

清华大学“985”名优教材立项资助  
清华大学土木工程系列教材

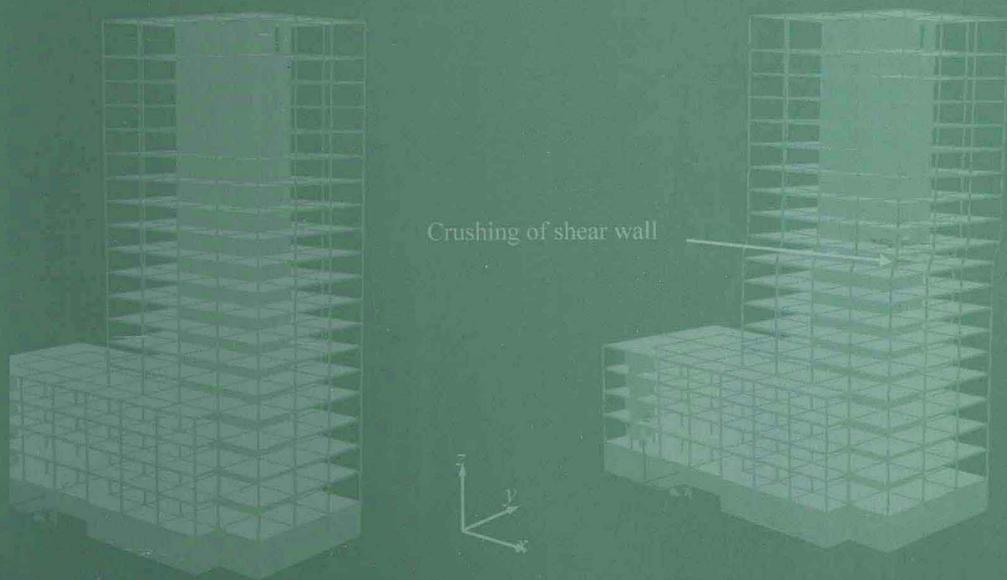
# 混凝土结构有限元分析

## 第2版

### Finite Element Analysis of Concrete Structures

江见鲸 陆新征 编著

Jiang Jianjing Lu Xinzheng



清华大学出版社

清华大学土木工程系列教材

# 混凝土结构有限元分析

## 第2版

### Finite Element Analysis of Concrete Structures

江见鲸 陆新征 编著



清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

《混凝土结构有限元分析》是在十余年的教学基础上编写而成的,为清华大学研究生精品教材之一。本书的特点是理论性和实用性并重。全书共分10章,不仅系统、深入地介绍了钢筋混凝土结构有限元分析的基本理论和方法,同时还介绍了一些新的数值分析方法,此外还介绍了混凝土单元的建模技巧和分析方法。内容具体包括应力与应变分析、混凝土的破坏准则、混凝土材料的本构关系、钢筋混凝土有限元模型、混凝土的断裂与损伤、非线性方程的求解、杆系有限元模型其他数值方法、常用有限元程序中的混凝土模型等内容。

本书既可作为高等院校土建类专业的研究生和高年级本科生的教材,也可作为广大土建科研人员、技术人员的参考图书。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

混凝土结构有限元分析 / 江见鲸, 陆新征编著. --2版. --北京: 清华大学出版社, 2013

清华大学土木工程系列教材

ISBN 978-7-302-32427-0

I. ①混… II. ①江… ②陆… III. ①混凝土结构—有限元分析—高等学校—教材 IV. ①TU37

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第105130号

责任编辑: 周莉桦 张占奎

封面设计: 陈国熙

责任校对: 刘玉霞

责任印制: 王静怡

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦A座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈: 010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印刷者: 三河市君旺印装厂

装订者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 26 字 数: 626千字

版 次: 2005年3月第1版 2013年6月第2版 印 次: 2013年6月第1次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 58.00元

产品编号: 050105-01

# 第2版前言

本书从第一版至今,作者非常欣喜地看到混凝土结构有限元分析近年来得到了很大的发展。在科研单位和高校,混凝土结构有限元分析已经成为科研工作者和研究生开展混凝土结构研究的必备手段和工具。几乎所有从事混凝土结构研究的博士、硕士论文都有相应的混凝土结构有限元分析的内容。在工程领域中,混凝土结构有限元分析也得到了广泛应用。自2002年版《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002)给出混凝土的应力应变全曲线和强度准则后,在2010年版《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)中又得到进一步完善和丰富,为混凝土结构有限元分析的推广奠定了重要的规范基础。与此同时,随着我国大量超高、超长、超限建筑的出现,特别是超高层建筑近年来的迅猛发展,建筑抗震弹塑性分析也成为工程设计的主要内容。而混凝土结构的有限元计算,是建筑抗震弹塑性分析的核心要素之一。此外,为了满足科学研究和工程实践的需求,混凝土结构有限元分析的软件技术也得到了迅速发展,市场上主流的结构非线性计算软件,都提供了相应的混凝土结构有限元分析的功能,有力地推动了混凝土结构有限元分析的应用。广大科研人员和工程技术人员的创造和探索,使混凝土结构有限元分析的理论 and 实践都得到了极大的丰富和深化。

本书第一版发行后,受到广大读者的关注和支持,也收到了很多宝贵的意见。随着混凝土有限元理论和方法的快速发展,《混凝土结构有限元分析》也需要适应地调整以满足广大读者的需要。因此,根据近年来的最新发展以及读者的需求,本版在以下方面进行了修改和补充:①重新撰写了杆系有限元的内容,以更好适应当前建筑抗震弹塑性分析的需要;②修改并完善了非线性方程组的解法,补充了拟牛顿法、应力调整算法等最新的非线性方程组求解方法;③补充了2010年版《混凝土结构设计规范》中规定的应力-应变关系、钢筋-混凝土界面粘结滑移关系、微平面模型、扩展有限元方法(XFEM)等最新学科发展内容;④增加了微平面本构模型等新的教学程序范例;⑤删去一些应用较少的内容,使全书的内容更加精练,也更加突出混凝土结构有限元分析的最新进展;⑥根据国家有关标准规范的要求,对全书的公式和符号做了进一步完善和修订。

本书第一版是清华大学江见鲸教授多年宝贵的科研教学经验积累,

广大读者因此受益。虽然江见鲸教授已经在五年前永远地离开了我们,但在再版编写过程中我们仍然沿循江见鲸教授当年拟定的框架,加以完善、丰富,希望以我们微薄的努力,纪念江见鲸教授为混凝土结构有限元分析学科做出的开拓性贡献。

参与相关研究工作的,还有清华大学叶列平教授、博士后许镇、博士研究生卢啸、硕士研究生李梦珂、贾翔夫,北京工业大学李易博士、闫秋实博士等,在此也表示衷心的感谢。

本书的编写工作,得到了国家自然科学基金优秀青年基金(51222804)、国家科技支撑计划课题(2013BAJ08B02)、教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0528)、霍英东教育基金(131071)等课题的支持,特此致谢!清华大学“985三期”名优教材建设项目,“质量工程”国家级特色专业点建设项目,清华大学研究生精品课程建设项目,以及清华大学出版社也为本书的编写提供了大力支持。清华大学力学实践教学中心力学计算与仿真实验室为本书编写提供了宝贵的上机实践条件,在此也表示衷心的感谢!

由于作者水平有限,混凝土结构有限元分析发展又很快,书中难免有不足之处,热忱欢迎读者批评指正。

陆新征

2013年1月于清华园

# 第 1 版前言

清华大学土木水利学院为研究生开设“钢筋混凝土有限元分析”课程已有十余年了。在 2002 年,清华大学研究生院在全校遴选了若干研究生课程作为精品课程建设,并给予适当资助。本书便是第一批精品课程建设的成果之一。本书的主要目的是为研究生进行土建结构的非线性分析打下坚实的基础,既注意到了力学分析上的严格性,又侧重工程结构应用上的实用性。本书是在原有教材的基础上进行扩充、改编而成,在编写中努力吸取了国内外的一些最新成果。

本书主要包括混凝土的破坏准则和本构关系,钢筋混凝土结构有限元分析模型,非线性方程求解的实用方法,包括结构出现负刚度时的一些算法。为适应混凝土学科研究的发展需要,本书还专门编写了混凝土的断裂与损伤,混凝土结构分析的新数值方法,例如离散单元法,刚体弹簧元法,无网格法等。由于大型通用有限元分析程序(例如 ANSYS, MSC. MARC 和 ABAQUS 等)的应用日益广泛,本书还专门介绍了应用这些程序对混凝土单元进行建模和分析的有关技巧。

本书的编写分工为:江见鲸编写 1~7 章,叶列平编写第 8 章,陆新征编写第 9,10 章,扩写第 6,8 章,并负责全书程序的调试。全书经过共同讨论、修改,最后由江见鲸统一定稿。

在本书的编写过程中,清华大学研究生院曾组织专家审查,对本书的编写提出了很多宝贵意见。本书的出版得到清华大学出版社的大力支持。在本书出版之际,对清华大学研究生院和清华大学出版社表示衷心感谢。

由于作者水平有限,有限元数值分析方法发展又很快,书中难免有不足之处,热忱欢迎读者批评指正。

# 主要符号表

$A$	杆件截面面积或单元面积
$B$	几何矩阵
$COD$	裂缝张开位移
$D$	损伤力学中的损伤因子
$D$	本构矩阵
$D_{ep}$	弹塑性矩阵
$D_f$	混凝土开裂后的本构矩阵
$E$	弹性模量
$E_0$	初始弹性模量
$E_s$	割线模量或钢筋弹性模量
$E_t$	切线模量
$E_c$	混凝土弹性模量
$F(\cdot)$	破坏面或屈服面函数
$G$	剪切模量或断裂力学中的能量释放率
$G_f$	断裂能
$H'$	硬化弹塑性理论中的硬化参数
$I$	杆件截面惯性矩
$I_1, I_2, I_3$	应力张量的第 1、第 2、第 3 不变量
$J_1, J_2, J_3$	偏应力张量的第 1、第 2、第 3 不变量
$K$	体积模量或断裂力学中的应力强度因子
$K^e$	单元刚度矩阵
$K$	结构刚度矩阵
$K_c$	混凝土刚度矩阵
$K_s$	钢筋刚度矩阵
$K_I, K_{II}, K_{III}$	I 型、II 型、III 型裂缝的应力强度因子
$K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$	混凝土 I 型、II 型、III 型裂缝的断裂韧度
$M$	杆件弯矩
$N$	杆件轴力
$P$	外荷载, 作用力
$R$	结构或构件的抗力
$S$	作用效应或荷载效应

$T$	坐标转换矩阵
$U$	应变能
$V$	杆件剪力
$\  \cdot \ $	范数
$W$	外力所做的功
$a$	断裂力学中的裂缝长度
$c$	莫尔-库仑破坏准则中的内聚力
$e_{ij}$	应变张量
$f_c$	混凝土单轴抗压强度
$f_t$	混凝土单轴抗拉强度
$f_{bc}$	混凝土在等双轴压力下的强度
$k_{ij}$	刚度矩阵中的刚度系数
$l, m, n$	矢量的方向余弦
$s_{ij}$	偏应力张量
$s_1, s_2, s_3$	主偏应力
$u, v, w$	沿 $x, y, z$ 方向的位移
$w$	裂缝宽度
$\Gamma$	断裂力学中的表面能
$\gamma$	剪应变
$\delta$	杆件或单元位移
$\epsilon$	正应变
$\epsilon_{ij}$	应变张量
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主应变
$\epsilon_m$	平均应变
$\epsilon_v$	体积变形
$\epsilon_0$	混凝土单轴受压时相应于应力峰值的应变
$\epsilon_u$	混凝土极限应变
$\eta$	流变学中粘性系数
$\theta$	应力矢量与 $\sigma_1$ 在 $\pi$ 平面上投影之间的夹角, 称为相似角或偏转角
$\theta_\sigma$	罗德(Lode)角
$\lambda$	Ottosen 破坏准则中与相似角有关的参数
$\mu$	拉梅常数
$\mu_\sigma$	罗德(Lode)参数
$\nu$	泊松比
$\xi$	应力矢量在静水压力轴上的投影
$\rho$	应力矢量在 $\pi$ 平面上的投影
$\sigma$	正应力
$\sigma_{ij}$	应力张量

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	第 1、第 2、第 3 主应力
$\sigma_0$	混凝土单轴受压时峰值应力
$\sigma_y$	屈服应力
$\sigma_m$	平均正应力
$\sigma_{oct}$	八面体正应力
$\tau$	剪应力
$\tau_m$	平均剪应力
$\tau_{oct}$	八面体剪应力
$\varphi$	莫尔-库仑破坏准则中的摩擦角

# 目 录

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 钢筋混凝土非线性有限元分析的意义 .....	1
1.2 钢筋混凝土有限元分析发展简况 .....	2
1.3 钢筋混凝土有限元分析的发展展望 .....	4
<b>第 2 章 应力与应变分析</b> .....	6
2.1 向量与张量 .....	6
2.2 应力分析 .....	14
2.2.1 外力、内力与应力 .....	14
2.2.2 一点应力状态表示法 .....	15
2.2.3 任意斜截面上的应力 .....	16
2.2.4 主应力与应力张量不变量 .....	18
2.2.5 求解主应力的数值方法 .....	22
2.2.6 应力圆和罗德参数 .....	25
2.2.7 应力空间与应力张量不变量的几何意义 .....	27
2.2.8 八面体正应力与剪应力 .....	29
2.2.9 平均正应力与平均剪应力 .....	30
2.3 应变分析 .....	32
2.3.1 一点的应变状态 .....	32
2.3.2 小应变张量各分量的几何意义 .....	34
2.3.3 坐标转换时应变分量的变化 .....	35
2.3.4 应变张量不变量 .....	37
2.3.5 对数应变 .....	39
<b>第 3 章 混凝土的破坏准则</b> .....	41
3.1 概述 .....	41
3.2 单轴受力下的应力-应变关系 .....	42
3.2.1 典型的单轴受压 $\sigma$ - $\epsilon$ 曲线 .....	42
3.2.2 混凝土单轴受压 $\sigma$ - $\epsilon$ 关系的数学表达式 .....	43
3.2.3 单轴受拉时的 $\sigma$ - $\epsilon$ 曲线 .....	47

3.3	双轴受力下的混凝土强度	50
3.3.1	双轴荷载下的实验结果	50
3.3.2	双向受力混凝土强度的计算公式	51
3.4	三轴受力下的混凝土强度准则——古典强度理论	54
3.5	三轴受力下的混凝土强度准则——多参数强度准则	59
<b>第4章</b>	<b>混凝土材料的本构关系</b>	<b>78</b>
4.1	概述	78
4.2	非线性弹性本构关系——全量型	90
4.3	非线性弹性本构关系——增量型	99
4.4	弹塑性本构关系——形变理论	105
4.5	弹塑性本构关系——增量理论	108
4.6	粘弹性与粘塑性本构关系	122
4.7	微平面模型	125
<b>第5章</b>	<b>钢筋混凝土有限元模型</b>	<b>129</b>
5.1	概述	129
5.2	分离式模型	133
5.3	组合式模型	154
5.4	整体式模型	162
5.5	小结	163
<b>第6章</b>	<b>混凝土的断裂与损伤</b>	<b>164</b>
6.1	线弹性断裂力学基础	164
6.1.1	概述	164
6.1.2	裂缝扩展的三种基本形式	165
6.1.3	裂缝尖端的应力和位移	166
6.1.4	应力强度因子	167
6.1.5	断裂韧度与断裂准则	168
6.1.6	能量释放率及其判据	169
6.2	非线性断裂力学基础	171
6.2.1	概述	171
6.2.2	小范围塑性对应力强度因子的修正	171
6.2.3	裂缝张开位移	174
6.2.4	$J$ 积分	178
6.3	断裂力学在混凝土中的应用	182
6.3.1	概述	182
6.3.2	混凝土断裂韧度的测定	182

6.3.3	裂缝处强度因子的计算	186
6.3.4	混凝土裂面受剪性能	189
6.3.5	混凝土裂缝模型	191
6.4	混凝土有限元分析中的裂缝模型	196
6.4.1	处理裂缝的主要方式	196
6.4.2	分离裂缝模型	198
6.4.3	弥散裂缝模型	199
6.4.4	内嵌裂缝单元模型	208
6.5	损伤力学在混凝土中的应用	211
6.5.1	概述	211
6.5.2	损伤力学的基本概念	212
6.5.3	混凝土的损伤模型	214
6.5.4	二维正交异性损伤的本构关系	217
6.5.5	三维空间的本构关系	219
<b>第7章</b>	<b>非线性方程组的求解</b>	<b>221</b>
7.1	结构分析的非线性问题	221
7.2	非线性方程组求解的逐步增量法	222
7.3	求解非线性方程组的迭代法	225
7.4	收敛标准	229
7.5	非线性方程组求解方法实例比较	231
7.6	考虑结构负刚度的一些算法	239
7.7	弧长法	242
7.8	弹塑性单元应力调整计算	247
7.9	基于多点位移控制的推覆分析算法	251
<b>第8章</b>	<b>杆系有限元模型</b>	<b>255</b>
8.1	概述	255
8.2	框架结构的弹塑性有限元模型	256
8.2.1	恢复力模型概述	256
8.2.2	基于材料的模型	261
8.2.3	基于截面的模型	269
8.2.4	基于构件的模型	277
8.3	剪力墙结构的弹塑性有限元模型	279
8.3.1	微观模型(分层壳模型)	279
8.3.2	等效梁模型	283
8.3.3	等效桁架模型(宏模型 1)	283
8.3.4	三垂直杆元模型(TVLEM)(宏模型 2)	284

8.3.5 多垂直杆元模型(MVLEM)(宏模型3)	284
8.4 地震下结构整体弹塑性分析的方法和注意事项	285
8.4.1 单元和本构模型的选择	285
8.4.2 分析方法	286
8.5 算例	286
<b>第9章 其他数值方法</b>	<b>289</b>
9.1 概述	289
9.2 离散单元法	290
9.2.1 概述	290
9.2.2 基本原理	290
9.2.3 接触判断算法	293
9.2.4 颗粒离散元法	294
9.2.5 应用举例	296
9.3 刚体弹簧元法	298
9.3.1 概述	298
9.3.2 基本原理	299
9.3.3 实际应用	303
9.4 无网格法	305
9.4.1 概述	305
9.4.2 无网格伽辽金法	306
9.4.3 无网格法在混凝土中的应用	312
9.5 扩展有限元法	315
9.5.1 扩展有限元方法的基本原理	316
9.5.2 扩展有限元方法的基本公式	318
9.5.3 扩展有限元方法在混凝土计算中的应用	319
<b>第10章 常用有限元程序中的混凝土模型</b>	<b>321</b>
10.1 概述	321
10.2 ADINA	321
10.3 ANSYS	326
10.4 MSC. MARC	332
10.5 ABAQUS	336
10.6 LS-DYNA	340
10.7 有限元建模中的注意事项	343
<b>附录 教学程序</b>	<b>321</b>
附录 A1 等强双线性硬化本构模型子程序	346

附录 A2	随动双线性硬化本构模型子程序 .....	349
附录 A3	变带宽总刚集成及求解简单程序例子 .....	353
附录 A4	牛顿-拉弗逊法求解非线性问题迭代过程的简单程序例子 .....	359
附录 A5	等强双线性硬化本构模型子程序 .....	362
附录 A6	三角形常应变单元及四节点等参元子程序 .....	371
附录 A7	空间 8 节点等参元子程序 .....	374
附录 A8	陆新征-曲哲滞回模型子程序 .....	379
附录 A9	第四代微平面模型子程序 .....	384
参考文献	.....	393

## 1.1 钢筋混凝土非线性有限元分析的意义

钢筋混凝土结构是土建工程中应用最为广泛的一种结构。但是,对钢筋混凝土的力学性能还不能说已经掌握得很全面了,特别是混凝土。因为混凝土由水泥、水、砂子、石子及各种掺合料或者外加剂混合硬化而成,是成分复杂、性能多样的建筑材料。长期以来,人们用线弹性理论来分析钢筋混凝土结构的应力或内力,而以极限状态的设计方法确定构件的承载能力。这种钢筋混凝土构件的设计方法采用的往往是基于大量试验数据基础上的经验公式,虽然这些经验公式能够反映钢筋混凝土构件的非弹性性能,对常规设计来说也是行之有效且简便易行的,但是在使用上毕竟有局限性,也缺乏系统的理论性。这种设计方法的不足之处主要有:

(1) 规范提供的设计公式主要是针对杆件结构的构件,如梁、柱和墙板等,对于复杂的结构,并未提供计算公式。在这种情况下,设计者往往采用模型试验或弹性力学分析方法来确定内力和变形,并据此进行配筋设计。

(2) 规范提供的设计方法,不能清晰地给出结构在受到各种外荷载作用下的各受力阶段的性状及其发展规律,不能揭示结构内力和变形重分布的过程,从而也不能较准确地评估整个结构的可靠性。

(3) 规范计算公式只是保证安全的一种算法,并不能计算出结构在正常使用荷载下,构件内部任意一点的应力或者应变状态。

为了克服上述不足,人们曾做了大量的研究工作,探索考虑塑性变形和开裂的结构非线性分析方法,以便能够正确反映钢筋混凝土结构的实际性状。

随着电子计算机的发展,有限元法等现代数值计算方法在工程分析中得到了越来越广泛的应用。同样,在钢筋混凝土结构的分析中也开始显示出这一方法是非常有用的。这是由于运用有限元分析可以提供大量的结构反应信息,诸如结构位移、应力、应变、混凝土屈服、钢筋塑性流动、粘结滑移和裂缝发展等。这对研究钢筋混凝土结构的性能,改进工程设计都有重要的意义。

钢筋混凝土有限元分析方法能够给出结构内力和变形发展的全过程;能够描述裂缝的形成和开展,以及结构的破坏过程及其形态;能够对结构的极限承载能力和可靠度作出评估;能够揭示出结构的薄弱部位和环节,以利于优化结构设计。同时,它能广泛地适应于各种结构类型和不同的受力条件和环境。

由于钢筋混凝土非线性分析对计算机性能的要求比线性分析要高,计算模型也远比线性模型复杂,对操作人员的力学知识、计算机知识、结构知识的要求也更多。因此,虽然现在个人计算机和商用非线性有限元软件已经得到了很大发展,但是相对于量大面广的钢筋混凝土结构,进行非线性分析的还是少数。目前常用于下列几种情况:

(1) 用于重大结构,如核反应堆的安全壳,海上采油平台,大型地下洞库,超高、超大跨结构等。这些结构一旦失效,经济损失大,社会政治影响也大,因而在对这些结构的可靠性评价过程中,往往需要用到非线性有限元进行分析。

(2) 用于结构或构件的全过程分析。例如混凝土坝,施工工序多、工期长,交付使用后还有徐变,对这一全过程中各个阶段的受力性能,应力、位移分布,徐变后的内力重分布等,必须用非线性有限元的方法才能得出合理的结论,以供设计和施工参考。有些构件,如深梁、梁柱节点、已有主导裂缝的构件等,人们需要对其受力全过程作深入了解,这时也往往借助于非线性有限元分析。

(3) 辅助实验分析。为了研究各种参数,如混凝土强度等级、钢筋强度、配筋形式等对结构构件的影响,往往要做很多组试验,工作量大、周期长,劳动强度大。用非线性有限元法辅助实验,则可进行少量基本试验,确定参数,校核算法模型,然后进行内插或外推,得到参数变化的影响。这对减轻劳动,减少试验数量,提高效率是很有意义的。

## 1.2 钢筋混凝土有限元分析发展简况

为了能准确对钢筋混凝土结构进行非线性受力分析,各国学者对钢筋混凝土有限元进行了深入而广泛的研究,逐步形成了一个相对独立的研究领域,受到土木工程界专家的重视,应用也越来越广泛。

第一篇比较系统地介绍钢筋混凝土中应用非线性有限元方法的是美国学者 D. Ngo 和 A. C. Scordelies(图 1-1-1)。在他们的研究中(Ngo & Scordelies, 1967),沿用已有的有限元方法,将钢筋和混凝土均划分成三角形单元,用线弹性理论分析钢筋和混凝土的应力。但针对混凝土的特点,在钢筋与混凝土之间附加了一种粘结弹簧,从而可以分析粘结应力的变化。对于裂缝,他们根据试验总结,预先设置了一条剪切斜裂缝,裂缝间也附加了特殊的连接弹簧,以模拟混凝土裂缝间的骨料咬合力和钢筋的销栓作用。这篇研究论文发表后引起很大反响。随后,各国学者对钢筋混凝土有限元分析的各个细节方面进行了深入的研究并加强交流工作。美国土木工程师协会组织了一个 20 人的委员会,花了 5 年时间,总结和分析了钢筋混凝土结构有限元分析领域的大量研究资料和信息,在 1982 年 5 月发表了长达 545 页的综述报告(Bazan & Nilson, 1982),内容涉及:本构关系与破坏理论;钢筋模拟及粘结的表示;混凝土开裂;剪力传递;时间效应;动力分析;数值算例和应用;还在附录中发表了钢筋混凝土结构非线性分析的有限元源程序。在这一时期,欧洲和亚洲的一些学者也在

钢筋混凝土结构非线性分析方面进行了大量的研究工作。日本学者的研究工作在起步较晚的情况下很快达到了应用阶段,并且在与试验的结合方面取得了很大的进展。他们在梁、柱、梁柱节点、剪力墙、核反应堆结构等方面都进行了深入细致的研究,并部分地应用于工程设计或为制定规范提供了依据。改革开放以后,我国有一些学者到加拿大、美国和欧洲研修这方面的课题,回国后继续深入研究,无论从实验研究或理论分析上均有很多成果,并发表了大量的论文,出版了多部专著。

TITLE NO. 04-14

### Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams

By D. NGO and A. C. SCORDELIS

The basic concept of using the finite element method of analysis in conducting an analytical model for the study of the behavior of reinforced concrete members is discussed. The finite elements chosen to represent the concrete, the steel reinforcement, and the bond links between the concrete and the steel reinforcement are described. Several examples of singly reinforced concrete beams on simple supports with different idealized cracking patterns are analyzed and results are presented for comparison and discussion. The effect of the assumed stiffness of the bond links is also examined briefly. The theoretical considerations regarding the behavior of the reinforced concrete beams under load are sketched in the present investigation. The purpose of the paper is to demonstrate the feasibility and to explore the potentialities as well as the difficulties of using the finite element method with an ultimate aim of developing a general analytical model for the study of reinforced concrete members in the full range of loading.

**Keywords:** beams [structural]; load [reinforced concrete]; computer; cracking [fracturing]; deflection; matrix methods [structural]; reinforced concrete; stress concentration; structural analysis.

■ **STRESS OF THE RESPONSE OF REINFORCED CONCRETE MEMBERS TO LOAD** have occupied the attention of many investigators during the present century. For example, hundreds of papers have been written on the subject of shear strength of reinforced concrete members alone. Unfortunately because of the complexities involved, no basic analytical approach has been developed which can be used to accurately determine the internal stress distribution in the concrete and in the steel reinforcement of a member throughout its loading history. Some of the complications of the problem are enumerated below:

1. The structural system is three dimensional and is composed of two different materials: concrete and steel.

2. The structural system has a continuously changing character due to the cracking of the concrete under increasing load.

3. Effects of bond action in the steel reinforcement, bond between the steel reinforcement and concrete, and bond slip are difficult to incorporate into a general analytical model.

4. The stress-strain relationship for concrete is nonlinear and is a function of many variables.

5. Concrete deformations are influenced by creep and shrinkage and are time-dependent.

In view of such great complication, an analysis to determine principal stresses throughout such a member by a direct application of the classical theories of continuum mechanics is virtually impossible. However, if these detailed stress distributions in the concrete, both in the compression zone and in the tensile zone between cracks, as well as in the steel reinforcement, could be determined for various load levels, studies of the basic behavior of these members would be immeasurably aided.

The general approach to be followed in this paper has been made possible by two recent developments: first, the high-speed digital computer and second, the concept of the finite element approach for the analysis of structural systems. The finite element method consists of replacing the actual structural system by a system of finite elements interconnected at nodal points. In the case of a reinforced concrete member these finite elements have to be selected so as to accurately represent the behavior of the concrete and the steel reinforcement and their interaction through bond. This finite element system may then be analyzed by either a displacement or force method of analysis to yield the nodal point displacements and the internal stresses and deformations in the concrete and the steel reinforcement. In the initial studies described herein,

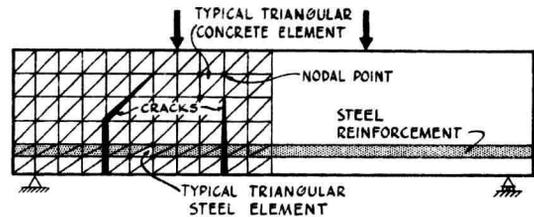


Fig. 2—Finite element idealization

图 1-1-1 世界上第一篇钢筋混凝土非线性有限元分析论文及文中插图(Ngo &amp; Scordelis, 1967)

经过几十年的发展,钢筋混凝土有限元分析的研究有了很大发展,不仅从分析方法、理论基础和实验研究上均取得了明显的进展,而且可以说,已经到了相当实用的阶段。欧洲混凝土委员会制定的混凝土模式规范 MC 90 (CEB-FIP, 1993) 已经将混凝土有限元分析方法纳入其有关条文中,我国《水工钢筋混凝土结构设计规范》及 2002 年出版的《钢筋混凝土结构设计规范》也都在附录中列入了有关有限元分析的条文。

以下就钢筋混凝土有限元分析的发展和应用中的有关问题作一简要回顾。

首先是关于混凝土的破坏准则。在早期的有限元分析中,比较多的是采用莫尔破坏准则。这一准则有两个材料常数,它在应力空间可以表示为一个多角锥体。而近代混凝土三轴破坏试验表明,多角锥不能精确地反映混凝土破坏曲面。于是,三参数、四参数和五参数破坏准则相继被提出来。已有的试验结果证明,某些四参数和五参数公式已能较好地反映出混凝土在三轴应力状态下的破坏特征,可以用于实际工程分析,并有足够的精度。

在混凝土的本构关系上,各国学者提出了多种多样的模式,如线弹性理论、非线性弹性理论、弹塑性理论、内时理论、粘弹性和粘塑性理论等,但彼此之间还差异较大。近年来,利用断裂力学和损伤力学的方法进行混凝土构件和结构分析,也取得了进展。可以说,凡是在固体力学或结构分析中应用过的理论,在混凝土本构关系建立过程中均被采用过,并用来分析不同类型的实际结构。可是,由于缺乏足够的实验基础,至今还没有一种公认的理论或本