



文登教育

Wendeng Education

2014

理工社®

文登培训学校策划

陈文灯◆主编

◆附赠真题线路图，考点一目了然！**数学(一)**

考研数学 十年真题点评

◆立足真题 把握规律 ◆名师亲笔 点评独到

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



文登教育

Wendeng Education

201

文登培训子仪系列

陈文灯◆主编

数学(一)

◆附赠真题线路图, 考点一目了然!

考研数学 十年真题点评

◆立足真题 把握规律 ◆名师亲笔 点评独到

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题点评. 数学一/陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社, 2013. 4
ISBN 978 - 7 - 5640 - 7580 - 4

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 IV. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 064870 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 12

字 数 / 227 千字

版 次 / 2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 25.00 元

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将2004—2013年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学十年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明的语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖的方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

希望读者在使用本书时,不要轻易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下工夫做完最近十年的数学考研真题,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上、在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而能更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在以往的基础上,我们作了认真的修订,增加了新的内容(如增加了考题路线图),使得它更适合广大考研朋友复习使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2013年3月

近 10 年考题路线图

(2004 年—2013 年)

注：“一(1),2004”表示 2004 年第一大题第 1 小题,其中一()、二()为客观题,其他为解答题。(10 年考题总数 231 题,总分值 1500 分,其中 2007 年为 24 题)

第一部分 高等数学

(10 年考题总数:131 题,总分值:844 分。占三部分题量之比重:57%;占三部分分值之比重:56%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:13 题,总分值:77 分。占第一部分题量之比重:9.9%;占第一部分分值之比重:9.1%)

题型 1 求 1^∞ 型极限(一(1),2010;三(15),2011)

题型 2 求 $0/0$ 型极限(一(1),2006;三(15),2008;一(1),2013)

题型 3 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明

题型 4 无穷小的比较或确定无穷小的阶(二(7),2004;一(1),2007;一(1),2009)

题型 5 数列敛散性的判定或数列极限求解(三(16),2006;一(5),2007;一(4),2008;一(4),2010,三(18),2011)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:24.5 题,总分值:162 分。占第一部分题量之比重:18.7%;占第一部分分值之比重:19.2%)

题型 1 与函数导数或微分概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(4),2007;一(2),2012)

题型 2 函数可导性或导函数的连续性的判定(二(7),2005)

题型 3 求反函数的导数

题型 4 求隐函数、参数方程的导数(二(9),2010;二(9),2013;二(11),2013)

题型 5 函数极值点、拐点的判定或求解(三(16),2010;一(1),2011)

题型 6 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(一(1),2004;二(10),2008;三(18(I)),2012)

题型 7 函数单调性的判断或讨论(二(8),2004)

题型 8 不等式的证明或判定(三(15),2004;三(15),2012)

题型 9 在某一区间至少存在一个点或两个不同的点使某个式子成立的证明(三(18),

2005;三(19),2007;三(18),2009;三(18),2013)

题型 10 方程根的判定或唯一性证明(三(18),2004;一(1),2008;三(17),2011)

题型 11 曲线的渐近线的求解或判定(一(1),2005;一(2),2007;一(1),2012)

第三章 一元函数积分学

(10年考题总数:18题,总分值:104分。占第一部分题量之比重:13.7%;占第一部分分值之比重:12.3%)

题型 1 求不定积分或原函数(一(2),2004)

题型 2 函数与其原函数关系的判定或性质的比较(二(8),2005;三(18),2008;一(3),2009)

题型 3 求定积分(三(17),2005;二(11),2007;二(10),2010;二(10),2012;三(18(II)),2012)

题型 4 定积分的比较(一(3),2007;三(17),2010;一(4),2011;一(4),2012)

题型 5 求变上限积分的导数(二(10),2004;三(15),2013)

题型 6 求反常积分或反常积分收敛性的判别(一(3),2010;二(12),2013)

题型 7 定积分的应用(曲线的弧长,面积,旋转体的体积,变力做功等)(三(17(II)),2009;二(9),2011)

第四章 常微分方程

(10年考题总数:12.5题,总分值:67分。占第一部分题量之比重:9.5%;占第一部分分值之比重:7.9%)

题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(一(2),2005;一(2),2006;三(18(II)),2006;二(9),2008)

题型 2 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(二(13),2007;二(10),2009;三(15),2010;二(10),2011;二(9),2012;二(10),2013)

题型 3 已知二阶线性齐次或非齐次微分方程的通解或特解,反求微分方程(一(3),2008)

题型 4 求欧拉方程的通解或特解(一(4),2004)

题型 5 常微分方程的物理应用(三(16),2004)

第五章 向量代数和空间解析几何

(10年考题总数:2题,总分值:14分。占第一部分题量之比重:1.5%;占第一部分分值之比重:1.7%)

题型 1 求点到平面的距离(一(4),2006)

题型 2 求直线绕坐标轴的旋转曲面方程(三(17(I)),2009;三(19(I)),2013)

第六章 多元函数微分学

(10年考题总数:17.5题,总分值:118分。占第一部分题量之比重:13.4%;占第一部分分值之比重:14%)

题型 1 多元复合函数的偏导的判定或求解(二(9),2005;三(18(I)),2006;二(12),2007;二(9),2009;一(2),2010;二(11),2011)

题型 2 多元隐函数的偏导的求解或判定(二(10),2005)

题型 3 多元函数连续、可导与可微的关系(一(3),2012)

题型 4 求曲面的切平面或法线方程(一(2),2013)

题型 5 多元函数极值的判定或求解(三(19),2004;二(10),2006;三(15),2009;一(3),2011;三(16),2011;三(17),2013)

题型 6 求多元函数的最值(三(17),2007;三(17),2008;三(16),2012)

第七章 多元函数积分学

(10年考题总数:29.5题,总分值:194分。占第一部分题量之比重:22.5%;占第一部分分值之比重:23%)

题型 1 求二重积分(三(15),2005;三(15),2006;三(19),2011)

题型 2 二重积分的比较(一(2),2009)

题型 3 交换二重积分的积分次序(二(8),2006)

题型 4 求三重积分(二(12),2009)

题型 5 求对弧长的曲线积分(二(11),2009;三(19),2012)

题型 6 求对坐标的曲线积分(一(3),2004;三(19),2006;一(6),2007;三(16),2008;二(11),2010;二(12),2011;一(4),2013)

题型 7 求对面积的曲面积分(二(14),2007;二(12),2012)

题型 8 求对坐标的曲面积分(三(17),2004;一(4),2005;一(3),2006;三(18),2007;二(12),2008;三(19),2009;三(19),2010)

题型 10 与曲线积分相关的判定或证明(三(19(I)),2005)

题型 11 求曲线积分中被积函数中的未知函数的表达式(三(19(II)),2005)

题型 12 求函数的方向导数,求梯度、散度或旋度(一(3),2005;一(2),2008;二(11),2012)

题型 13 重积分的物理应用题(转动惯量、重心、形心等)(二(12),2010;三(19(II)),2013)

第八章 无穷级数

(10年考题总数:14题,总分值:108分。占第一部分题量之比重:10.7%;占第一部分分值之比重:12.8%)

题型 1 无穷级数敛散性的判定(二(9),2004;二(9),2006;一(4),2009)

题型 2 求无穷级数的和(三(16),2005;三(20),2007;三(16),2009;三(16),2013)

题型 3 求函数的幂级数展开或收敛域或判断其在端点的敛散性(三(17),2006;二(11),2008;三(18),2010;一(2),2011;三(17),2012)

题型 4 求函数的傅里叶系数或函数在某点的展开的傅里叶级数的值(三(19),2008;一(3),2013)

第二部分 线性代数

(10年考题总数:50题,总分值:328分。占三部分题量之比重:21.6%;占三部分分值之比重:21.9%)

第一章 行列式

(10年考题总数:3.8题,总分值:21分。占第二部分题量之比重:7.7%;占第二部分分值之比重:6.4%)

题型1 求矩阵的行列式(一(5),2004;一(5),2005;一(5),2006;三(20(I)),2012;三(21(I)),2008)

第二章 矩阵

(10年考题总数:13.5题,总分值:63分。占第二部分题量之比重:27%;占第二部分分值之比重:19.2%)

题型1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(一(5),2008)

题型2 矩阵的秩的计算或证明(二(15),2007;三(20),2008;一(5),2010;二(13),2012;三(21(I)),2012)

题型3 有关矩阵的伴随矩阵(一(6),2009;二(13),2013)

题型4 初等矩阵与初等变换的关系的判定(二(11),2004;二(12),2006;一(5),2011)

题型5 两个矩阵关系(等价、相似或合同等)的判定(二(12),2005;一(8),2007;一(6),2013)

第三章 向量

(10年考题总数:9.5题,总分值:48分。占第二部分题量之比重:19%;占第二部分分值之比重:14.6%)

题型1 向量组线性相关性的判定或证明(二(12),2004;二(11),2005;二(11),2006;一(7),2007;三(20(II)),2009;三(20),2011;一(5),2012;一(5),2013)

题型2 根据向量的线性相关性判断空间位置关系或逆问题(二(13),2010)

题型3 求过渡矩阵(一(5),2009)

第四章 线性方程组

(10年考题总数:9题,总分值:87分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:26.5%)

题型1 齐次线性方程组基础解系的求解或判定(一(6),2011)

题型2 求线性方程组的通解(三(20(III)),2005;三(20(I)),2009)

题型3 讨论含参数的线性方程组的解(三(20),2004;三(21),2005;三(21),2007;三(21)(II)(III),2008;三(20),2010;三(20),2013)

题型4 根据含参数的方程组的解,反求参数或其他(三(20),2006;三(20(II)),2012)

题型5 两个线性方程组的解的关系

题型6 直线的方程和位置关系的判定

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10年考题总数:8.5题,总分值:61分。占第二部分题量之比重:17%;占第二部分分值之比重:18.6%)

题型1 求矩阵的特征值或特征向量(三(21(I)),2006;二(13),2008;二(13),2009;三

(21(I)), 2009; 三(21, (I)), 2011)

题型 2 已知一个矩阵的特征值或特征向量, 求与其相关的矩阵的特征值、特征向量或其他问题(三(22), 2007; 三(21(II)), 2011)

题型 3 将矩阵对角化或判断矩阵是否可对角化(三(21), 2004; 三(21(II)), 2006; 一(6), 2012)

题型 4 相似矩阵的求解或判定或其逆问题(一(6), 2010)

第六章 二次型

(10年考题总数: 5.7题, 总分值: 48分。占第二部分题量之比重: 11.3%; 占第二部分分值之比重: 14.6%)

题型 1 化实二次型为标准形或求相应的正交变换(三(20(II)), 2005; 三(21(II)), 2012; 三(21), 2013)

题型 2 已知含参数的二次型的标准形或秩, 反求参数或正交矩阵(三(20(I)), 2005; 三(21(I)), 2010; 二(13), 2011)

题型 3 二次型方程与二次曲面的关系(一(6), 2008)

题型 4 与矩阵的规范型相关的命题(三(21(II)), 2009)

题型 5 判断或证明矩阵为正定矩阵(三(21(II)), 2010)

第三部分 概率论与数理统计

(10年考题总数: 50题, 总分值: 328分。占三部分题量之比重: 21.6%; 占三部分分值之比重: 21.9%)

第一章 随机事件和概率

(10年考题总数: 4题, 总分值: 16分。占第三部分题量之比重: 8%; 占第三部分分值之比重: 4.9%)

题型 1 求随机事件的概率(一(6), 2005; 一(9), 2007)

题型 2 随机事件的运算(二(13), 2006; 二(14), 2012)

第二章 随机变量及其分布

(10年考题总数: 10.3题, 总分值: 55分。占第三部分题量之比重: 20.6%; 占第三部分分值之比重: 16.8%)

题型 1 根据概率反求或判定分布中的参数(二(14), 2006; 一(8), 2010)

题型 2 一个函数为某一随机变量的分布函数或分布密度的判定(一(7), 2011; 三(23(I)), 2012)

题型 3 已知一维随机变量的分布, 求概率(一(6), 2004; 二(14), 2008; 一(7), 2010; 三(22(I)), 2012; 一(7), 2013; 二(14), 2013)

题型 4 求一维随机变量函数的分布(三(22(I)), 2006; 三(22), 2013)

第三章 二维随机变量及其分布

(10年考题总数:13.7题,总分值:97分。占第三部分题量之比重:27.2%;占第三部分分值之比重:29.6%)

- 题型1 求二维离散型随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布(三(22(I)), 2004;二(13),2005;三(22),2005;三(22(II)),2009;三(22(I)),2011)
- 题型2 求二维随机变量的条件概率或条件密度函数(一(10),2007;三(22(I)),2008;三(22(I)),2009;三(22),2010)
- 题型4 已知二维随机变量的分布,求概率(一(6),2006;三(22(II)),2006;二(16),2007;三(23(I)),2007;一(7),2012)
- 题型5 求两个随机变量函数的概率分布(三(23(II)),2007;一(7),2008;三(22(II)),2008;一(8),2009;三(22(II)),2011)

第四章 随机变量的数字特征

(10年考题总数:8.3题,总分值:43分。占第三部分题量之比重:16.6%;占第三部分分值之比重:13.1%)

- 题型1 求一维随机变量的数学期望或方差或二阶中心矩(一(7),2009;二(14),2010)
- 题型2 求一维随机变量函数的数学期望或方差(一(8),2011;二(14),2011)
- 题型3 两个随机变量的协方差或相关系数的求解或判定(二(14),2004;三(22(II)),2004;一(8),2008;三(22(III)),2011;一(8),2012;三(22(II)),2012)

第五章 数理统计的基本概念

(10年考题总数:3题,总分值:12分。占第三部分题量之比重:6%;占第三部分分值之比重:3.7%)

- 题型1 分位数的求解或判定(二(13),2004)
- 题型2 总体或统计量的分布函数的判定或求解(二(14),2005;一(8),2013)

第六章 参数估计与假设检验

(10年考题总数:10.7题,总分值:105分。占第三部分题量之比重:21.2%;占第三部分分值之比重:32%)

- 题型1 求参数的矩估计量或矩估计值或估计量的数字特征(三(23(I)),2004;三(24(I)),2007;三(23(I)),2009;三(23(I)),2013)
- 题型2 求参数的最大似然估计量或估计值或估计量的数字特征(三(23(II)),2004;三(23),2006;三(23(II)),2009;三(23),2011;三(23(II)),2012;三(23(II)),2013)
- 题型3 与无偏性、一致性或有效性有关的命题(三(24(II)),2007;三(23(I)),2008;二(14),2009;三(23(I)),2010;三(23(III)),2012)
- 题型4 求统计量的数学期望或方差或两个统计量的协方差(三(23),2005;三(23(II)),2008;三(23(II)),2010)
- 题型5 求单个正态总体均值的置信区间

目 录

第一篇 2004—2013 年考研数学一试题

2013 年考研数学一试题	(1)
2012 年考研数学一试题	(4)
2011 年考研数学一试题	(7)
2010 年考研数学一试题	(10)
2009 年考研数学一试题	(13)
2008 年考研数学一试题	(17)
2007 年考研数学一试题	(20)
2006 年考研数学一试题	(24)
2005 年考研数学一试题	(28)
2004 年考研数学一试题	(32)

第二篇 2004—2013 年考研数学一试题分类解析

第一部分 高等数学	(35)
第一章 函数、极限、连续	(35)
第二章 一元函数微分学	(42)
第三章 一元函数积分学	(55)
第四章 常微分方程	(66)
第五章 向量代数与空间解析几何	(72)
第六章 多元函数微分学	(73)
第七章 多元函数积分学	(85)
第八章 无穷级数	(103)
第二部分 线性代数	(114)
第一章 行列式	(114)
第二章 矩阵	(116)
第三章 向量	(122)
第四章 线性方程组	(127)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(137)
第六章 二次型	(144)
第三部分 概率论与数理统计	(150)
第一章 随机事件和概率	(150)
第二章 随机变量及其分布	(153)
第三章 多维随机变量及其分布	(157)
第四章 随机变量的数字特征	(169)
第五章 数理统计的基本概念	(174)
第六章 参数估计与假设检验	(176)

第一篇 2004—2013 年考研数学一试题

2013 年考研数学一试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数,且 $c \neq 0$, 则 P36, 4 题

(A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$. (B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$.

(C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$. (D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$. 【 】

(2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 P79, 14 题

(A) $x - y + z = -2$. (B) $x + y + z = 0$.

(C) $x - 2y + z = -3$. (D) $x - y - z = 0$. 【 】

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$,

则 $S\left(-\frac{9}{4}\right) =$ P111, 13 题

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $-\frac{1}{4}$. (D) $-\frac{3}{4}$. 【 】

(4) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记 $I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

P92, 16 题

(A) I_1 . (B) I_2 . (C) I_3 . (D) I_4 . 【 】

(5) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 P124, 6 题

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价. 【 】

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 P149, 9 题

(A) $a = 0, b = 2$. (B) $a = 0, b$ 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$. (D) $a = 2, b$ 为任意常数. 【 】

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$, $P_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i = 1, 2, 3)$, 则 P155, 6 题

(A) $P_1 > P_2 > P_3$.

(B) $P_2 > P_1 > P_3$.

(C) $P_3 > P_1 > P_2$.

(D) $P_1 > P_3 > P_2$. 【 】

(8) 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$ P174, 3 题

(A) α .

(B) $1 - \alpha$.

(C) 2α .

(D) $1 - 2\alpha$. 【 】

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在题中横线上)

(9) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.

P44, 7 题

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解 $y =$ _____.

P69, 9 题

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

P44, 5 题

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$ _____.

P63, 15 题

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

P117, 2 题

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} =$ _____.

P155, 7 题

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

P61, 13 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明: $S'(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

P109, 10 题

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y}$ 的极值.

P84, 21 题

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

P52, 23 题

(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0), B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω .

(I) 求曲面 Σ 的方程;(II) 求 Ω 的形心坐标.

P100, 28 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

P134, 9 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2 + y_2^2$.

P148, 7 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2 & X \leq 1 \\ X & 1 < X < 2 \\ 1 & X \geq 2 \end{cases}$.

(I) 求 Y 的分布函数;(II) 求概率 $P(X \leq Y)$.

P155, 8 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots

X_N , 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;(II) 求 θ 的最大似然估计量.

P182, 10 题

2012 年考研数学一试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的.请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 P49, 17 题

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ P43, 3 题

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$. 【 】

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 P73, 1 题

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在. 【 】

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有 P61, 12 题

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$. 【 】

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. P124, 7 题

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q =$

$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ P143, 8 题

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. 【 】

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$ P162, 7 题

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$. 【 】

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 P172, 9 题

(A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1. 【 】

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在题中横线上)

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____ . P69, 8 题

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx$ _____ . P57, 6 题

(11) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)}$ _____ . P79, 13 题

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____ .

P88, 7 题

(13) 设 α 为三维单位向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 _____ .

P121, 11 题

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(ABC) =$ _____ .

P151, 4 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$, $-1 < x < 1$. P50, 19 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值. P81, 17 题

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数. P109, 9 题

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) >$

$0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积. P86, 2 题

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到

点(0,2)的曲线段,计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

P92,15 题

(20)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 计算行列式 $|\mathbf{A}|$;(II) 当实数 a 为何值时,线性方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

P133,8 题

(21)(本题满分 11 分)

$$\text{已知 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} \text{ 的秩为 } 2.$$

(I) 求实数 a 的值;(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 将 f 化为标准形.

P147,6 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求:(I) $P(X = 2Y)$;(II) $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

P172,10 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$, 设 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;(II) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

P181,9 题