工业和信息化普通高等教育"十二五"规划教材
立项项目

21世纪高等院校通识教育规划教材

概率论与数理统计

程宗钱 主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等
立项项目

21世纪高等院校通识教育规划教材

概率论与数理统计

程宗钱 主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 程宗钱主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2013.9
21世纪高等院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-32295-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①程… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第160245号

内容提要

本书包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验等内容。每一章后面附有 A、B 两套习题，A 套为基础题，B 套为综合性的选择与填空题，书后附有两套习题的答案。本书的适用面广，内容可根据不同专业的需要选用。

本书可作为高等学校理工科、经济类和其他非数学专业教学用书，也适合数学专业专科的“概率论与数理统计”课程的教学需要。

◆ 主　　编　程宗钱
责任编辑　武恩玉
责任印制　彭志环　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：14.75　　2013 年 9 月第 1 版
字数：292 千字　　2013 年 9 月河北第 1 次印刷

定价：35.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

概率论与数理统计是一门研究随机现象的数学学科，它在各个领域中都有极其广泛的应用．本书在保持众多教材优点的基础上，注意将概率论与数理统计的知识和现实生活中存在的大量随机现象联系起来，注意将这些知识和经济学及其他相关知识结合起来．由于概率论与数理统计历来以抽象难学著称，初学者在学习中会遇到一些困难，因此，我们在例题编写中尽量清楚阐述解题思路、方法和步骤，通过例题的解题步骤从而引导读者掌握一些基本的解题方法．本书内容全面，深入浅出，通俗易懂，图文并茂，可使学生感到读此书的趣味．

本书内容包括事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计基本概念、参数估计、假设检验．每一章后面附有 A、B 两套习题， A 套为基础题，是为了满足基本的教学需要而编写的，B 套为综合性的选择题与填空题．书后附有两套习题的参考答案，以方便学生自学．

为了帮助读者抓住要点，提高学习质量和效率，在章末增写了本章“知识结构图”．知识结构图中所包含的内容，能起到提纲挈领的作用．

本书的适用面广，内容可根据不同专业的需要选用．本书可作为高等学校理工科、经济类和其他非数学专业教学用书，也可供其他工程技术人员参考．

本书在编写过程中参考了国内众多的同类教材（见参考文献），得到江西农业大学南昌商学院计算机系与教务部的大力支持，以及袁瑾洋教授的悉心指导，在此一并表示衷心感谢．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不足之处在所难免，敬请广大读者不吝赐教．

程宗钱

2013 年 5 月 8 日

目　　录

第 1 章 事件与概率

§1.1 事 件

自然界和人类社会中的各种现象，大致可分为两类：确定性现象和不确定性现象．确定性现象也称为必然现象，是指在一定条件下必然发生的现象．例如，水在通常条件下温度达到100℃时必然沸腾，温度为0℃时必然结冰；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引等．不确定性现象也称为随机现象，是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的现象．例如，测量一个物体的长度时测量误差的大小；从一批电视机中随便取一台，电视机的寿命长短等．

要研究随机现象，就要做一些试验．虽然就每次试验或观察而言，结果具有不确定性，但在相同条件下的大量重复试验中，随机现象的结果却呈现出某种明显的规律性．例如，抛掷一枚硬币，可能是正面向上，也可能是反面向上，但在相同条件下，多次抛掷一枚硬币，正面向上和反面向上的次数大约各占一半．这种在大量重复试验或观察中所呈现的规律性称为统计规律性．概率论和数理统计是从数量化的角度来研究随机现象及统计规律性的一门应用数学学科．

1．随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的，为对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为试验．

若一个试验具有下列三个特点：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 试验的可能结果不止一个，所有可能出现的结果试验前是已知的；

3° 每次试验会出现哪一个结果，在试验前是未知的．

则称这一试验为随机试验（Random trial），记为 E．

下面举一些随机试验的例子．

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_2：投掷一颗骰子一次，观察可能出现的点数.

E_3：在一批电灯泡中任意抽取一只测量其寿命.

E_4：城市某一交通路口，指定一小时内的汽车流量.

E_5：记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

2. 样本空间与随机事件

随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为样本空间（Sample space），记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个基本结果，称为样本点. 下面写出前面提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$的样本空间 Ω_k.

$\Omega_1:\{H,T\}$；

$\Omega_2:\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_3:\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_4:\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$\Omega_5:\{(x,y) \mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

随机试验 E 的样本空间 Ω的子集称为 E 的随机事件（Random event），简称事件[①]，通常用大写字母 A，B，C，…表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷骰子的试验中，可以用 A 表示“出现点数为偶数”这个事件，若试验结果是“出现 6 点”，就称事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件$\{H\}$、$\{T\}$；试验 E_2 有 6 个基本事件$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$、$\{5\}$、$\{6\}$.

每次试验中都必然发生的事件，称为必然事件. 样本空间 Ω包含所有的样本点，它是 Ω自身的子集，每次试验中都必然发生，故它就是一个必然事件. 因而必然事件我们也用 Ω表示. 在每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，故它就是一个不可能事件. 因而不可能事件我们也用$\varnothing$表示.

3. 事件之间的关系及其运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.

---

① 严格地说，事件是指 Ω中满足某些条件的子集.当 Ω是由有限个元素或由无穷可列个元素组成时，每个子集都可作为一个事件.若 Ω是由不可列无限个元素组成时，某些子集必须排除在外.幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到.今后，我们讲的事件都是指它是容许考虑的那种子集.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

1° 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B（或称事件 B 包含事件 A），记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

$A\subset B$ 的一个等价说法是，如果事件 B 不发生，则事件 A 必然不发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等（或等价），记为 $A=B$.

对于任一事件 A，显然有 $\varnothing\subset A\subset \Omega$.

2° "事件 A 与 B 中至少有一个发生"的事件称为 A 与 B 的并（和），记为 $A\cup B$.

由事件并的定义，立即得到：

对任一事件 A，有

$$A\cup \Omega=\Omega;\ A\cup\varnothing=A.$$

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个事件发生"这一事件.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生"这一事件.

3° "事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的交（积），记为 $A\cap B$ 或 AB.

由事件交的定义，立即得到：

对任一事件 A，有

$$A\cap \Omega=A;\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"B_1，B_2，…，B_n 这 n 个事件同时发生"这一事件.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 表示"可列无穷多个事件 B_i 同时发生"这一事件.

4° "事件 A 发生而 B 不发生"的事件称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$.

由事件差的定义，立即得到：

对任一事件 A，有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-\Omega=\varnothing.$$

5° 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 为互不相容（互斥），记作 $A\cap B=\varnothing$.

基本事件是两两互不相容的.

6° 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件（对立事件）. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件，它表示"A 不发生"这样一个事件. 显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

在一次试验中，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生（反之亦然），即在一次试验中，A

与 $\overline{A}$ 二者只能发生其中之一，并且也必然发生其中之一．显然有 $\overline{\overline{A}}=A$．

由差、积及对立关系显然可得：$A-B=A\overline{B}=A-AB$．

对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容事件未必为对立事件．

以上事件之间的关系及运算可以用文氏（Venn）图来直观地描述．若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示样本点，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则 A 与 B 的各种关系及运算如图 1-1~图 1-6 所示．

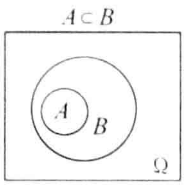

图 1-1

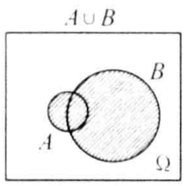

图 1-2

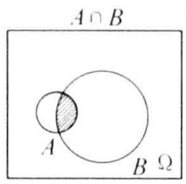

图 1-3

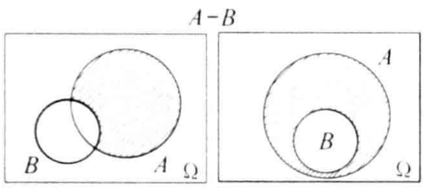

图 1-4

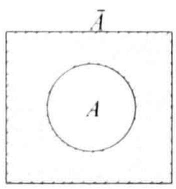

图 1-5

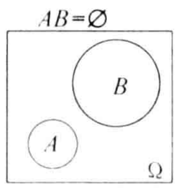

图 1-6

可以验证一般事件的运算满足如下关系．

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$．

2° 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$．

3° 分配律　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$．

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形，即

$$A(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(AA_i)，A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i)；$$

$$A(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(AA_i)，A\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i)．$$

4° 德·摩根（De Morgan）律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

德·摩根律也可推广到有限个或可列无穷多个事件的情形，如对有穷个或可列无穷个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 1.1　设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算式表示下列事件．

（1）A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

（2）A，B 都发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

（3）A，B，C 至少有一个事件发生：$A\cup B\cup C$.

（4）A，B，C 至少有两个事件发生：$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

（5）A，B，C 恰好有两个事件发生：$(AB\overline{C})\cup(AC\overline{B})\cup(BC\overline{A})$.

（6）A，B，C 恰好有一个事件发生：$(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(B\overline{A}\,\overline{C})\cup(C\overline{A}\,\overline{B})$.

（7）A，B 至少有一个发生而 C 不发生：$(A\cup B)\overline{C}$.

（8）A，B，C 都不发生：$\overline{A\cup B\cup C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 1.2　某运动员参加三项比赛，用 A_i 表示事件{第 i 项比赛获胜}$(i=1,2,3)$．试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

（1）只有第一项比赛获胜；（2）只有一项比赛获胜；（3）三项比赛都获胜；（4）至少有一项比赛获胜.

解　三项比赛作为一试验 E，所产生的基本事件有

$$A_1A_2A_3,\quad \overline{A_1}A_2A_3,\quad A_1\overline{A_2}A_3,\quad A_1A_2\overline{A_3},$$
$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,\quad \overline{A_1}A_2\overline{A_3},\quad A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3},\quad \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},$$

样本空间 Ω 由 8 个基本事件组成.

（1）设 C 表示{只有第一项比赛获胜}, 则

$$C=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3};$$

（2）设 D 表示{只有一项比赛获胜}, 则

$$D=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3;$$

（3）设 G 表示{三项比赛都获胜}，则

$$G=A_1A_2A_3;$$

（4）设 F 表示{至少有一项比赛获胜}，则

$$F=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

或

$$F=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3.$$

§1.2　概率的定义与性质

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生．我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，并且希望找到一个合适的数来表征．我们把表征事件发生可能性大小的数量指标称为事件的概率.

1．频率

定义 1.1　在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生

的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

不难验证，频率具有如下性质：

（1）非负性　$f_n(A)\geqslant 0$；

（2）规范性　$f_n(\Omega)=1$；

（3）有限可加性　若事件 A_1，A_2，…，A_m 互不相容，则有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

例 1.3　考虑“抛硬币”这个试验，历史上有多位数学家做过这样的试验，得到的结果如表 1-1 所示.

表 1-1

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
费　勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出：（1）频率具有随机**波动性**. 即对于同样的 n，所得的 f_n（A）不尽相同.（2）抛硬币次数 n 较小时，频率 f_n（A）随机波动的幅度较大，但随着 n 增大，频率 f_n（A）呈现出**稳定性**. 即当 n 逐渐增大时，f_n（A）总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5.

例 1.4　对某种黄豆进行发芽试验，抽了10批，试验结果如表 1-2 所示.

表 1-2

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
种子粒数	2	5	10	70	130	316	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	289	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.915	0.913	0.893	0.903	0.905

从表中可看出，尽管每批试验的种子粒数不同，发芽率也有变化，但却呈现出一种规律，即当种子粒数较多时，发芽率稳定在 0.9 这个常数附近.

从上述例子我们认识到，频率的稳定性是通过大量的试验所得到的随机事件的规律性，因此这种规律性称为**统计规律性**. 由此我们给出概率的统计定义.

定义 1.2　在相同的条件下，重复做 n 次试验，n_A 是 n 次试验中事件 A 发生

的次数，当试验次数 n 很大时，如果频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，且随着试验次数的增多，摆动的幅度越来越小，则称数值 p 为事件 A 在这个条件下发生的**概率**，记作

$$P(A)=p.$$

要注意的是，上述定义并没有提供确切计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率．在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，况且我们不知道 n 取多大才行；如果 n 取很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同．而且也没有理由认为，取试验次数为 $n+1$ 来计算频率，总会比取试验次数为 n 来计算频率将会更准确、更逼近所求的概率．

为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义．

2．概率的公理化定义及其性质

定义 1.3（概率的公理化定义） 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，对于每一个事件 A 赋予一个实数，记作 P（A），如果 P（A）满足以下条件：

公理 1 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

公理 2 规范性：$P(\Omega)=1$； （1.1）

公理 3 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 A_1，A_2，…，A_n，…，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.2}$$

则称实数 P（A）为事件 A 的**概率**（Probability）．

根据概率的公理化定义，可以推出概率有以下一些性质．

性质 1 $P(\varnothing)=0$． （1.3）

证 令 $A_i=\varnothing$（$i=1$，2，…），则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，由公理 3 得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

而实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$．

性质 2 （**有限可加性**）若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.4}$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，由公理

3 及性质 1 有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

特别地， 若事件 A， B 互不相容，即 $AB=\varnothing$ ，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{1.5}$$

性质 3 （减法公式） 设 A，B 为两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.6}$$

证 由 $A\subset B$ 知 $B=A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$，由式（1.5），有

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

式（1.6）得证.

推论 1 （单调性） 设 A，B 为两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B)\geqslant P(A). \tag{1.7}$$

证 由公理 1 知 $P(B-A)\geqslant 0$，于是 $P(B-A)=P(B)-P(A)\geqslant 0$，即

$$P(B)\geqslant P(A) .$$

推论 2 对于任一事件 A，有

$$P(A)\leqslant 1. \tag{1.8}$$

证 因 $A\subset\Omega$，由式（1.7）得

$$P(A)\leqslant P(\Omega)=1.$$

由公理 1 及式（1.8）知，对于任一事件 A 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

推论 3 对任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.9}$$

证 因为 $\overline{A}=\Omega-A$，且 $A\subset\Omega$，由式（1.6）得

$$P(\overline{A})=P(\Omega-A)=P(\Omega)-P(A)=1-P(A),$$

所以

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

推论 4 对任两事件 A， B，有

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB); \tag{1.10}$$

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.11}$$

证 先证式（1.10）. 因 $\overline{A}B=B-A=B-AB$ 及 $AB\subset B$，由式（1.6）得

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB),$$

即证.

式（1.11）同理可证.

性质 4 （加法公式） 对于任意两事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.12}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$，由式（1.5）及式（1.10）得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B-A)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

式（1.12）可以推广到多个事件的情形．例如，设 A_1，A_2，A_3 为任意三个事件，则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned} \tag{1.13}$$

一般对于任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，可以用归纳法证得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{1.14}$$

此式称为**概率的一般加法公式**.

例 1.5 设 A，B 为两事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.1$，求：

（1）A 发生但 B 不发生的概率；

（2）A 不发生但 B 发生的概率；

（3）至少有一个事件发生的概率；

（4）A，B 都不发生的概率；

（5）至少有一个事件不发生的概率.

解 （1）由式（1.11）得 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4$；

（2）由式（1.10）得 $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.2$；

（3）由式（1.12）得 $P(A\cup B)=0.5+0.3-0.1=0.7$；

（4）$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$；

（5）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$.

§1.3 概率的计算

1. 古典概型

（1）古典概型定义

定义 1.4 若随机试验 E 满足以下条件：

1° 试验的样本空间 Ω 只有有限个样本点，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

2° 试验中每个基本事件的发生是等可能的，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

则称此试验为古典概型，或称为等可能概型.

由定义可知$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$是两两互不相容的，故有

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+\cdots+P(\{\omega_n\}),$$

又每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}),$$

故
$$1=nP(\{\omega_i\}),$$
从而
$$P(\{\omega_i\})=1/n,i=1,2,\cdots,n.$$

设事件 A 包含 k 个基本事件，即

$$A=\{\omega_{i1}\}\cup\{\omega_{i2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{ik}\},$$

则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\{\omega_{i1}\}\cup\{\omega_{i2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{ik}\})=P(\{\omega_{i1}\})+P(\{\omega_{i2}\})+\cdots+P(\{\omega_{ik}\})\\&=\underbrace{1/n+1/n+\cdots+1/n}_{k\text{个}}=k/n.\end{aligned}$$

由此，得到古典概型中事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\Omega\text{所包含基本事件总数}}=\frac{k}{n}. \tag{1.15}$$

称古典概型中事件 A 的概率为古典概率．一般地，可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算 k 和 n，进而求得相应的概率．

（2）计算古典概率的方法——排列与组合

1° 基本计数原理

a．加法原理　设完成一件事有 m 种方式，第 i 种方式有 n_i 种方法，则完成该件事的方法总数为 $n_1+n_2+\cdots+n_m$.

b．乘法原理　设完成一件事有 m 个步骤，第 i 步有 n_i 种方法，必须通过 m 个步骤的每一步才能完成该事件的方法总数为 $n_1\times n_2\times\ldots\times n_m$.

2° 排列组合方法

a．排列公式

从 n 个不同元素中任取 k 个（$1\leqslant k\leqslant n$）的不同排列总数为

$$\mathrm{A}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

$k=n$ 时称其为全排列，有

$$\mathrm{A}_n^n=\mathrm{A}_n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!.$$

b．组合公式

从 n 个不同元素中任取 k 个（$1\leqslant k\leqslant n$）的不同**组合总数**为

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{\mathrm{A}_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

C_n^k 有时记作 $\binom{n}{k}$，称为**组合系数**.

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!$$

注意：有关排列组合的基本内容详见有关书籍.

例 1.6 在一只盒子中，装有10个相同的球，其中6个是白色的，4个是黑色的. 从盒子中取球两次，每次取一个，考虑两种情况：

（1）放回抽样 第一次取一个球观察其颜色后放回盒内，第二次再取一次；

（2）不放回抽样 第一次取一个球后不放回盒内，第二次再取一球.

试由上面两种情况，求：

（i）取到两个白球的概率；

（ii）取到两球都是同一颜色的球的概率；

（iii）取到两球中至少有一个白球的概率.

解 设 $A=\{$取到两个白球$\}$，　　$B=\{$取到两个黑球$\}$，

$C=\{$取到两球都是同一颜色的球$\}$，

$D=\{$取到两球中至少有一个白球$\}$，

显然，$C=A\cup B$.

（1）放回抽样情形 第一次从盒内取一球有10个球可供抽取，取后放回，第二次再取一球也有10球可供抽取，连取两次，共有10×10种可能的取法. 每一种取法是一基本事件，且可能性是相同的. 所以基本事件的总数$n=10\times 10$.

使A发生的基本事件是第一次取到白球，第二次取到白球，共有$k=6\times 6$种取法. 于是

$$P(A)=\frac{6\times 6}{10\times 10}=0.36.$$

同理，B包含的基本事件数$k=4\times 4$，所以

$$P(B)=\frac{4\times 4}{10\times 10}=0.16.$$

由于A，B互不相容，所以

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.52,$$

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(B)=1-0.16=0.84.$$

（2）不放回抽样情形 第一次在10个球中取一球有10种取法，取后不放回，第二次在9个球中取一球有9种取法，连取两次共有10×9种取法，所以基本事件总数$n=10\times 9$.

两次取到白球共有6×5种取法，即A包含的基本事件数，于是

$$P(A)=\frac{6\times 5}{10\times 9}=\frac{1}{3}.$$

同理，B包含基本事件数为4×3个，于是

$$P(B)=\frac{4\times 3}{10\times 9}=\frac{2}{15},$$

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15},$$

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(B)=\frac{13}{15}.$$

例 1.7 箱中装有 a 只白球，b 只黑球，现作不放回抽取，每次一只，求：

（1）任取 $m+n$ 只，恰有 m 只白球、n 只黑球的概率（$m\leqslant a$，$n\leqslant b$）；

（2）第 k 次才取到白球的概率（$k\leqslant b+1$）；

（3）第 k 次恰取到白球的概率.

解 设 $A=\{$恰有 m 只白球，n 只黑球$\}$，

$B=\{$第 k 次才取到白球$\}$，

$C=\{$第 k 次恰取到白球$\}$.

（1）可看作一次取出 $m+n$ 只球，与次序无关，是组合问题. 从 $a+b$ 只球中任取 $m+n$ 只，所有可能的取法共有 C_{a+b}^{m+n} 种，每一种取法为一基本事件，且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 从 a 只白球中取 m 只，共有 C_a^m 种不同的取法，从 b 只黑球中取 n 只，共有 C_b^n 种不同的取法. 由乘法原理知，取到 m 只白球、n 只黑球的取法共有 $\mathrm{C}_a^m\ \mathrm{C}_b^n$ 种，于是所求概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_a^m\mathrm{C}_b^n}{\mathrm{C}_{a+b}^{m+n}}.$$

（2）抽取与次序有关. 每次取一只，取后不放回，一共取 k 次，每种取法即是从 $a+b$ 个不同元素中任取 k 个不同元素的一个排列，每种取法是一个基本事件，共有 A_{a+b}^k 个基本事件，且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 前 $k-1$ 次都取到黑球，从 b 只黑球中任取 $k-1$ 只的排法种数有 A_b^{k-1} 种，第 k 次抽取的白球可为 a 只白球中任一只，有 A_a^1 种不同的取法. 由乘法原理，前 $k-1$ 次都取到黑球，第 k 次取到白球的取法共有 $\mathrm{A}_b^{k-1}\mathrm{A}_a^1$ 种，于是所求概率为

$$P(B)=\frac{\mathrm{A}_b^{k-1}\mathrm{A}_a^1}{\mathrm{A}_{a+b}^k}.$$

（3）基本事件总数仍为 A_{a+b}^k. 第 k 次必取到白球，可为 a 只白球中任一只，有 A_a^1 种不同的取法，其余被取的 $k-1$ 只球可以是其余 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只，共有 A_{a+b-1}^{k-1} 种不同的取法，由乘法原理，第 k 次恰取到白球的取法有 $\mathrm{A}_a^1\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}$ 种，故所求概率为

$$P(C)=\frac{\mathrm{A}_a^1\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{A}_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

例 1.7（3）中值得注意的是 $P(C)$ 与 k 无关，也就是说其中任一次抽球，抽