和学辅导丛书

高中代数（二）

中国青年出版社

北京师范大学中学教学研究中心　主编

中国青年出版社

封面设计：魏　杰

教和学辅导丛书
高中代数（二）
北京师范大学中学教学研究中心
*
中国青年出版社出版　发行
朝阳新华印刷厂分厂印刷　新华书店经销
*
787×1092　1/32　6.5 印张　140千字
1988年10月北京第1版　1988年10月朝阳第1次印刷
印数1—50,000册　定价：1.85元

目　录

前　言 ………………………………………………（1）
第一章　数列　极限　数学归纳法 ………………（3）
1.1　数列 ………………………………………（3）
1.2　等差数列 …………………………………（10）
1.3　等比数列 …………………………………（24）
1.4　数列的极限 ………………………………（39）
1.5　数学归纳法 ………………………………（54）
自我检查题一 ……………………………………（66）
第二章　不等式 ……………………………………（72）
2.1　不等式及其性质 …………………………（72）
2.2　不等式的证明 ……………………………（82）
2.3　解不等式 …………………………………（99）
自我检查题二 ……………………………………（111）
第三章　复数 ………………………………………（115）
3.1　复数的有关概念 …………………………（115）
3.2　复数四则运算及复数加减法的几何意义 …（123）
3.3　复数的三角形式 …………………………（140）
自我检查题三 ……………………………………（158）
第四章　排列　组合　二项式定理 ………………（162）
4.1　排列与组合 ………………………………（162）

4.2 二项式定理 …………………………………………（180）
自我检查题四…………………………………………（193）
模拟试题 …………………………………………（197）

前　言

为了更好地贯彻执行中学教学大纲的精神，按照教学大纲的要求进行教学改革，改进教学方法，提高教学质量，帮助广大中学师生努力达到教学大纲所规定的教学目标，使学生扎扎实实地学好基础知识，我们在张国栋、高建军等同志最初组织编写的中学各年级教学用书的基础上，主编了中学“教和学辅导丛书”．参加编写的都是全国一些著名中学有丰富教学经验的教师．

这套丛书紧密配合新编的中学课本，突出重点，注意方法、思路的分析，每本书的内容主要包括基本学习要求、重点知识分析、难点辨析、错例索因、例题和练习，以及课外活动资料等．它的主要特点是抓纲扣本，纲本结合；从教学实际出发，既有利于中学生掌握知识，发展能力，提高学习效果，也有助于中学教师剖析教材，精心备课，提高教学水平．但愿这套丛书能成为中学师生的良师益友．

丛书主编组由阎金铎、陈浩元、庄似旭、陶卫、乔际平同志组成．数学、物理、化学、外语4科的编委会由王绍宗、华跃义、胡炯涛、马明、孟学军、张国栋、高建军同志主持．政治科的编委会由阎金铎、张志建同志主持．

参加本书编写的同志有上海师范大学附属中学胡炯涛、陈竞如、沈安晖．

我们恳切地期望使用这套丛书的读者能提出宝贵建议，以便再版时修订完善，使它更好地为我国的中学教学改革服务。

北京师范大学中学教学研究中心

1988年3月1日

第一章　数列　极限　数学归纳法

本章的学习要求是：第一，理解数列的有关概念，掌握等差数列与等比数列的概念、通项公式、前n项和的公式，并能运用这些知识解决一些问题；第二，了解数列极限的意义，掌握极限的四则运算法则，会求公比的绝对值小于1的无穷等比数列前n项和的极根．第三，了解数学归纳法的原理，并能用数学归纳法证明一些简单问题．

1.1　数列

1.1.1　数列的定义

按一定次序排列着的一列数叫做数列．数列中的每一个数都叫做这个数列的项．因此，数列中的数是有次序的，1，3，5，7，9与9，7，5，3，1就是两个不同的数列．

在数列中，同一个数可重复出现，如1，2，2，3，3，3等．

数列中的每一项与一个序号一一对应，因此，可以把数列看成是定义在自然集N上的函数$f(n)$，数列的一般形式常记为a_1，a_2，…，a_n，…，简记为$\{a_n\}$，a_n表示数列的通项，它与$\{a_n\}$是不同的概念．另外，数列的项是指数列中某一个确定的数(函数值)，而项数是指项的序号（自变量）．

1.1.2 数列的通项公式

数列$\{a_n\}$的第n项a_n与项数之间的函数关系，若可用一个公式$a_n=f(n)$加以表示，则此公式叫做数列的通项公式．由通项公式可写出数列中的任意一项．有的数列写不出通项公式，例如10天中每天最高温度数构成的数列即不能用通项公式来表示．

有的数列的通项公式形式是不唯一的，例如数列-1，1，-1，1，-1，1…，即可写成$a_n=(-1)^n$，$a_n=\cos n\pi$或$a_n=\begin{cases}-1, & n\text{为奇数时}\\ 1, & n\text{为偶数时}\end{cases}$等3种形式，表示的是同一个数列．

若仅给出数列的前几项，则其通项公式形式不是唯一的．例如，1，3，5，7，…，这个数列的通项公式可以写成$a_n=(2n-1)+k(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ $(k\in R)$，当k取一切实数时，a_n得到无数个表达式．

数列的构成规律除通项公式外，还可以用递推关系给出，例如，$\{a_n\}$中，$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$即给出了有名的裴波那契数列：1，1，2，3，5，8，13，…．

1.1.3 数列的分类

数列可按其项数的有限与无限加以分类，此外还可以按任何一项绝对值是否都小于某一正数（有界性），或按数列中任何相邻两项的大小进行分类（增减性）．

1.1.4 由数列的前~项写出数列的通项公式

这是本节教材中的难点．应观察数列中各项与其序号的变化情况，分析数列前几项中经分解后变与不变的部分，再探求各项中变化部分与序号间的联系，从中找出规律，写出

通项公式．为此，对归纳推理能力提出了较高要求．

下面举例说明此类通项公式的求法．

例1 求下列数列的一个通项公式：

（1） $-\frac{1}{2}$， $\frac{1}{2}$， $-\frac{1}{2}$， $\frac{1}{2}$，….

（2） 0，1，0，1，0，1，….

（3） p，q，p，q，….

解 （1）数列各项的绝对值相等，且正负相间，可利用 $(-1)^n$ 的摆动性得 $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2}$.

（2）数列中各项0，1相间，各项减去奇数项与偶数项的平均值 $\frac{1}{2}$，则数列（2）即转化为（1）得：

$$a_n=\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{2}=\frac{1+(-1)^n}{2}.$$

（3）数列中奇数项为 p，偶数项为 q，将数列各项减去它们的平均值，则此数列转化为 $\frac{1}{2}(p-q)$，$-\frac{1}{2}(p-q)$，$\frac{1}{2}(p-q)$，$-\frac{1}{2}(p-q)$，…，据（2）得：

$$a_n=\frac{1}{2}(p+q)+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(p-q)$$

$$=\frac{1}{2}[(p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)].$$

一般地，设 $a_n=\begin{cases}f(n), & n\text{为奇数时,}\\ g(n), & n\text{为偶数时.}\end{cases}$

则 $a_n=\dfrac{[f(n)+g(n)]+(-1)^{n-1}[f(n)-g(n)]}{2}$.

例 2 求数列1，1，2，2，3，3，…的一个通项公式.

解 把数列各项作分解， $a_1=\frac{1+1}{2}$，$a_2=\frac{2+0}{2}$，$a_3=\frac{3+1}{2}$，$a_4=\frac{4+0}{2}$，…，其分子各项成一自然数列，后项的规律可由上题得知，即有 $a_n=\frac{n+\frac{1-(-1)^n}{2}}{2}=\frac{2n+1-(-1)^n}{4}$.

例 3 设数列$\{a_n\}$中，$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，求通项公式a_n.

解 与三角函数式联系起来考虑，$a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$，

$$a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3},$$

$a_3=\sqrt{2+a_2}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$，设$a_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$，则$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$，即推知$a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

上题实际上给出了$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$（$n$重根号）的三角表达式.

例 4 已知数列1×3，2×4，3×5，…，$n(n+2)$，问120是不是其中一项？若是，是第几项？

解 实际上是求方程$n(n+2)=120$的正整数解问题，显

然，$n=10$满足方程，所以120是数列的第10项．

例 5 已知数列的通项公式$a_n=\sin\left(\alpha+\frac{n\pi}{2}\right)$，再构造一个新数列$a_1a_2$，$a_3a_4$，$a_5a_6$，…，则这个数列是个常数列，这个判断正确吗？试加以验证．

解 推知数列的通项公式为a_na_{n+1}．

$$\because\ a_na_{n+1}=\sin\left(\alpha+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin\left[\alpha+\frac{(n+1)}{2}\pi\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2\alpha+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin(2\alpha+n\pi).$$

其值随n的变化而变化，所以$\{a_n\}$不是常数列．

上述解法对吗？不对．因为数列的通项公式实际上是$a_{2n-1}a_{2n}$，可以求得$a_{2n-1}a_{2n}=-\frac{1}{2}\sin2\alpha$，即数列$\{a_n\}$为常数列．

基础训练题

1．试写出满足下列条件的数列的前n项：

（1）正n边形每一个内角是$\frac{(n-2)\pi}{n}$弧度，依次计算正三角形、正四边形、正五边形……正n边形的每一个内角弧度数，得到的数列是____________________．

（2）把$-1/2$的1次幂、2次幂、3次幂、4次幂……依次排列得到的数列是____________________．

（3）函数$f(n)=n^2-(n+1)(n-1)$，自变量n依次取1，2，3，4，…，所得的数列是____________________．

(4) 函数$f(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$，自变量n依次取1，2，3，4，…，所得的数列是________。

2．已知下列数列，试写出其前4项：

(1) $\{a_n=n^2\}$；　　(2) $\left\{a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$；

(3) $\left\{a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right\}$；　　(4) $\left\{a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}\right\}$。

3．已知数列$\left\{a_n=\dfrac{n^2}{n^2+n-1}\right\}$，写出其前5项。$\dfrac{81}{88}$是不是数列的项？若是，是第几项？

能力训练题一

1．写出以下数列的一个通项公式：

(1) 15，25，35，45，55，65，…。

(2) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{7}{6}$，$\dfrac{8}{7}$，…

(3) $\dfrac{3}{1\times4}$，$\dfrac{4}{2\times5}$，$\dfrac{5}{3\times6}$，$\dfrac{6}{4\times7}$，$\dfrac{7}{5\times8}$，…。

(4) $-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$-\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{81}$，$-\dfrac{1}{243}$。

2．数列$\{a_n\}$．$\{b_n\}$的首项都是1，且符合规律$a_1+b_1=a_2$，$b_1+a_2=b_2$，$a_2+b_2=a_3$，$b_2+a_3=b_3$，…，求a_{n+1}与b_{n+1}的表达式，并求a_4与b_4。

3．求下列数列的一个通项公式：

(1) $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，…。

(2) 0．0，1，1，0，0，1，1，…．

4．写出数列a，a，a^2，a^2，a^3，a^3，…的一个通项公式．

答案或提示

基础题 1．(1) $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{5}$，…，$\frac{(n-2)\pi}{n}$，…．

(2) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…，$(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}$，…．

(3) 1，1，1，…，1，…．(4) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，…，$\frac{1}{n(n+1)}$，…．2．(1) 1，4，9，16．(2) -1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$．(3) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$．

(4) $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{24}$．　　3．1，$\frac{9}{10}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{25}{28}$，$\frac{9}{10}$；$\frac{81}{88}$是第8项（n从2开始）．

能力题 1．(1) $a_n=10n+5$．(2) $a_n=\frac{n+1}{n}$．

(3) $a_n=\frac{n+2}{n(n+3)}$．　(4) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}$．　2．$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$．$a_4=13$，$b_4=21$．　3．(1) $a_n=\frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$．　(2) $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$．　4．数列$a$，$a$，$a^2$，$a^2$，$a^3$，$a^3$，

…，设其各项指数为 a'_n，则 $a'_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & (n\text{为奇数}),\\ \dfrac{n}{2} & (n\text{为偶数}).\end{cases}$

$$\therefore\ a'_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}\right)+(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[(2n+1)+(-1)^{n+1}\right].\ \therefore\ a_n=a^{\frac{1}{4}[(2n+1)+(-1)^{n+1}]}$$

1.2 等差数列

1.2.1 概念辨析

等差数列的定义是本节教材的基础．定义中应注意“从第 2 项”起这一点，且每一项与它的前一项的差等于同一个常数，不能笼统地讲成“差为常数”．公差应注意相减的次序，是后项减前项之差．

由定义推知，若需证明一个数列是等差数列，只需证明对于任意自然数n，差$a_{n+1}-a_n$都是同一个常数即可．

等差数列的通项公式可写成$a_n=dn+(a_1-d)$，说明当$d\neq 0$时，a_n是关于n的一次式，故函数$f(n)=a_n$的图象是一条直线上n与自然数对应的点集，其斜率为d，在纵轴上的截距为a_1-d．

A是a，b的等差中项的充要条件是$2A=a+b$，等差中项又称为算术平均数，它为等差数列的判定提供了又一条途径．

若已知等差数列的首项为a_1，公差d及项数n，即可以用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$表示前$n$项之和；若已知其首项$a_1$，

公差d以及项数n，则可以用公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$求和．若已知$a_1$，$d$，$n$，$a_n$，$S_n$这5个量中的任意3个，就可以求出其余2个．

1.2.2 等差数列的某项、公差及项数

例 1 有4数成等差数列，4数的平方和等于94，第1数与第4数的积比第2数与第3数的积少18，求此4数．

解．为了计算方便，4数成等差数列可设为$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$的对称形式（相应地，3数成等差数列可设为$a-d$，a，$a+d$），则据条件有：

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=94.$$

$$\therefore\quad 4a^2+20d^2=94. \qquad ①$$

另有：

$$(a-3d)(a+3d)=(a-d)(a+d)-18.$$

$$\therefore\quad 8d^2=18,\ d^2=\frac{9}{4}.$$

$$\therefore\quad d=\pm\frac{3}{2}. \qquad ②$$

以②代入①得　$4a^2=49$，$a^2=\frac{49}{4}$，

$$\therefore\quad a=\pm\frac{7}{2}. \qquad ③$$

由②，③知所求4数为8，5，2，－1或1，－2，－5，－8．

例 2 等差数列$\{a_n\}$中，设$a_m=\alpha$，$a_n=\beta$，$m\neq n$，求a_{m+n}．

解 设公差为d，由$a_1+(m-1)d=\alpha$，$a_1+(n-1)d=\beta$，

且 $m \neq n$, $\therefore\ d=\dfrac{\alpha-\beta}{m-n}$, $a_1=\dfrac{(m-1)\beta-(n-1)\alpha}{m-n}$,

代入通项公式得：

$$a_{m+n}=\frac{(m-1)\beta-(n-1)\alpha}{m-n}+(m+n-1)\frac{\alpha-\beta}{m-n}$$

$$=\frac{m\alpha-n\beta}{m-n}.$$

例 3 两个等差数列 5，8，11，…和 3，7，11，…都有100项，问它们共有几个共同的项？

解 两个数列的通项公式分别为 $a_n=5+(n-1)\times 3$ $(n=1,2,\cdots,100)$ 及 $b_m=3+(m-1)\times 4$ $(m=1,2,\cdots,100)$. 令 $a_n=b_m$, $n=\dfrac{4}{3}(m-1)$. 由 $1\leqslant\dfrac{4}{3}(m-1)\leqslant 100$, 得 $\dfrac{3}{2}\leqslant m\leqslant 75\dfrac{3}{4}$, 而 n 必为 3 的倍数，$\therefore m=3,6,\cdots,75$, 由 $75=3+3(k-1)$ 得 $k=25$, 所以有25个共同的项.

例 4 设有等差数列110，116，122，…，试问该数列在450和600之间有几项？

解 先求出数列的通项，后由 $450<a_n<600$ 求出 n 的范围，进而求得项数. $\because$ 公差 $d=116-110=6$, $\therefore 110+6(n-1)=6n+104$. 由 $450<110+6(n-1)<600$ 及 $n\in N$ 解得 $58\leqslant n\leqslant 82$, 说明数列在450和600之间的最初一项是 a_{58}, 最末一项是 a_{82}, 即知其间的项数为 $82-58+1=25$（项）.

例 5 在等差数列 2，5，8，…，$(3n-1)$ 中，每相邻两项间插入 3 个等差中项构成新数列，问：（1）原数列