



上海市普教系统
名校长名师培养工程
优秀成果精选



金荣生 / 著

Shuxue: Yindao Xuesheng Chuangxin

数学：引导学生创新



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

上海市普教系统名校长名师培养工程
优秀成果精选

成 长 文 库

(第二期 第一辑)

数学:引导学生创新

金荣生 著

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学:引导学生创新/金荣生著.

—上海:上海教育出版社,2011.7

ISBN 978-7-5444-3304-4

I.①数… II.①金… III.①中学数学课—教学研究
IV.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第125301号

责任编辑 王 健

封面设计 周 亚

上海市普教系统名校校长名师培养工程优秀成果精选

成长文库(第二期 第一辑)

数学:引导学生创新

金荣生 著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司

上 海 教 育 出 版 社

易文网 www.ewen.cc

地 址 上海永福路123号

邮 编 200031

经 销 各地新华书店

印 刷 上海颀辉印刷厂

开 本 700×1000 1/16 印张 11.75 插页 2

版 次 2011年7月第1版

印 次 2011年7月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5444-3304-4/G·2539

定 价 26.00元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

上海市普教系统名校长名师培养工程
优秀成果精选

成 长 文 库

上海市教育委员会组编

上海教育出版社出版

上海市普教系统名校校长名师培养工程
优秀成果精选

成 长 文 库

编审委员会

主 任	薛明扬	李骏修		
副主任	周国明	俞玲萍		
编 委	顾鸿达	张跃进	包南麟	王耀东
	徐崇文	王志刚	郑少鸣	洪东府
	顾志跃	陈 军	徐 虹	

上海市普教系统名校校长名师培养工程

优秀成果精选

成长文库

出版前言

人才资源是第一战略资源。对于教育事业来说,最重要的是教师队伍的建设。教师队伍的素质决定着教育的质量和水平。上海教育事业发展“十一五”规划纲要提出,到2010年,上海将在全国率先基本实现教育现代化。实现这一目标的前提是,必须造就一批具有良好师德修养、先进教育理念、厚实专业素养、开阔国际视野和较强国际交往能力,具有良好教育研究能力和教育创新能力的优秀校长和教师,并充分发挥其示范和辐射作用,带动上海教师队伍整体素质的提高。

2005年上海市在全国率先启动的普教系统“名校校长名师培养工程”就是促进上海教育现代化的重要举措,它为高端教育人才的培养提供了全方位的锻造平台。该工程包括多个校长培养基地和多个教师培养基地,各培养基地以学习研修为阶梯,以课堂教学为阵地,以教育科研为抓手,通过专家引领、教学研讨、名著研读、案例分析、课题研究、访学考察等培养形式,促进中青年校长、教师迅速成长,教学能力、管理能力、教育研究能力不断提高。

为使优秀校长和教师们先进的教育思想、丰富的实践经验、高超的教学技能成为共同的社会财富,也为了探寻他们成长的轨迹,上海市教育委员会专门设立了“上海市普教系统名校校长名师培养工程文库出版项目管理组”,文库出版项目管理组按既定的工作方案分阶段实施文库项目出版的具体工作,组织专家和领导严格论证和审定了列选的文库出版项目,力求反映当前本市最优秀的教育科研成果,并将文库定名为《成长文库》。收入《成长文库》的专著内容宽泛,涉及普教系统的多个方面。既有对教育教学或学校管理中的重点、难点及其对策的研究,又有对教育教学改革前沿问题的探索;既突出方法上的指导,又立足实践、

注重内容的实用性。

《成长文库》的出版,有利于推广本市一批优秀校长和教师先进的教育理念、成功的教学和管理经验、突出的教研成果,发挥典型的示范作用,同时也可以为广大幼儿园、中小学教师搭建展示成果、交流心得、切磋技能的教研平台,推动我们的教育理论研究、教学和管理实践向更深层次发展。

《成长文库》既可用作在职教师培训的生动教材和教师职前培养的重要学习内容,又可以为广大教育科研人员提供丰富的教学信息 and 研究资源,有助于教育理论研究更好地为教育教学实践服务。

《成长文库》将随着上海市普教系统名校长名师培养工程的不断推进,分批分批出版。在它正式出版之际,我们要真诚地感谢上海市普教系统名校长名师培养基地的所有专家、学者和领导对基地学员的培养所付出的辛勤劳动,同时还要感谢其他所有给予我们热心帮助和支持的同行和朋友,让我们携手为上海教育事业的发展作出更大的贡献。

希望这套《成长文库》能成为广大教师和教育工作者的良师益友。

由于我们的认识和水平有限,《成长文库》会有许多不足之处,恳请广大读者批评指正。

上海市教育委员会

上海教育出版社

2008年12月

上海市普教系统名校校长名师培养工程
优秀成果精选

成长文库

总序

《成长文库》和大家见面了,我在此表示热烈祝贺!

《成长文库》是上海市普教系统名校校长名师培养工程的又一重要成果,是优秀中青年教师在导师指导下学习、思考、实践、研究的结晶。

我们提倡教师在搞好教学的同时,要学会研究,要深入研究教育教学中的实际问题,研究学生、研究课堂、研究教材、研究课程,研究学生如何轻松地学,研究教师如何高效地教,努力寻找解决实际问题的策略、方法,在实践探索和改革创新中促进专业成长。

《成长文库》的一本本著作正是上海市优秀中小学、幼儿园教师研究和探索结出的硕果,是他们教育教学经验的提炼,是他们成长之路的回望和解析。

成长是一个过程,是一种阅历的积累。不能浮躁,不能急功近利,不要为名利所累。要踏实认真,追求一种水到渠成的效果,追求从容淡定的境界。在成长的过程中,要读书,要思考,要践行,要用心去感悟,感悟人生的真谛,感悟教育的真谛。

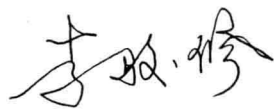
成长是生命的律动,成长也是生命的延展,只要有对生命的热爱和敬畏,你就能体验到成长的乐趣,收获成功的喜悦,就能实现生命的一次次升华和超越。

成长就是不断地超越,超越前人,超越成见,超越世俗,超越自我,追求“海到尽头天做岸,山登绝顶我为峰”的大境界,逐渐成长为一名身正学高、善

教学、会研究的优秀人民教师。

名校长名师培养工程促进了中青年校长、教师的专业成长,但教师的成长归根结底还是为了每一个学生的成长,为了祖国的未来和希望的成长。

我衷心祝愿《成长文库》健康成长,祝愿教育事业薪火相传、一代代一批批优秀教师健康成长,更祝愿中小學生、幼儿园的孩子們幸福快乐地成长。



2008年12月

前 言

对于“创新”人们并不陌生,但这两个字的分量却从来没有像今天这么重。“为什么我们的学校总是培养不出杰出人才?”被称为“钱学森之问”,成为有识之士关注的教育焦点。

在我国,学生的平均数学成绩在世界上处于领先地位,但是优秀学生的创造力远不如西方国家,张奠宙指出:“高考体制,是制约数学优秀生成长的瓶颈,减负且深挖洞,形成了陷阱式的考试题,大家一齐陪着做,没有多少数学含量。”正所谓“高考减负一刀平,数学英才何处寻?”为了高考,大量简单的机械化的数学练习,已经导致许多学生“熟而生厌”。虽然还有一些数学优秀学生对数学研究有兴趣,渴望挑战难题,进行探究性学习。但他们也时常困惑于:我花时间去思考这些问题值不值,高考能考到吗?

如今,全社会高度关注和重视自主创新,一个有利于自主创新的大环境与良好氛围正在向我们靠近。

正如教育家刘佛年指出的:“只要有点新意思、新思想、新概念、新设计、新意图、新做法、新方法,就称得上创造。我们要把创造的范围看得广一点,不要把它看得太神秘,非要有新的科学理论才叫创造,那就高不可攀了。”

数学探究的兴趣总是和成功的喜悦紧密相连的。如独立地解决一道数学难题、作出一个数学猜想、想出一种新的解题方法等,都能使学生从这些“成功”中体验到创造的喜悦,激发起更高的学习热情。我鼓励学生将数学学习中的感悟以小论文的形式记录下来,这些小论文虽然“简单”,但对学生本人来说是一种创新,相信每一种体验都有它特有的价值,每一种思想火花都见证了学生的成长。我与学生将小论文编辑成校本杂志,杂志名字叫《简单》。

《简单》编辑成册以后,得到了许多老师的称赞,认为我们在培养喜欢数学的未来学者!也许现在让学生发表小论文,得到鼓励以后,学生将来能写大论文。

许多老师问：学生们怎么会有那么多的想法？应该怎么指导学生做数学探究？这些问题，促使我写这本书，希望通过本书来探索引导学生进行数学创新的道路。

就在本书即将付印时，又有喜讯，我的学生陈波宇同学凭论文《Weierstrass 函数在不可列的稠密集上不可导的一种证明》荣获第三届丘成桐中学数学奖金奖。

本书能够成稿并得以出版，离不开我的导师顾鸿达先生、杭顺清先生、李大元先生和市北中学陈军校长的鼓励与指导，在这里深表感谢！同时，方仁工先生、孟小龙先生都给书稿提了很好的意见，数学基地陈玉蟾、荣健玲、赵伟老师为我们的工作付出了大量的劳动，在此一并致谢！

目 录

前言	► i
1. 兴趣,创新的原动力	► 1
1.1 哪里为数,哪里就有美	► 2
Mandelbrot 集	► 4
1.2 感受理性思维的魅力	► 7
怎样证明 $3 < \pi < 4$?	► 9
1.3 数学好玩	► 11
数独进阶技巧——排除法	► 13
1.4 无处不用数学	► 17
最优逃生线路	► 19
2. 发现问题,数学创新的切入点	► 22
2.1 学起于思,思源于疑	► 22
生日相同的概率	► 26
同年同月同日生的概率究竟是多少?	► 29
用模拟实验估计三人同日生的概率	► 31
失误也能带来的精彩	► 34
2.2 类比	► 39
三项式定理	► 44
2.3 归纳	► 46
求二元一次不等式表示区域的一种新方法	► 50
2.4 反过来怎么样	► 51
满足等差求和公式的数列一定成等差吗?	► 56

2.5	答案不止一个	▶ 60
	证 2003 年联赛不等式题的多种方法	▶ 65
	一道数列题的多种解法	▶ 67
	线面垂直判定定理的一种新证法	▶ 68
2.6	生活中的问题	▶ 69
	用 TI 计算器估计汽车转弯路宽	▶ 73
3.	从简单开始,一种解决问题的策略	▶ 78
3.1	特例探路	▶ 79
	一个反例的构造	▶ 81
3.2	着眼于极端情况	▶ 83
	圆锥曲线中的蝴蝶定理及其应用	▶ 86
	一个下界的探求	▶ 91
3.3	分类讨论	▶ 92
	三阶幻方的性质研究	▶ 95
	再论与空间不共面的四点距离为定比的平面个数	▶ 98
3.4	爬坡式推理	▶ 101
	怎样求 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$?	▶ 103
	关于两点的球面距离的探究	▶ 105
4.	在研究性学习中体验“亚研究”的过程	▶ 108
4.1	确定研究课题	▶ 109
4.2	探究研究方法	▶ 109
4.3	交流研究结果	▶ 111
	关于四边形重心坐标的讨论	▶ 112
	人民路红绿灯设置合理性研究	▶ 116
	一类轨迹问题的探求	▶ 124
5.	让信息技术帮我们猜	▶ 129
5.1	作图	▶ 129
	顶点在圆锥曲线上的直角三角形的一个性质	▶ 133

利用《几何画板》探索函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的性质	▶ 135
5.2 计算	▶ 138
用 TI 编程求整点最优解	▶ 141
用编程求解简单的数论问题	▶ 144
利用《几何画板》探索 $ x-x_1 + x-x_2 +\dots$ $+ x-x_n $ 的最小值	▶ 146
5.3 模拟	▶ 148
用随机数求 π 的近似值	▶ 150
在 TI 中利用随机数画分形曲线	▶ 152
让学生用《几何画板》做数学	▶ 154
利用《几何画板》探索一类最短距离问题	▶ 157

附录

《简单》，给学生一个数学创新的空间	▶ 160
-------------------	-------

参考文献

	▶ 170
--	-------

1. 兴趣,创新的原动力

知之者不如好之者,好之者不如乐之者.

——孔子

著名数学家谷超豪院士荣获国家最高科学技术奖后,有位记者问他:“请问要想在数学上有所成就,关键应具备什么样的品质?”他不紧不慢地来了句:“对解决问题有热情,对创造感兴趣.”记者接着问:“有人说学数学是很苦的.您研究了一辈子的数学,不觉得苦吗?”这次他答得更干脆:“能解决复杂问题是很高兴的,不会苦.”谷院士曾经作诗抒发对数学之爱:“人言数无味,我道味无穷.”谷院士的数学人生启示我们:要在创新之路上不断前行,不可缺少那种发自心底的创新快乐.

记得有一个故事:一老汉,住在一个堆满了废铁桶的广场边.一群小孩在每天经过广场时都要对那些铁桶拳打脚踢几下,以此取乐.这可苦了老汉,他受不了那些噪声.于是,拦住那些小孩说:“你们踢铁桶的声音我很喜欢听,我给你们每人每天一元钱,请你们继续踢下去.”小孩很高兴,踢打铁桶更加卖力了.一周后,老汉又拦住那群小孩,说:“现在钱不多了,只能给你们每人每天五角钱.”小孩听了很不高兴,但还是去踢桶,心想有点钱总比没有强.又过了些时日,老汉又对小孩们说:“我现在经济情况更糟了,不能付给你们踢桶的钱了,但我还是希望你们每天都能为我踢一阵子.”小孩们愤怒地拒绝了.于是,老汉复得安宁.老汉把小孩们踢桶的动机不动声色地从获得乐趣变成了获得金钱,当金钱没有了,小孩们的兴趣也就没有了.在数学教学中,我们是否会不自觉地学生获得的学数学的乐趣变成考数学的分数?当分数不再重要的时候,学习的兴趣也就没有了.

“兴趣是最好的老师.”如果你满怀兴致地去学习自己感兴趣的知识,你的拓

展能力和创新能力就会不断提高,就可以收到较好的学习效果.华罗庚遭受失学、身体残疾的不幸,刻苦自学,终于成功,正是出于他对数学的痴迷.

数学创新的动机可分为外部动机与内部动机.外部动机源自生产实际、日常生活中的问题对数学的需要,内部动机是数学活动中人们对数学美与和谐的追求.借鉴数学创新的两种不同动机的思想,在数学学习中,我们可以从数学的实际应用价值和数学的自身魅力两方面,激发学生的探究兴趣,挖掘学生的创造潜能.

1.1 哪里有数,哪里就有美

许多数学家如哈代,推崇数学的“纯粹”和“美”,认为数学是一种永久性的艺术品,正是数学的美指引着他们去发现和创造.哈代从不谈(甚至轻视)数学的应用,他写道:“我从不干任何有用的事情,我的任何一项发现都没有,或者说不可能给这个世界的安逸带来最细微的变化……他们(指某些数学家)的工作,也和我的一样无用.”

著名数学家庞加莱也曾经在一篇文章中写道:“科学家之所以研究自然,不是因为这样做很有用.他们研究自然是因为他们从中得到了乐趣,而他们得到乐趣是因为它美.我指的是本质上的美,它根源于自然各部分和谐的秩序,并且纯理智能够领悟它.”他还指出:“正因为简单和深远两者都是美的,所以我们特别刻意于寻求简单和深远的事实,由于这些活动给我们带来了欢乐.”

田刚院士说:“数学的美体现在结论的简单和明确.数学就像是一个花园,没进门时你根本看不到它的漂亮,可一旦走进去,就会感觉它真美.”数学中的简洁性、和谐性、奇异性、对称性等诸多方面均展现着数学自身的美.在数学教学中,如果教师能够充分挖掘教材之中的美学因素,让数学教学成为发现、鉴赏和创造数学美的过程,引导学生在数学美的海洋里去欣赏、去发现、去感受,学生就会在潜移默化中逐渐形成数学美感.

数学教学时,解题的简与繁的对比也能给人以美的体验.

例 1 已知 a, b 为不全为 0 的实数,求证:方程

$$3ax^2 + 2bx - (a+b) = 0$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

我给出了如下解法:

若 $a=0$,则 $b \neq 0, x = \frac{1}{2} \in (0,1)$.

若 $a \neq 0$,设 $f(x) = 3ax^2 + 2bx - (a+b)$,则

$$f(0) = -(a+b),$$

$$f(1) = 2a+b,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}a + b - a - b = -\frac{a}{4}.$$

(1) 若 $a(a+b) < 0$,则 $f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}a(a+b) < 0$,于是 $f(x)$ 有一根在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内.

(2) 若 $a(a+b) \geq 0$,则

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) = -\frac{1}{4}a(2a+b) = -\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a(a+b) < 0,$$

于是 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有一根.

吉鸿韵同学给出了另解:

$$f(0) = -(a+b),$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{a+b}{3}.$$

当 $a+b=0$ 时, $x = \frac{2}{3}$ 是一解;当 $a+b \neq 0$ 时,由于 $f(0)f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$,于是 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ 内有一解.

通过两种方法的对比,学生认为吉鸿韵同学的解法更简洁,更和谐,更美.正是她对数学美的追求,得到了这种新的解法,这就是创新!

在中学数学中,数学的美大量地体现在数与形微妙的和谐上.

例 2 设 $x, y, z \in (0,1)$,求证:

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1.$$