高等学校教材

高等数学（上册）

主　编　曲　如
副主编　宋代清　赵晓萍　范　姝　武文华　谷　晶

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（上册）

主　编　曲　如
副主编　宋代清　赵晓萍　范　姝　武文华　谷　晶
编　者　常华珍　李洪霞　王学武　姜妍丽　谢　琪

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书分为上、下两册。 上册共七章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量代数。 本书在编写过程中以“注重应用”为原则，在例题和习题中增加了很多应用实例，涉及电力系统、化学工程、机械工程、生物工程、物理学、医学、经济学等多个领域。

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的高等数学教材或教学参考书，也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/曲如主编.--北京:高等教育出版社,2013.8

ISBN 978-7-04-038008-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曲… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第160044号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 徐 可　封面设计 李卫青　版式设计 童 丹
插图绘制 尹 莉　责任校对 孟 玲　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市骏杰印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.5	版　　次	2013年8月第1版
字　　数	340千字	印　　次	2013年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	27.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　38008-00

前言

随着我国高等教育已从“精英教育”走向“大众化教育”,广大高校正在探索如何更好地培养专业应用型、技术型人才,与此对应,在数学学科教学上也出现了一些值得关注的新情况和新问题。目前,大学一年级部分新生存在着数学基础薄弱,或对学习高等数学有畏难情绪,或感到学习高等数学无用,学习积极性不高。为了解决这一问题,我们认为,必须从现实情况出发,编写适宜的高等数学教材,以期更好地体现培养专业应用型、技术型人才目标。

高等数学是高等学校理工、经管等专业本科生的必修基础理论课,以微积分为主体的高等数学在自然科学、社会科学的众多领域有着广泛的应用,成为处理有关连续变量问题的工具。高等数学传授的不仅是数学知识,更是一种思维模式和数学文化,能培养学生抽象思维和逻辑思维,综合运用所学知识分析、解决问题的能力,为学生今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。

本书编写的指导思想是:基础理论以够用为度,删繁就简,突出基本概念、基本方法;加强基本能力的培养,注重实际应用;在论述形式上力求简明、通俗;在例题选择上力求实用、典型。教材编写中增加了很多应用实例,如与连续相关的应用实例、导数在变化率问题中的应用、微分在实际中的应用、函数的最值及其应用、定积分的应用、多元函数的最优化问题应用实例、常微分方程的应用、无穷级数的应用、多元数量函数积分的应用、向量函数积分的应用等。本书下册的结构体系和传统教材相比有较大变化,将多元函数积分学分为多元数量函数的积分学和向量函数的积分学两部分分别介绍,最后再介绍几类积分之间的联系,使知识更系统、更紧凑。

在习题安排方面,每节后面都安排比较全面的基础性习题与综合性习题,每章末都安排总复习题,在各节习题和各章总习题中适当编写一定数量的涉及面较广的实际应用题。书末附有部分习题答案与提示。

本书分为上、下两册。上册共七章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,空间解析几何与向量代数。下册共五章,内容包括多元函数微分学,多元数量函数的积分学,向

量函数的积分学，无穷级数，常微分方程。

本书由东北电力大学理学院高等数学课程组编写，由于编者水平有限，教材中存在不妥之处，恳请专家、同行和读者批评指正。

编者

2013年4月

目录

第一章

函数、极限与连续

17 世纪上半叶，人们在研究物体运动问题时，萌发了关于函数概念的认识，经过大约 20 年的努力，德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet，1805—1859）给出了函数的现代定义. 在数学的庞大家族中，主要以函数为研究对象的数学分支有“微积分学”、“实变函数论”、“复变函数论”等，而函数思想方法作为一种基本的数学观念已渗透到数学、自然科学、经济科学和管理科学等各个领域.

函数是近代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限方法是微积分的基本方法，其中函数极限贯穿高等数学的始终，是这门课程的基本推理工具；连续则是函数的一个重要性态，连续函数又是高等数学研究的主要对象之一. 本章将介绍函数、极限与连续的概念及其基本方法.

§1.1　函　　数

一、实数与区间

1. 实数

实数包括有理数和无理数（无限不循环小数）.

实数具有如下性质：

（1）有序性：任意两个互异的实数 a,b 都可以比较大小，或者 $a<b$，或者 $a>b$.

（2）完备性：因为任何两个有理点 a,b 之间都有一个有理点，从而它们之间有无穷多个有理点，我们说有理点处处稠密. 但有理点并未充满整个数轴，比如还有 $\sqrt{2}$、π 这样一些无理点. 因为有理数与无理数之和为无理数，所以无理点也处处稠密. 实际上，无理数比有理数多得多. 实数充满整个数轴，没有空隙，这就是实数的完备性.

为后面的叙述方便起见，我们重申中学学过的几个特殊的数集的记号：自然

数集记为 **N**,整数集记为 **Z**,有理数数集记为 **Q**,实数集记为 **R**.

2. 区间

区间是高等数学中常用的实数集,分为有限区间和无限区间两类.

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b),即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$(图 1-1-1).

类似地,有闭区间和半开半闭区间:

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

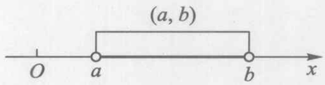
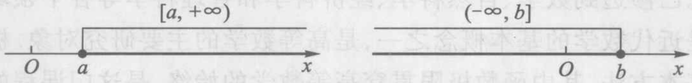


图 1-1-1

上述四种区间统称为有限区间,此外还有五种无限区间:

引入记号 $-\infty$(读作负无穷大)和 $+\infty$(读作正无穷大),类似地,无限区间表示如下:

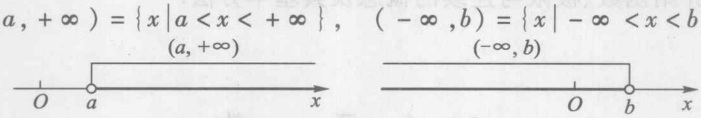
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$



(a) (b)

图 1-1-2

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$



(a) (b)

图 1-1-3

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$表示全体实数的集合 **R**.

本书中,当不需要特别明辨区间是否包含端点、是有限还是无限时,简称其为"区间",常用字母 I 表示.

二、邻域

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$,且 $\delta>0$,数集 $\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中,a 和 δ 分别称为该邻域的中心和半径. 如图 1-1-4.

如果再把这邻域的中心 a 去掉,就称它为 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

图 1-1-4

这里邻域的半径 δ 虽然没有规定其大小,但在使用中一般总是取为很小的正数. 并且大多数情形下

并不一定要指明 δ 的大小,这时我们往往把 a 的邻域和 a 的去心邻域分别简化为 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$.

三、函数的概念

1. 函数的定义

在具体研究某一自然现象或实际问题的过程中,我们还会发现问题中的变量并不是独立变化的,它们之间往往存在着相互依赖关系.

例 1 自由落体问题

一个物体做自由落体运动,从开始下落时算起物体经过的时间设为 t(s),在这段时间中物体经过的路程设为 s(m). 由于只考虑重力对物体的作用,而忽略空气阻力等其他外力的影响,从物理学知,s 与 t 之间有如下的依赖关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度. 如果物体从开始到着地所需的时间为 T,则变量 t 的变化范围为

$$0\leqslant t\leqslant T.$$

例 2 某化工公司统计去年农用化肥月生产量,如下表所示:

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量 x(万吨)	5.1	5.2	5.6	6.2	5.9	5.5	5.8	5.0	6.1	5.4	4.2	4.1

从上表可以看出,过去一年该公司月产量 x 与月份 t 之间有着确定的对应关系. 当月份 t 在 1 至 12 之间每取一整数值时,从表中便得出月产量 x 的唯一确定的对应值.

例 3 图 1-1-5 是气温自动记录仪描出的某一天的温度变化曲线,它给出了时间 t 与气温 T 之间的依赖关系. 时间 t(h) 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$,当 t 在这范围内任取一值时,从图 1-1-5 中的曲线可找出气温的对应值. 例如 $t=14$ 时,$T=25$ ℃ 为一天中的最高温度.

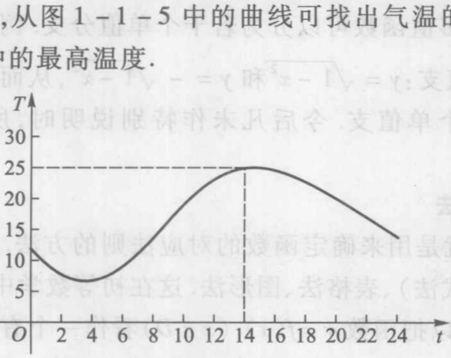


图 1-1-5

以上的例子所描述的问题都表达了两个变量之间的确定的相互依赖关系，我们把这种确定的相互依赖关系称为函数.

定义1 设 $D\subset\mathbf{R}$，且 $D\neq\varnothing$，f 是一个对应法则. 如果对于 $\forall x\in D$，变量 y 按照法则 f，总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

当 x 取遍 D 中的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合，称为函数 $f(x)$ 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

函数的定义域 D_f 与对应法则 f 称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则为不同.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域就是使算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为自然定义域. 如函数 $y=\dfrac{1}{x}$，它的定义域显然是指 $x\neq0$ 的一切实数；又如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为闭区间 $[-1,1]$. 另一种是有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定，如例1中物体做自由落体运动，开始下落时刻 $t=0$，落地时刻 $t=T$，则 s 与 t 之间的函数关系是函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，这个函数的定义域是区间 $[0,T]$.

在函数的定义中，对于 $\forall x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对于 $\forall x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如函数 $y=2x+1$ 是一个单值函数，而函数 $y^2=1-x^2$ 则是多值函数.

在一定条件下，多值函数可以分为若干个单值分支. 例如多值函数 $y^2=1-x^2$ 就可以分成两个单值支：$y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，从而把对多值函数的讨论转化为讨论它的各个单值支. 今后凡未作特别说明时，所论函数都是指单值函数.

2. 函数的表示法

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法. 表示函数的主要方法有三种：解析法（公式法）、表格法、图形法. 这在初等数学中大家已熟悉.

一般地，我们可以把函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 看作一个有序数对的集合：

$$C=\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式来表示,通常,称这种形式的函数为**分段函数**,下面介绍几个特殊的分段函数.

例 4　绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $f(D)=[0,+\infty)$,其图形如图 1-1-6 所示.

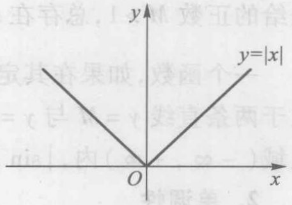


图 1-1-6

例 5　函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为**符号函数**,它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $f(D)=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1-1-7 所示.

对任意的 $x\in\mathbf{R}$,总有 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

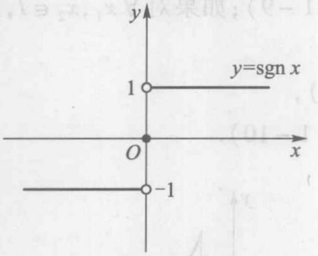


图 1-1-7

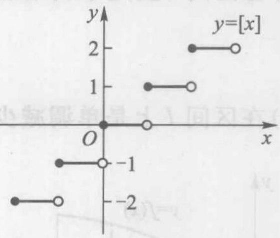


图 1-1-8

例 6　对 $\forall x\in\mathbf{R}$,不超过 x 的最大整数记作 $[x]$,称

$$f(x)=[x]=n(n\leqslant x<n+1,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

为**取整函数**. 例如,$[1.5]=1$,$[-1.5]=-2$,$[\sqrt{2}]=1$,$[0.5]=0$ 等. 取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $f(D)=\mathbf{Z}$,其图形为如图 1-1-8 所示的阶梯形曲线.

四、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在常数 K_1(或 K_2),使对一切 $x\in D$,有

$$f(x)\leqslant K_1\ (\text{或 } f(x)\geqslant K_2),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有上界(或有下界). 若存在正数 M,使对一切 $x\in D$,有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在,就称 $f(x)$ 在 D 上无界,即对任给的正数 M,总存在 $x_1 \in D$,使 $|f(x_1)| > M$.

函数的有界性与集合 D 有关. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界,因为存在 $M=1$,使对一切 $x\in[1,+\infty)$,有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 但它在 $(0,1)$ 内却是无界的,因为对任给的正数 $M>1$,总存在 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,使 $|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$.

一个函数,如果在其定义域上有界,就称它为有界函数. 有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 例如,$y=\sin x$ 是有界函数,因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内,$|\sin x|\leqslant 1$.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(如图 1-1-9);如果对 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(如图 1-1-10).

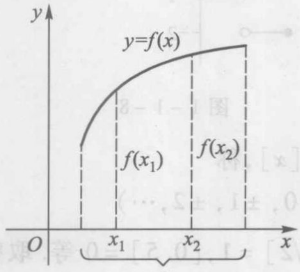


图 1-1-9

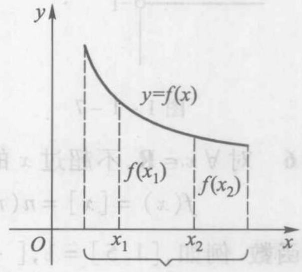


图 1-1-10

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**,如函数 $g(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少,在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加,但在 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调的.

3. 奇偶性

设 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 D 关于原点对称,如果对任意 $x\in D$,总有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;如果对任意 $x\in D$,总有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如 $f(x)=x^3$ 是奇函数，因为对 $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. 又如 $g(x)=x^2$ 是偶函数，因为对 $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x)$.

在坐标平面上，偶函数的图形关于 y 轴对称（如图 1-1-11），奇函数的图形关于原点对称（如图 1-1-12）.

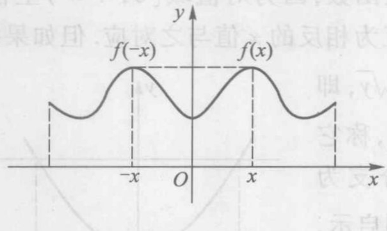


图 1-1-11

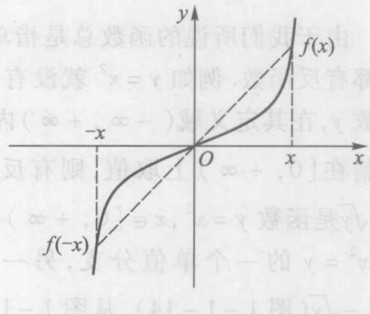


图 1-1-12

4. 周期性

设函数 $y=f(x), x\in D$. 若存在常数 $l\neq 0$，$x\pm l\in D$，总有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的一个周期. 显然，若 l 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $kl(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也都是它的周期. 所以一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常所谓周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如，函数 $y=x-[x]$（图 1-1-13）是周期函数，又如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数. 但并非任何周期函数都有最小正周期. 例如常函数 $f(x)=C$ 是周期函数，任何实数都是它的周期，因而不存在最小正周期. 周期函数 $f(x)$ 的图形在每个区间 $[x+kl, x+(k+1)l]$ 上都是一样的，其中 k 为整数，x 为 $f(x)$ 定义域内任意一点，且 $x+kl, x+(k+1)l$ 也在定义域内.

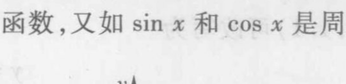


图 1-1-13

五、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 若对 $f(D)$ 中每一值 y，

D 中至少有一个值 x,使 $f(x)=y$,如果把 y 作为自变量,x 作为因变量,则上述关系可确定一个新函数,此函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(D), \tag{1.1.1}$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由定义可知,反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是它的直接函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 因此也可以说两者互为反函数.

例如,函数 $y=x^3$ 的反函数是 $x=\sqrt[3]{y}$,$y=\dfrac{1}{x}$ 的反函数是 $x=\dfrac{1}{y}$.

由于我们所说的函数总是指单值函数,在这个意义上,并不是任何一个函数都有反函数. 例如 $y=x^2$ 就没有(单值)反函数,因为对值域$[0,+\infty)$上任一正数 y,在其定义域$(-\infty,+\infty)$内有两个互为相反的 x 值与之对应. 但如果把 x 限制在$[0,+\infty)$上取值,则有反函数 $x=\sqrt{y}$,即 $x=\sqrt{y}$是函数 $y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$的反函数,称它为 $x^2=y$ 的一个单值分支,另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$(图 1-1-14). 从图 1-1-14 得到启示,若函数的图形与任一平行于 x 轴的直线至多有一个交点,则它有(单值的)反函数. 单调函数就具有这种特性.

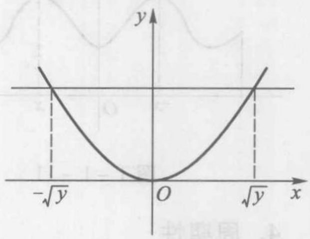


图 1-1-14

定理 1 单调增加(减少)函数必有反函数,且反函数也是单调增加(减少)的.

由于函数的确定在于它规定的对应法则,而与变量记号的使用无关,因此按照通常的习惯,若以 x 记自变量,y 记因变量,则 $y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数(1.1.1)可改写为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D). \tag{1.1.2}$$

不难说明,在同一坐标平面内,$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线$y=x$ 对称的(图 1-1-15).

设 $P(a,b)$ 为 $y=f(x)$ 的图形上任一点,则 $b=f(a)$,随之有 $a=f^{-1}(b)$,即是说,在$y=f^{-1}(x)$ 的图形上必有一点 $Q(b,a)$ 与 $P(a,b)$ 对应,反之亦然. 经过 P、Q 两点的直线斜率为 $k=\dfrac{a-b}{b-a}=-1$,它与直线 $y=x$ 的斜率互为负倒数,且线段 PQ 的中点 $M\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2}\right)$在直线 $y=x$ 上,由此

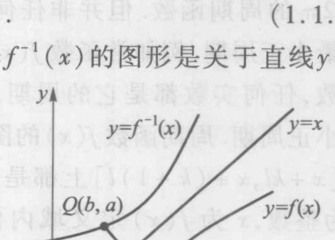


图 1-1-15

推出直线 $y=x$ 垂直且平分线段 PQ. 换言之, P、Q 两点对称于直线 $y=x$, 从而证明了我们的断言.

例 7 求函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$ 的反函数. 并讨论当 a、b、c、d 满足什么条件时, 这个反函数与直接函数相同?

解 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, 得

$$(cx+d)y=ax+b,$$

或 $(cy-a)x=-dy+b$, 所以

$$x=\frac{-dy+b}{cy-a}.$$

反函数是

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

考虑反函数与直接函数相同的条件, 当 $c=0$ 时, 它们的定义域均为一切实数. 为使两函数相同, 只要对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有

$$\frac{ax+b}{d}=\frac{-dx+b}{-a}.$$

由此推出 $a=-d$, 或 $b=0$ 且 $a=d\neq 0$.

当 $c\neq 0$ 时, 两函数仅当 $a=-d$ 时有相同的定义域, 这时对应法则亦相同.

综合可知, 当 $a=-d$, 或 $b=c=0$ 且 $a=d\neq 0$ 时, 这反函数与直接函数相同.

2. 复合函数

在实际问题中, 我们还经常遇到两个函数之间发生联系的情形. 例如, 在物体做自由落体运动中, 物体的动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2,$$

其中 m 为物体的质量. 我们又知道, 物体的速度 v 是时间 t 的函数

$$v=gt.$$

因此, 如果要研究动能与时间的关系, 就得把 $v=gt$ 代入 $E=\frac{1}{2}mv^2$, 结果是

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

由此看到 E 与 t 的对应关系是由两个函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 复合而成的. 一般地, 有

定义 3 已知两个函数