因此，我们编写了一本相对于其他教辅图书来说、题量非常少的数学教辅图书．本书精选了在高考过程中出现的 50 道基础类真题，帮助你进一步复习、理解最基础的数学知识．在选题的时候，每一道题都经过了数学老师们的衡量，普遍具有以下 5 个特点：

(1) 每年必考的知识点；

(2) 重复考查的高频率知识点；

(3) 易错、易混淆的相似知识点；

(4) 令人“不理解”的中等难度知识点；

(5) 贯穿小、初、高，甚至大学还要用到的解题思想.

符合这 5 个条件的 50 道真题，按照类型划分为了若干知识模块，方便考生选择性阅读、练习．同时，这 50 道真题量虽少，内容却十分精巧，合适考生反复琢磨体会.

本套图书针对不同层次考生的需求，分为“基础题”和“压轴题”两本，本书为“基础题”，考生可以根据自己的学习进度、考分目标，分别加以选择.

希望本书可以从知识、技能的角度，带给广大考生关于数学高考的新思路，愿本书读者金榜题名.

最后，特别感谢戴秋馨、范澄、龚雪蓉、张韧、赵雪凤，以及覃子洋、刘欣然、王珊珊、张筱玫、朱成蹊、薛媛、黄李慧、谢楠、金秀芳、霍连杰等在本书编写过程中提供的帮助和做出的贡献.

编　者

2012 年 8 月

本书使用说明

(1) 章节前的考点、知识提示不可跳过，应仔细回想相关公式、定理、公理，为做题热身.

(2) 本书精选了50道考前复习必做的基础类题目，均来自全国高考考卷.

(3) 每章后，针对本章节的5道例题的相关解法、知识点，设计有匹配的5道练习题.

(4) 请仔细研读例题，反复思考解法，做练习时，不要继续翻阅答案，解不开的步骤可以倒回例题部分，查看相关解答.

(5) 数学复习讲究适量、精炼，完全掌握50道题，领会50道题的思路和方法，胜过500张模拟卷.

目 录

第 1 章 函数、导数

1.1 高考重点内容

(1) 函数：函数的概念与表示，映射，单调性与最大（小）值，奇偶性，周期性及其图象变换.

(2) 指数函数：有理指数幂的含义，实数指数幂的意义，幂的运算，指数函数概念、图象及其性质.

(3) 对数函数：对数的概念及其运算性质，换底公式，对数函数的概念、图象及其性质，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

(4) 幂函数：幂函数的概念，幂函数 $y=x^a$ 的图象及其性质.

(5) 函数的零点.

(6) 函数模型的应用.

(7) 导数及其应用：导数的几何意义，根据导数定义求函数的导数，导数的四则运算，简单的复合函数的导数，导数公式表，利用导数研究函数的单调性（其中多项式函数不超过三次），函数的极值、最值，利用导数解决某些实际问题，定积分与微积分基本定理.

1.2 最新高考真题

例 1.（2012 全国课标理） 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值.

解题思路分析

求函数 $f(x)$ 的解析式，就是要求 $f'(1)$ 和 $f(0)$. 先求 $f'(x)$，再令 $x=1$，即得 $f(0)$. 在 $f(x)$ 中，令 $x=0$ 可得 $f'(1)$，于是解析式即得.

第二问应将不等式变形，作成一个新函数，对该函数求导，再求其最值.

真题详解

（Ⅰ）$f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2\Rightarrow f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$

令 $x=1$ 得：$f(0)=1$

$$f(x)=f'(1)e^{x-1}-x+\frac{1}{2}x^2\Rightarrow f(0)=f'(1)e^{-1}=1\Leftrightarrow f'(1)=e$$

得：$f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2\Rightarrow g(x)=f'(x)=e^x-1+x$

$g'(x)=e^x+1>0\Rightarrow y=g(x)$ 在 $x\in R$ 上单调递增

$$f'(x)>0=f'(0)\Leftrightarrow x>0,\ f'(x)<0=f'(0)\Leftrightarrow x<0$$

得：$f(x)$ 的解析式为 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$

且单调递增区间为（0，$+\infty$），单调递减区间为（$-\infty$，0）

（Ⅱ）$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow h(x)=e^x-(a+1)x-b\geqslant 0$

得 $h'(x)=e^x-(a+1)$

① 当 $a+1<0$ 时，$h'(x)>0\Rightarrow y=h(x)$ 在 $x\in R$ 上单调递增，$x\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$ 与 $h(x)\geqslant 0$ 矛盾；

② 当 $a+1=0$ 时，$b\leqslant e^x\Rightarrow b\leqslant 0$；

③ 当 $a+1>0$ 时，$h'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln(a+1)$，$h'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln(a+1)$，

$\therefore$ 当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geqslant 0$

$\therefore (a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)\ (a+1>0)$

令 $F(x)=x^2-x^2\ln x\ (x>0)$，则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$

$\because F'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}$，$F'(x)<0\Leftrightarrow x>\sqrt{e}$

$\therefore$ 当 $x=\sqrt{e}$ 时，$F(x)_{\max}=\frac{e}{2}$

故当 $a=\sqrt{e}-1$，$b=\frac{\sqrt{e}}{2}$ 时，$(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

例 2.（2012 江苏） 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值或极小值，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点.

已知 a，b 是实数，1 和 -1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.

（Ⅰ）求 a 和 b 的值；

（Ⅱ）设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)=f(x)+2$，求 $g(x)$ 的极值点；

（Ⅲ）设 $h(x)=f(f(x))-c$，其中 $c\in[-2,2]$，求函数 $y=h(x)$ 的零点个数.

解题思路分析

（Ⅰ）求出 $y=f(x)$的导数，根据 1 和 -1 是函数 $y=f(x)$ 的两个极值点，列方程组求解即可；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可求得 $y=f(x)$的解析式，可得 $g'(x)$.

令 $g'(x)=0$，求解讨论即可.

（Ⅲ）就其形式来看，求解有一定的难度．应先在区间 $[-2,2]$ 上讨论关于 x 的方程 $f(x)=d$ 根的情况，再考虑方程 $f(f(x))=0$ 的根.

真题详解

（Ⅰ）由 $f(x)=x^3+ax^2+bx$，得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

∵1 和 -1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点，

∴$f'(1)=3+2a+b=0$，$f'(-1)=3-2a+b=0$，解得 $a=0$，$b=-3$.

（Ⅱ）∵由（Ⅰ）得，$f(x)=x^3-3x$，

∴$g'(x)=f(x)+2=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$，解得 $x_1=x_2=1$，$x_3=-2$.

∵当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$；当 $-2<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

∴$x=-2$ 是 $g(x)$ 的极值点.

∵当 $-2<x<1$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，∴ $x=1$ 不是 $g(x)$ 的极值点.

∴$g(x)$ 的极值点是 -2.

（Ⅲ）令 $f(x)=t$，则 $h(x)=f(t)-c$.

先讨论关于 x 的方程 $f(x)=d$ 根的情况：$d\in[-2,2]$.

当 $|d|=2$ 时，由（Ⅱ）可知，$f(x)=-2$ 的两个不同的根为 1 和 -2. 注意到 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)=2$ 的两个不同的根为 -1 和 2.

当 $|d|<2$ 时，∵$f(-1)-d=f(2)-d=2-d>0$，$f(1)-d=f(-2)-d=-2-d<0$，

∴-2，-1，1，2 都不是 $f(x)=d$ 的根.

由（Ⅰ）知 $f'(x)=3(x+1)(x-1)$.

① 当 $x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，于是 $f(x)$是单调增函数，从而 $f(x)>f(2)=2$.

此时 $f(x)=d$ 在 $(2,+\infty)$无实根；

② 当 $x\in(1,2)$时．$f'(x)>0$，于是 $f(x)$是单调增函数.

又∵$f(1)-d<0$，$f(2)-d>0$，$y=f(x)-d$ 的图象不间断，

∴$f(x)=d$ 在 $(1,2)$ 内有唯一实根.

同理，$f(x)=d$ 在 $(-2,-1)$ 内有唯一实根.

③ 当 $x\in(-1,1)$时，$f'(x)<0$，于是 $f(x)$是单调减函数.

又∵$f(-1)-d>0$，$f(1)-d<0$，$y=f(x)-d$ 的图象不间断，

∴$f(x)=d$ 在 $(-1,1)$ 内有唯一实根.

因此，当$|d|=2$ 时，$f(x)=d$ 有两个不同的根 x_1，x_2，满足$|x_1|=1$，$|x_2|=2$；

当$|d|<2$ 时，$f(x)=d$ 有三个不同的根 x_3，x_1，x_5，满足$|x_i|<2$，$i=3,4,5$.

现考虑函数 $y=h(x)$ 的零点：

（ⅰ）当$|c|=2$ 时，$f(t)=c$ 有两个根 t_1，t_2，满足$|t_1|=1$，$|t_2|=2$，而 $f(x)=t_1$ 有三个不同的根，$f(x)=t_2$ 有两个不同的根，故 $y=h(x)$有 5 个零点.

（ⅱ）当$|c|<2$ 时，$f(t)=c$ 有三个不同的根 t_3，t_4，t_5，满足$|t_i|<2$，$i=3,4,5$. 而 $f(x)=t_i(i=3,4,5)$有三个不同的根，故 $y=h(x)$有 9 个零点.

综上所述，当$|c|=2$ 时，函数 $y=h(x)$有 5 个零点；当$|c|<2$ 时，函数 $y=h(x)$有 9 个零点.

1.3 高考实战解析

例 1.（浙江文） 设函数 $f(x)=a^2\ln x-x^2+ax$，$a>0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）求所有实数 a，使 $e-1\leqslant f(x)\leqslant e^2$ 对 $x\in[1,e]$恒成立.

注：e 为自然对数的底数.

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=a^2\ln x-x^2+ax$. 其中 $x>0$，所以

$$f'(x)=\frac{a^2}{x}-2x+a=-\frac{(x-a)(2x+a)}{x}$$

由于 $a>0$，所以 $f(x)$的增区间为$(0,a)$，减区间为$(a,+\infty)$.

（Ⅱ）证明：由题意得，$f(1)=a-1\geqslant e-1$，即 $a\geqslant e$，由（Ⅰ）知 $f(x)$在$[1,e]$内单调递增，

要使 $e-1\leqslant f(x)\leqslant e^2$ 对 $x\in[1,e]$恒成立，只要$\begin{cases}f(1)=a-1\geqslant e-1,\\ f(e)=a^2-e^2+ae\leqslant e^2,\end{cases}$

解得$a=e$.

（本题主要考查函数的单调性、导数运算法则、导数应用等基础知识，同时考查抽象概括、推理论证能力.）

例 2.（北京理） 已知函数 $f(x)=(x-k)^2e^{\frac{x}{k}}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，求 k 的取值范围.

解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{k}(x^2-k^2)\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm k$.

当 $k>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,-k)$和$(k,+\infty)$上递增，在$(-k,k)$上递减；
当 $k<0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,k)$和$(-k,+\infty)$上递减，在$(k,-k)$上递增.

（Ⅱ）当 $k>0$ 时，$f(k+1)=\mathrm{e}^{\frac{k+1}{k}}>\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以不可能对 $\forall x\in(0,+\infty)$都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$；

当 $k<0$ 时由（Ⅰ）知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为 $f(-k)=\frac{4k^2}{\mathrm{e}}$，所以要对 $\forall x\in(0,+\infty)$都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$.

只需$\frac{4k^2}{\mathrm{e}}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}\Rightarrow-\frac{1}{2}\leqslant k<0$，故对 $\forall x\in(0,+\infty)$都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$k$ 的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},0\right)$.

例 3.（陕西文） 设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=f(x)+f'(x)$.

（Ⅰ）求 $g(x)$的单调区间和最小值；

（Ⅱ）讨论 $g(x)$与 $g\left(\frac{1}{x}\right)$的大小关系；

（Ⅲ）求 a 的取值范围，使得 $g(a)-g(x)<\frac{1}{a}$对任意 $x>0$ 成立.

分析　第一问先求出原函数 $f(x)$，再求得 $g(x)$，然后利用导数判断函数的单调性（单调区间），并求出最小值；第二问作差法比较，构造一个新的函数，利用导数判断函数的单调性，并由单调性判断函数的正负；第三问对任意 $x>0$ 成立的恒成立问题转化为函数 $g(x)$的最小值问题.

解：（Ⅰ）由题设知 $f(x)=\ln x,g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$\therefore g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$,令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$是减函数，故 $(0,1)$ 是 $g(x)$的单调递减区间；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$是增函数，故 $(1,+\infty)$ 是 $g(x)$的单调递增区间.

因此，$x=1$ 是 $g(x)$的唯一极值点，且为极小值点，从而是最小值点，所以

$g(x)$的最小值为 $g(1)=1$.

（Ⅱ） $g\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x+x$，设 $h(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，则

$$h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

当 $x=1$ 时，$h(1)=0$，即 $g(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$；

当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，因此，$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减；

当 $0<x<1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，即 $g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$；

当 $x>1$ 时，因为 $x>\frac{1}{x}$，所以 $g(x)<g\left(\frac{1}{x}\right)$.

（Ⅲ） 由（Ⅰ）知 $g(x)$的最小值为 1，所以，$g(a)-g(x)<\frac{1}{a}$，对任意 $x>0$ 成立$\Leftrightarrow g(a)-1<\frac{1}{a}$,即 $\ln a<1$，从而得 $0<a<\mathrm{e}$.

例 4.（湖南文） 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

（Ⅰ） 讨论 $f(x)$的单调性；

（Ⅱ） 若 $f(x)$有两个极值点 x_1 和 x_2，记过点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$的直线的斜率为 k，问：是否存在 a，使得 $k=2-a$？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

解：（Ⅰ） $f(x)$的定义域为 $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$$

令 $g(x)=x^2-ax+1$,其判别式 $\Delta=a^2-4$.

(1) 当$|a|\leqslant 2$ 时，$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2) 当$a<-2$ 时，$\Delta>0$，$g(x)=0$ 的两根都小于 0，在$(0,+\infty)$上，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(3) 当 $a>2$ 时，$\Delta>0$，$g(x)=0$ 的两根为

$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\ x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},$$

当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_1<x<x_2$时，$f'(x)<0$；当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$分别在$(0, x_1)$，$(x_2, +\infty)$上单调递增，在(x_1, x_2)上单调递减.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a>2$.

因为 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}-a(\ln x_1-\ln x_2)$，所以

$$k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=1+\frac{1}{x_1x_2}-a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$$

又由(Ⅰ)知，$x_1x_2=1$. 于是 $k=2-a\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$

若存在 a，使得 $k=2-a$，则$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1$. 即 $\ln x_1-\ln x_2=x_1-x_2$. 亦即

$$x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2=0(x_2>1) \qquad ①$$

再由(Ⅰ)知，函数 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$ 在$(0, +\infty)$上单调递增，而 $x_2>1$，所以 $x_2-\dfrac{1}{x_2}-2\ln x_2>1-\dfrac{1}{1}-2\ln 1=0$ 这与①式矛盾．故不存在 a，使得 $k=2-a$.

例 5.（江苏） 已知 a，b 是实数，函数 $f(x)=x^3+ax$，$g(x)=x^2+bx$，$f'(x)$和 $g'(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的导函数，若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$在区间 I 上单调性一致

（Ⅰ）设 $a>0$，若函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[-1, +\infty)$上单调性一致，求实数 b 的取值范围；

（Ⅱ）设 $a<0$，且 $a\neq b$，若函数 $f(x)$和 $g(x)$在以 a，b 为端点的开区间上单调性一致，求 $|a-b|$ 的最大值.

分析　第一问考察单调性概念、导数运算及应用、含参不等式恒成立问题，属于中档题；第二问综合考察分类讨论、线性规划、解二次不等式、二次函数、含参不等式恒成立问题、导数及其应用、化归及数形结合的思想，属于难题.

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[-1, +\infty)$上单调性一致，所以，$\forall x\in[-1, +\infty)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

即 $$\forall x\in[-1, +\infty),(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0,$$

$\because a>0$，$\therefore \forall x\in[-1, +\infty)$，$2x+b\geqslant 0$，

即$\because a>0$，$\therefore \forall x\in[-1, +\infty)$，$b\geqslant -2x$，$\therefore b\geqslant 2$.

（Ⅱ）当 $b<a$ 时，因为，函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间（b, a）上单调性一致，所以，$\forall x\in(b, a)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

即$\forall x\in(b, a)$，$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$，

$\because b<a<0$，$\therefore \forall x\in(b,a)$，$2x+b<0$，

$\therefore \forall x\in(b,a)$，$a\leqslant -3x^2$，

$\therefore b<a<-3b^2$，设 $z=a-b$，考虑点（b，a）的可行域，函数 $y=-3x^2$ 的斜率为 1 的切线的切点设为(x_0,y_0)

则 $-6x_0=1$，$x_0=-\frac{1}{6}$，$y_0=-\frac{1}{12}$，

$\therefore Z_{\max}=-\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$；

当 $a<b<0$ 时，因为，函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间（a，b）上单调性一致，所以，$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

即 $\forall x\in(a,b)$，$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$，

$\because b<0$，$\therefore \forall x\in(a,b)$，$2x+b<0$，

$\therefore \forall x\in(a,b)$，$a\leqslant -3x^2$，

$\therefore a\leqslant -3a^2$，

$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 0$，

$\therefore (b-a)_{\max}=\frac{1}{3}$；

当 $a<0<b$ 时，因为函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间（a，b）上单调性一致，所以，$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

即 $\forall x\in(a,b)$，$(2x+b)(3x^2+a)\geqslant 0$，

$\because b>0$，而 $x=0$ 时，$(3x^2+a)(2x+b)=ab<0$，不符合题意；

当 $a<0=b$ 时，由题意：

$\forall x\in(a,0)$，$2x(3x^2+a)\geqslant 0$，

$\therefore \forall x\in(a,0)$，$3x^2+a\leqslant 0$，

$\therefore 3a^2+a<0$，

$\therefore -\frac{1}{3}<a<0$，

$\therefore b-a<\frac{1}{3}$

综上可知，$|a-b|_{\max}=\frac{1}{3}$.

1.4 必做题精练

习题 1.（江苏） 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 P 是函数 $f(x)=e^x(x>0)$