对数及其用法

(一) 指數

一、指數　如 3×3和$5\times5\times5$ 這一類的式子，表示同一因數連乘的，爲簡單起見，將3×3寫成3^2，$5\times5\times5$寫成5^3；同樣$2\times2\times2\times2$ 就寫成2^4，$7\times7\times7\times7\times7$就寫成$7^5$。$3^2$，$5^3$，$2^4$，$7^5$，…………，右肩上的小數字2，3，4，5，……是一個數自乘的次數，也就是指明幾個同樣的數相乘，這小數字2，3，4，5，……叫做「指數」。而3，5，2，7等叫做「底數」。

指數是2的，如3^2叫做3的「平方」或「二次方」(二乘方)；指數是3的，如5^3叫做5的「立方」或「三次方」(三乘方)；指數是4的，5的，……，依次叫做「四次方」(四乘方)，「五次方」，……。

同樣：　a^2，是a的二次方(表示$a\times a$)。

　　　　b^3，是b的三次方(表示$b\times b\times b$)。

…………………………………………

二、指數定則

(一)例如　$11^2\times11^3=\underline{11\times11}\times\underline{11\times11\times11}=11^5=11^{2+3}$

$$a^3\times a^4=\underline{a\times a\times a}\times\underline{a\times a\times a\times a}=a^7=a^{3+4}$$

$x^a\times x^b=(x\times x\times$ ……到 a 個因數$)\times(x\times x\times$ ……到 b 個因數)。

$=x\times x\times\cdots x\times x\times x\cdots$到$(a+b)$個因數.

$=x^{a+b}$

由上例看來：同字母(或數)的乘方相乘，將指數相加。

(二)例如 $7^5 \div 7^3 = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7^2 = 7^{5-3}$

$$a^6 \div a^4 = \frac{a\times a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a} = a^2 = a^{6-4}$$

$$x^a \div x^b = \frac{x\times x\times x\cdots\text{到}a\text{個因數}}{x\times x\times x\cdots\text{到}b\text{個因數}}$$

$= x\times x\times x\cdots$到($a$--b)個因數(因分母分子對約去b個$x$) $= x^{a-b}$ $(a>b)$

由上例看來：同字母(或數)的乘方相除，從被除數的指數中減去除數的指數。

(三)例如 $(3^4)^3 = 3^4\times3^4\times3^4 = 3^{4+4+4} = 3^{4\times3}$

$$(a^2)^5 = a^2\times a^2\times a^2\times a^2\times a^2 = a^{2+2+2+2+2}$$

$$= a^{2\times5}$$

$(x^a)^b = x^a\times x^a\times x^a\cdots$到b個因數

$= x^{a+a+a\cdots\text{到}b\text{項}}$

$= x^{ab}$ $(ab = a\times b)$

由上例看來：乘方的乘方，將指數相乘。

三、指數定則範圍的擴大

在上面所談的指數，都是正整數。爲了使上面的定則能够普遍化，當指數不限於正整數時，也很眞確，能够應用，就需要進一步的研究於下：——

(一)分指數

現在暫且假定上面的指數定則不限於正整數。看可以推出什麼結果來，$9^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{2}{3}}$ 等是什麼意義。

如 $9^{\frac{1}{2}}\times 9^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=9^1=9$

(設定則(一)在此眞確)

但 $\sqrt{9}\times\sqrt{9}=9$ 也就是9的平方根自乘等於9

以上兩式來比較，就得

$$9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}$$

同樣的 $2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2^1=2$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

$$\therefore\ 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

同樣的方法， $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a.$

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a.$$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

又 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=a^2$

$$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{a^2}=a^2$$

$$\therefore\ a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$$

由上面的研究，分指數的意義可定爲分母表示開若干次方，分子表示乘若干次方，那末指數定則(一)對於分指數也是眞確的。

指數定則(二)、(三)，對於分指數也眞確。

如 $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2 = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}\times 2} = a^{\frac{4}{3}}$

又如 $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$

因 $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{6}} \div a^{\frac{3}{6}} = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^4 \div \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3$

$$= \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^{4-3}$$

$$a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}$$

(二) 0 指數

試看右面的等式， $10^3 = 1000$

$10^2 = 100$

$10^1 = 10$

$10^0 = ?$ (這？該是幾呢)

又 $10^3 \div 10^3 = 10^{3-3} = 10^0$ (設定則(二)在此眞確)

但 $10^3 \div 10^3 = 1$

$\therefore$ $10^0 = 1$

又 $10^3 \times 10^0 = 10^{3+0} = 10^3$ (設定則(一)在此眞確)

兩邊除以 10^3 則得

$$10^0 = \frac{10^3}{10^3} = 1$$

同理　　$a^0=1$

由以上的研究，可知任何數的0次方等於1。此定義適合各指數定則。

(三)負指數　前面所講的指數，只限於正的，這裏再來研究負的指數有什麽意義。

試看右面的等式　$10^2=100$

$$10^1=10$$

$$10^0=1$$

$$10^{-1}=?$$

$$10^{-2}=?$$

上面左邊，10的指數次第減少1，右邊該如何呢？

$$10^3\div10^5=10^{3-5}=10^{-2}\quad\text{(設定則(二)在此眞確)}$$

但　$$10^3\div10^5=\frac{10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10}$$

$$=\frac{1}{10\times10}=\frac{1}{10^2}$$

$$\therefore\ 10^{-2}=\frac{1}{10^2}$$

又　$10^{-7}\times10^7=10^{-7+7}=10^0=1$ (設定則(一)在此眞確)

兩邊除以10^7，　$\therefore\ 10^{-7}=\dfrac{1}{10^7}$

同樣的　$$10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}$$

而 $$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

由以上的研究，可知某數負指數，等於某數正指數的倒數，此定義適合各指數定則。

(二) 對 數

四、對數的定義

如 $10^2=100$ （指數式）

在指數裏，2叫做指數，10叫做底數。

在對數裏，這2就叫做100的「對數」，10仍叫做「底」，也就是2是以10為底時100的對數。100叫做「眞數」。

對數的符號爲「log」。上面的指數式可以下式表出：

$2=log_{10}100$ （對數式）

上兩式實表明2，10與100的同一關係，不過表現的方法不同而已。

一般的講 $b^x=N$ （指數式）

在對數裏即 $x=log_b N$ （對數式）

所以，對數其實就是指數。茲以一式表明底，對數，眞數的關係如下：

$$底^{對數}=眞數.$$

現舉例說明，列為一表如下：

指數式	對數式	對數(指數)	底	眞數
$3^2=9$	$2=\log_3 9$	2	3	9
$2^5=32$	$5=\log_2 32$	5	2	32
$10^3=1000$	$3=\log_{10} 1000$	3	10	1000
$x^y=Z$	$y=\log_x Z$	y	x	Z

五、對數定理　對數既然就是指數，所以對數的定理，就可從指數定則求得。

(一)兩數相乘的對數，等於兩數各取對數的和。

如　$\log_{10} 80\times125=\log_{10} 80+\log_{10} 125$

證　設二數為M和N，x 和 y 數為其以 b 為同底的對數，則

$$b^x=M \qquad b^y=N \qquad (\mathrm{I})$$

即　$$x=\log_b M \qquad y=\log_b N \qquad (\mathrm{II})$$

將(Ⅰ)的二式兩邊相乘，有：　$b^{x+y}=MN$

再寫成對數式，得

$$\log_b MN=x+y=\log_b M+\log_b N \qquad 從(\mathrm{II})$$

推廣

$$\log_b MNPQ=\log_b M(NPQ)=\log_b M+\log_b NPQ$$

$$=\log_b M+\log_b N+\log_b PQ$$

$$=\log_b M+\log_b N+\log_b P+\log_b Q$$

(二)兩數相除的對數，等於自被除數的對數，減去除數的對數的差。

如　$\log_{10}\frac{325}{978}=\log_{10}325-\log_{10}978$

證　將(一)中(Ⅰ)的兩式相除，得：

$$\frac{b^x}{b^y}=\frac{M}{N}\text{ 即 }b^{x-y}=\frac{M}{N}$$

改寫成對數式，得：

$$\log_b\frac{M}{N}=x-y=\log_bM-\log_bN\quad\text{從(Ⅱ)}$$

(三)一數P次乘方的對數，等於P與這數對數的積。

如　$\log_8 23^5=5\log_8 23$

$\log_{10}85^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_{10}85$

證　設 $b^x=N$ $(x=\log_bN)$兩邊自乘P次，得：

$$(b^x)^p=N^p\quad\text{即 }b^{px}=N^p$$

改寫成對數式，得：

$$\log_bN^p=px=p\log_bN$$

(四)一數r次方根的對數等於以r除這數對數的商

如　$\log_{10}250^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_{10}250$

證　設 $b^x=N$，$(x=\log_bN)$兩邊開r次方，得：

$$\sqrt[r]{b^x}=\sqrt[r]{N}\quad\text{即 }b^{\frac{x}{r}}=N^{\frac{1}{r}}$$

改寫成對數式，得：

$$\log_b N^{\frac{1}{r}}=\frac{x}{r}=\frac{1}{r}\log_b N$$

注意　據上面所論，可知用對數運算，則乘，除，乘方，開方，可以加，減，乘，除代替：

例1　求 $\frac{73.35\times 273\times 741.5}{294.3\times 760}$的値

設x等於這個分數，則（以10爲底）

$$\log x=\log 73.35+\log 273+\log 741.5-\log 294.3-\log 760$$

從表上可以把等號右邊的對數查出來，由其代數和，即可求出x來。

例2　求 2874×872^3

設　$x=2874\times 872^3$

則　$\log x=\log 2874+\log 872^3$　（以10爲底）

$$=\log 2874+3\log 872.$$

例3　求 $\sqrt[7]{\frac{26840}{87564}}$的値

設　$x=\sqrt[7]{\frac{26840}{87564}}=\left(\frac{26840}{87564}\right)^{\frac{1}{7}}$ 則

$\log x=\frac{1}{7}(\log 26840-\log 87564)$　（以10爲底）

六、常用對數及其正負　因1的任何次方，其值仍爲1，所以除1以外，任何正數，皆可取爲底。對於一底即有一種相當對數，常用對數，即以10爲底的對數。這種對數，對於十進法的數，最

便利合用。以下都講這種對數。底數10常略去不寫。如 $\log_{10}100=2$，省寫為 $\log 100=2$。

今表列常用對數式和其相當指數式如下：

$10^4=10000$　　$\log 10000=4$

$10^3=1000$　　$\log 1000=3$

$10^2=100$　　$\log 100=2$

$10^1=10$　　$\log 10=1$

$10^0=1$　　$\log 1=0$

$10^{-1}=0.1$　　$\log 0.1=-1$

$10^{-2}=0.01$　　$\log 0.01=-2$

…………　　…………

照上表看來，一數增加時，其對數也增加，故凡介於100與1000間的數，其對數必介於2與3之間。同理介0.1與0.01間的數，其對數必在－1與－2之間。推之如一數不為10的整數（正或負）次方，那末它的對數必含一整數部分和一小數部分。

例如　458介於 10^2 與 10^3 兩數間，所以有

$\log 458=2+$小數

同理　因0.067介於 10^{-2} 與 10^{-1} 兩數間，所以有

$\log 0.067=-(1+$小數$)=-1-$小數。

為實際運算計，一個數的對數，其小數部分，常使其為正。

如上例　$\log 0.067=(-1)+(-$小數$)=(-1-1)+(1-$小數$)$

$=-2+$另一小數

即如一對數全部爲負，可以加1於小數部分，使其爲正，再加-1於整數部分以抵消之。

我們應當特别注意，只當對數全部爲負時，才能在其前面冠一負號；如只有整數部爲負時，則當以負號寫在整數部的上面。

例如 $\log 0.04712=-1.32679=-1-0.32679$

$=(-1-1)+(1-0.32679)=\bar{2}.67321$

定義 對數的整數部分，叫做「指標」；其小數部分叫做「假數」。

例如 $\log 357=2.55267$， $\log 0.004712=\bar{3}.67321$.

2和-3爲指標，0.55267， 0.67321爲假數。

七、對數指標法則 按上節所列的表，可推得指標法則如下：

(一)大於1的數，其對數的指標爲正整數，它的値比小數點左邊的位數少1.

例如

眞數	9.56	32.4	685	823.54	5960.8	68742
指標	0	1	2	2	3	4

(二)小於1的數，其對數的指標爲負整數，它的絕對值比小數點與第一位有效數字中間零的個數大1。

例如

眞數	0.0045	0.7963	0.8	0.0000684	0.0987
指標	-3	-1	-1	-5	-2

八、對數的假數性質

試就 5.437和54.37，54370來研究，

設 $10^x=5.437$ 即$x=\log 5.437$（x爲小數）

以10（$=10^1$）乘前式的兩邊，得

$$10^1\cdot10^x=10^{1+x}=54.37\quad 即1+x=\log54.37.$$

若以10000($=10^4$)乘前式兩邊，得

$$10^4\cdot10^x=10^{4+x}=54370\quad 即4+x=\log54370$$

由上面右三式看來，5.437, 54.37, 54370 三數的對數，只有指標不同，可知凡數有同樣的有效數字，只是小數點位置不同的，其對數的假數必等。

例 $\log4085=3.61119$ $\quad\log0.006324=\bar{3}.80099$

則 $\log4.085=0.61119$ $\quad\log6.324=0.80099$

$\log0.04085=\bar{2}.61119$ $\quad\log632400=5.80099$

對數的假數常取其爲正，而指標則可正可負，取指標是負數，則爲計算便利起見，可加以10或加10的整倍數，而在後面減去同數。

例 $\log0.0234=\bar{2}.36922=8.36922-10=28.36922-30$

當一對數的指標爲負，而被一整數所除時，可如上法加減這整數乘以10的倍數。

例 $\frac{1}{3}\log0.0234=\frac{1}{3}(28.36922-30)=9.45641-10$

$=\bar{1}.45641$ 上面的除法，還可簡便演算如下：

（一）以3除$\bar{2}.36922$

$$3\,\underline{\big|\,-3+1.36922}$$

$$-1+.45641=\bar{1}.45641$$

（二）以2除$\bar{2}.36922$

$$2\,\underline{\big|\,-2+.36922}$$

$$-1+.18461=\bar{1}.18461$$

九、對數的四基法，餘對數

（一）加法

（1） 有同號指標的對數相加

$$\begin{array}{r} 3.28751 \\ 2.83245 \\ \hline 6.11996 \end{array}(+ \quad \left\{ \begin{array}{r} \bar{2}.68124 \\ \bar{1}.98408 \\ \hline \bar{2}.66532 \end{array}(+ \right. \quad 或 \quad \begin{array}{r} \bar{2}.68124=8.68124-10 \\ \bar{1}.98408=9.98408-10 \\ \hline 18.66532-20 \end{array}(+$$

$$=\bar{2}.66532$$

（2） 有異號指標的對數相加

$$\begin{array}{r} \bar{3}.73568 \\ 2.69152 \\ \hline 0.42720 \end{array}(+ \quad \begin{array}{r} \bar{4}.72016 \\ 1.86034 \\ \hline \bar{2}.58050 \end{array}(+ \quad 或 \quad \begin{array}{r} \bar{4}.72016=6.72016-10 \\ 1.86034 \\ \hline 8.58050-10 \end{array}(+$$

$$=\bar{2}.58050$$

在指標為異號或都是負號的對數相加時，若不把指標變為正數去計算，應注意由假數進在指標的數為正，要與負指標抵消。

（二)減法　為避免減法的不便，對數中常用餘對數，即可以加代減。一數的餘對數，即其逆數的對數。餘對數的符號為「$colog$」

即 $colog N = log\frac{1}{N}$

因為　$colog N=log\frac{1}{N}$　即 $colog N=log 1-log N$

但　$log 1=0$.　$\therefore$　$colog N=-log N$

於是得餘對數求法

（1） 將指標改號，再減去 1，就是餘對數的指標。

（2） 從 9 減去假數的各位數，但最後不是 0 的一位，應從10減去，所得各差，依次排成餘對數的假數。

例　設有三對數為 $\bar{2}.87157$，1.73799，$\bar{1}.53020$. 求其餘對數。

解：

$\log N = \bar{2}.87157$	$\log N = 1.73799$	$\log N = \bar{1}.53020$
$\bar{2} \to 2,\ 2-1=1$(指標)	$1 \to \bar{1},\ \bar{1}-1=\bar{2}$	$\bar{1} \to 1,\ 1-1=0$
9 9 9 9 10	9 9 9 9 10	9 9 9 10
8 7 1 5 7	7 3 7 9 9	5 3 0 2 0
1 2 8 4 3(假數)	2 6 2 0 1	4 6 9 8 0
$\operatorname{co}\log N = 1.12843$	$\operatorname{co}\log N = \bar{2}.26201$	$\operatorname{co}\log N = 0.46980$

註　由對數求餘對數，可用心算，不必列式。

由餘對數求法的道理，可知減去一數的對數，與加該數的餘對數同，所以對數的減法，可變為加法，如

(a)
$$\begin{array}{r} 2.21748 \\ -)\ \bar{2}.87157 \\ \hline 3.34591 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.21748 \\ +)\ 1.12843 \\ \hline 3.34591 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} \bar{1}.11394 \\ -\ 2.51188 \\ \hline \bar{4}.60206 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{1}.11394 \\ +)\ \bar{3}.48812 \\ \hline \bar{4}.60206 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} \bar{2}.18752 \\ -\ \bar{1}.69461 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{2}.18752 \\ +\ .30539 \\ \hline \bar{2}.49291 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{r} 3.73568 \\ -\ \bar{2}.71012 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.73568 \\ +\ 1.28988 \\ \hline 5.02556 \end{array}$$

(三)用常數乘對數

$$\begin{array}{r} 0.73846 \\ \times\qquad 5 \\ \hline 3.69230 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{2}.91328 \\ \times\qquad 3 \\ \hline \bar{4}.73984 \end{array}$$

或
$$\begin{array}{r} 8.91328-10 \\ \times\qquad\qquad 3 \\ \hline 26.73984-30 \\ =\bar{4}.73984 \end{array}$$

(四)用常數除對數

(1) 用2除3.88138　(2) 用3除$\bar{2}.24115$

$$2\,\underline{\big|\,3.88138}\qquad\qquad\qquad$$
$$1.94069$$

$$\bar{2}.24115 = 28.24115-30 \;\big|\; 3$$
$$9.41372-10$$
$$= \bar{1}.41372$$

十、對數表　常用對數的指標，可按指標法則求出，不必計算。其假數，本書所列各表，都用捨入法截取五位；又爲排印簡便起見，除1－100一表外，假數前的小數點，一律省去。所用的捨入法如下：

（1）　第六位小數，若小於5，就捨去；若大於5，就加1於末位。

如　　.563074 卽作.56307

　　　.243866 卽作.24387

（2）　第六位小數，若恰是5，則末位數爲奇數時，就加1，爲偶數時就捨去。

如　　.384735　卽作 .38474

　　　.384765　卽作 .38476

（3）　經捨入後，末位數恰是5，這個5若是捨去得來的，則寫作5，叫做「大五」；若是加1得來的，則寫作$\bar{5}$，叫做「小五」。

如　　.130352　　卽作　.13035

　　　.130348　　卽作　.1303$\bar{5}$

（三）　對數表的用法

十一、已知一數求其對數

（一）已知數有二位有效數字，其對數的求法如下：

例1　求 log 23000

解：1　23000是五位數，按指標法則，其指標爲4。

　　2　在1－100的對數表內，於N直行內找到23，其右一數

1.36173的小數部.36173,即所求假數。

$\therefore \log 23000=4.36173$

例 2 求 $\log 0.084$

解:1 0.084 的有效數字前,有1個0,按指標法則,其指標為-2。

2 於1-100的表上N直行內找到84,其右一數1.92428的小數部.92428,即所求假數。

$\therefore \log 0.084=\bar{2}.92428$

由上二例,可得凡有二位有效數字的數,其對數的求法如下;

規則一:

第一步,按指標法則,決定其指標。

第二步,在1-100的表內,N直行裏,找到已知數的二位有效數字,其右一數的小數部,即所求假數。

(二)已知數有三位或四位有效數字,其對數的求法如下:

例 1 求 $\log 385$

解:1 385有三位整數,按指標法則,其指標為2

2 在表上N直行內找到385;在其橫行內,右第一數546與L.直行內前二位數字 58(在546的橫行上邊),并寫為.58546即所求的假數。

$\therefore \log 385=2.58546$

註: 假數的前二位數,在L.直行內,如L直行內同一橫行處沒有記着,就是記在本橫行之上的一數。又如假數的後三位數的左邊有星標★的,其前二位數字在L.行內本橫行之下。

例 2 求 $\log 0.004578$

解:1 0.004578的有效數字前有2個0,按指標法則,其指標為-3.

2 於表上N直行內找到457,在其橫行內找到與上頂標明8