中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医药院校规划教材

供临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、护理、法医等专业使用

案例版™

医学高等数学

第2版

主　编　郭东星

科学出版社

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医药院校规划教材

案例版™

供临床、预防、基础、口腔、麻醉、影像、药学、检验、护理、法医等专业使用

医学高等数学

第2版

主　　编　郭东星
副主编　申笑颜　杨　晶　王培承
编　　委　（以姓氏笔画为序）
王培承（潍坊医学院）
申笑颜（沈阳医学院）
杨　晶（天津医科大学）
李建明（山西医科大学）
谷小萱（天津医科大学）
周立业（山西医科大学）
郭东星（山西医科大学）

秘　　书　王淑玲（山西医科大学）

科学出版社
北　京

郑　重　声　明

为顺应教育部教学改革潮流和改进现有的教学模式，适应目前高等医学院校的教育现状，提高医学教学质量，培养具有创新精神和创新能力的医学人才，科学出版社在充分调研的基础上，引进国外先进的教学模式，独创案例与教学内容相结合的编写形式，组织编写了国内首套引领医学教育发展趋势的案例版教材。案例教学在医学教育中，是培养高素质、创新型、实用型医学人才的有效途径。

案例版教材版权所有，其内容和引用案例的编写模式受法律保护，一切抄袭、模仿和盗版等侵权行为及不正当竞争行为，将被追究法律责任。

图书在版编目（CIP）数据

医学高等数学：案例版 / 郭东星主编．—2 版．—北京：科学出版社，2013.6
中国科学院教材建设专家委员会规划教材·全国高等医药院校规划教材
ISBN 978-7-03-037841-5

Ⅰ．医…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．医用数学-医学院校-教材　Ⅳ．R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 127523 号

责任编辑：王　颖　周万灏 / 责任校对：宣　慧
责任印制：肖　兴 / 封面设计：范璧合

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2008 年 7 月第　一　版　　开本：850×1168　1/16
2013 年 6 月第　二　版　　印张：12 1/2
2013 年 6 月第五次印刷　　字数：342 000

定价：32.80 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

第 2 版前言

为了适应新时期医学高等教育发展的需要，借鉴国外先进的 PBL（Problem-Based Learning）教学方法，采用案例与教学内容相结合的模式，5 年前我们组织编写了案例版《医学高等数学》，于 2008 年 7 月由科学出版社出版.

为适应社会发展对医学生的新要求，不断完善学科知识结构，优化教材内容，对第 1 版教材进行了增删修订. 对函数、极限及导数这些基本概念的来源和引入给出了相应的解释，使同学们能更清楚地了解数学方法来源于实际问题；对微分方程中的医学模型的详细描述，是对时下数学建模思想小小的引入；对部分例题和习题也做了相应的调整和精选，同时对第 1 版中存在的问题，也一并作了修订.

在新版教材的编写过程中，沈阳医学院申笑颜老师、山西医科大学数学教研室的全体老师，特别是李建明、曹红艳、王淑玲老师在教材的整理、修改、校对工作中付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢！

感谢在本教材的编写和出版过程中，沈阳医学院、天津医科大学、潍坊医学院、山西医科大学及科学出版社的大力支持和帮助.

本书编写的过程中，参考了许多同类及相关的中外文书刊，在此深表感谢.

对于新版教材中存在的问题，恳请同行和使用本书的广大师生不吝赐教，予以指正.

编　者

2013 年 3 月

第1版前言

本书是科学出版社为适应目前高等医学教育的现状，本着深化课程体系与教学方法的改革，借鉴国外先进的PBL(Problem-Based Learning)教学方法，采用案例与教学内容相结合的模式，组织编写的教材.教材的特点体现在：

1. 融案例于教材中，用案例引导教学，并以此作为学生获取知识和解决问题的切入点.

2. 注重数学的基础理论、基本知识的讲解以及对学生基本技能的培养.在此基础之上，尽量体现教材的思想性、先进性、科学性、启发性和适用性.

3. 全书既保持了数学基本的知识体系，又具有比较鲜明的医学教育特色.加强了基础学科与医学学科相结合的特点，突出了利用数学的理论知识解决医学问题的思想.

本书以五年制临床医学专业、药学专业本科生为主要使用对象，兼顾与医学相关的其他专业.全书共九章，涵盖了微积分学、常微分方程、线性代数基础、概率论初步等教学内容.可按照不同类型的学校和专业，在教学中根据各自的情况有选择地使用.

本书在编写和出版过程中得到山西医科大学、天津医科大学、滨州医学院、潍坊医学院以及科学出版社的大力支持和帮助，山西医科大学韩红娟老师在校对工作中做了大量工作，在此表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，参考了许多同类及相关的中外文书刊，在此深表感谢.

虽然编委们在工作中认真求实，兢兢业业，但由于水平所限，错误和不当之处仍在所难免.恳请同行和使用本书的广大师生不吝赐教，予以指正.

编　者

2008年5月于山西

目　录

第一章 函数、极限与连续
Function and Limit and continue

案例 1-1

当 X 射线经过机体组织或别的物质时，它的能量要被吸收一部分．设原来的强度为 I_0，经过单位厚度的物质时有 $p\%$ 吸收．

问题：

试问经过 d 单位厚度的物质时，剩下的强度 I 等于多少？

函数是事物间量与量相互联系、相互制约规律的数学抽象，是表达变量间复杂关系的基本数学形式，是高等数学的主要研究对象．极限则动态地刻画了变量的运动和演进的变化趋势，是高等数学的基本研究方法．有了极限，人们才可能以高于初等数学的观点和方法来研究函数．本章在初等数学基础上，进一步介绍函数、极限的基本内容，并引出连续的概念和性质，为学习一元微积分奠定基础．

第一节 函 数

函数概念的萌芽可以追溯到古代对图形的研究，随着社会的发展，人们开始逐渐发现，在所有已经建立起来的数的运算中，某些量之间存在着一种规律，这就是一个量或几个量的变化，会引起另一个量的变化．

一、函数的概念

事物的发展和变化，本质上是量的演变．如果在所考虑的问题或变化过程中，一个量始终保持同一数值，这样的量称为**常量**(constant)．如果在所考虑的问题或变化过程中，一个量可以有不同的数值，这样的量称为**变量**(variable)．例如，圆的面积 $S=\pi\times r^2$，其中，π 为常量，r 为圆的半径，而面积 S 与半径 r 可以取不同的值，视为变量；再如，儿童服药的剂量常取决于儿童的体重，如果治疗时间较短，该儿童体重可视为常量；若此疗程长达数年，其体重就是一个变量，因此，一般可以把常量看成特殊的变量．

函数是数学中最主要的概念之一，概念是数学的基础，概念性强是函数理论的一个显著特点，只有对概念做到深刻理解，才能正确灵活地加以应用．

定义 1.1 设 x 和 y 是某变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，按照一定的对应法则，变量 y 总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function)．变量 x 称为**自变量**(independent variable)，变量 y 称为**因变量**(dependent variable)，记为

$$y=f(x)\ ,\ x\in D$$

D 是自变量 x 的所有允许值的集合，称为函数的**定义域**(domain)．而因变量 y 的所有对应值的集合称为函数的**值域**(range)．

从函数的定义可知，函数的定义域和对应法则是函数的二要素，一旦二者确定，函数的值域也就相应的确定了．

在数学中，通常不考虑函数的实际意义，而抽象地用算式表达函数，因此约定函数的定义域就是使函数有意义的自变量取值的全体．

例 1.1 确定下列函数的定义域．

(1) $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{2}{x-1}$；

(2) $y=\ln\left(\dfrac{1-x}{3}\right)+\arcsin x$．

解 要求函数的定义域，只需求出使函数有意义的 x 的取值范围．

(1) 要使函数有意义，必有

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$$

解此不等式组得 $x>1$ 或 $x\leqslant -1$，所以该函数的定义域可表示为

$$(-\infty,-1]\cup(1,+\infty).$$

(2) 要使函数有意义，必有 $\dfrac{1-x}{3}>0$ 且 $|x|\leqslant 1$，

所以该函数的定义域可表示为 $[-1,1)$．

在实际问题中，求函数的定义域要注意其实际意义．

例 1.2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的高度为 h，运动规律为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度，求函数 s 的定义域．

解 从抽象的算式看，t 可以取一切实数值，但考虑到实际意义，显然应有

$$t\geqslant 0 \text{ 且 } 0\leqslant s\leqslant h\text{，而 } t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

故定义域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$．

例 1.3 2003 年中国非典型肺炎(SARS)流行时，感染人数随时间变化的规律通过实际观测的数据表示，我们用最引人关注的时间段里公布的全国疫情报告中的 8 组数据来反映新增病例数 N 与时间 t 的关系，见表 1.1．

表 1.1 2003 年全国 SARS 流行高峰期新增病例报告

报告日期(月/日)	4/28	5/1	5/4	5/7	5/9	5/12	5/15	5/17
标示时间(t_i)	1	4	7	10	12	15	18	20
新增例数(N_i)	203	187	163	159	118	75	52	28

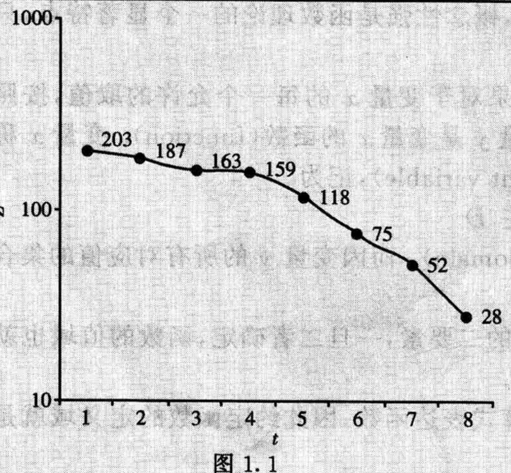


图 1.1

将表 1.1 中的数据 (t_i, N_i) 以描点的形式标记在坐标平面上，然后用光滑的曲线连接这些点．则此曲线 $N=N(t)$ 也表示这个时间段全国新增病例数 N 与时间 t 的关系，此为图形表示法，见图 1.1．

还可以用解析式法表示 N 与时间 t 的关系．由于影响新增病例数 N 的因素很多，绝非一个时间变量 t 所能完全确定的，故 $N=N(t)$ 这类解析式只能近似模拟这种关系，例如用 $N(t)=\alpha+\beta t^{\gamma}$ 来拟合这一关系，这里 α、β、γ 均为常数，在流行病学中有具体含义．

上述函数均为单值函数，即自变量 x 在其定义域上取值时，函数 y 只有一个确定的值与之对应．如果 y 有两个或两个以上的值与之对应，称 y 为 x 的多值函数，如 $y=\pm\sqrt{x}$．

函数的表达方式通常有公式法、图像法和表格法，甚至可以用一段文字来表述．

二、分段函数

在生物、医学和工程技术等应用中，经常遇到一类函数，当自变量在不同范围内取值时，其表达式也不同，这类函数就是分段函数．历史上最著名的 **Dirichlet 函数**就是一个分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 是无理数；}\\ 1, & x \text{ 是有理数．}\end{cases}$$

定义 1.2 在定义域的不同范围上，用不同的解析式来表达的一个函数，称为**分段函数**（piecewise function）．

例 1.4 取整函数：设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 最大整数，记为 $f(x)=[x]$．例如 $[\pi]=3$，$[\sqrt{3}]=1$，$\left[\frac{2}{5}\right]=0$，$\left[-\frac{2}{5}\right]=-1$，取整函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是整数集 Z，这是一个分段函数，它的图形是阶梯状的，见图 1.2.

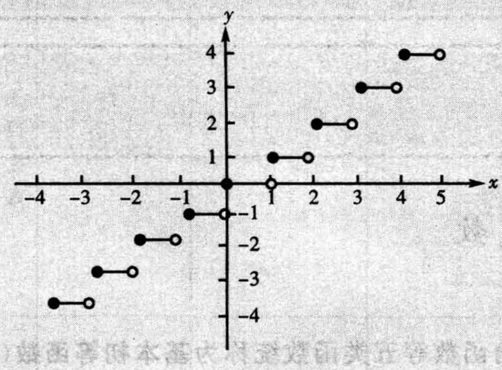


图 1.2

例 1.5 在生理学研究中，血液中胰岛素浓度 $c(t)$（单位/毫升）随时间 t（min）变化的经验公式为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5;\\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5.\end{cases}$$

式中 k 为常数，这是一个分段函数，见图 1.3.

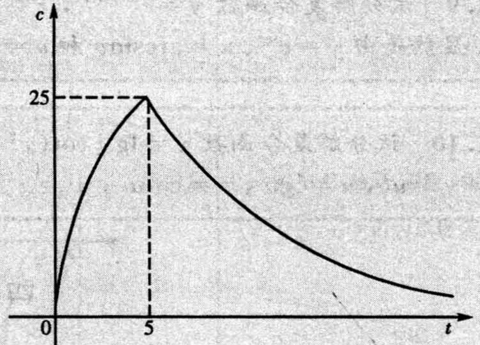


图 1.3

例 1.6 未成年人服药剂量的 Cowling 公式为 $c=\frac{(a+1)d}{24}$，根据此公式，到多大年龄时，该剂量达到成人剂量？（d 为成人剂量）

显然，令 $c=d$ 可解出 $a=23$，故 Cowling 公式应为

$$f(a)=\begin{cases}\frac{(a+1)d}{24}, & a<23;\\ d, & a\geqslant 23.\end{cases}$$

这是一个分段函数，见图 1.4.

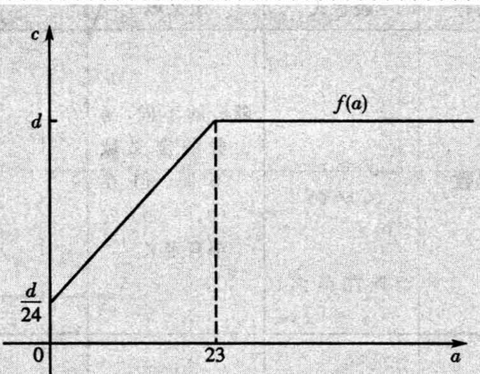


图 1.4

三、复合函数

定义 1.3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或其子域上取值时，所对应的 u 值使 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数**（compound function），记为 $y=f(\varphi(x))$．其中，u 称为**中间变量**（intermediate variable）.

例 1.7 求由 $y=e^u$，$u=v+\sin v$，$v=1-2x$ 构成的复合函数．

解 u 是 y 的中间变量，v 是 u 的中间变量，依次代入可得 $y=e^{1-2x+\sin(1-2x)}$．

例 1.8 求由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数和由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数．

解 (1) 由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数是

$$y=(\sin x)^3;$$

(2) 由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数是

$$y=\sin x^3.$$

以上是两个或两个以上函数层层"嵌套"构成的复合函数．但需注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数．因为函数 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2,+\infty)$，在此区间上 $y=\arcsin u$ 没有意义．

我们不仅要学会把若干个函数复合成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数分解成若干个简单的函数．所谓简单函数，是指基本初等函数或是常数与基本初等函数四则运算后的结果．

例 1.9 试分解复合函数 $y=e^{\arcsin 3x}$．

解 显然是由 $y=e^u$、$u=\arcsin v$ 和 $v=3x$ 复合而成．

例 1.10 试分解复合函数 $y=\lg^2[\cot(x^2+\arccos x)]$．

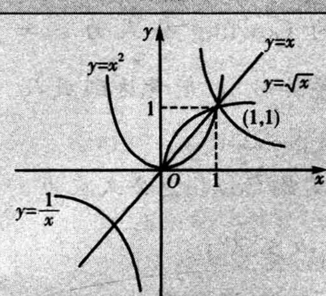
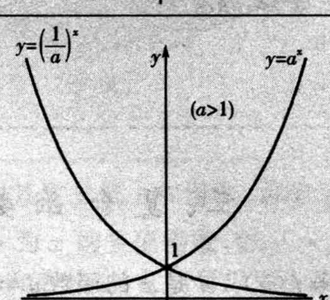
解 $y=u^2$，$u=\lg v$，$v=\cot w$，$w=x^2+\arccos x$．

四、初 等 函 数

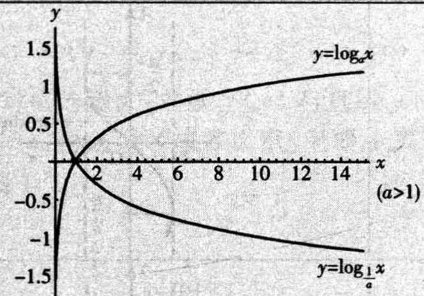
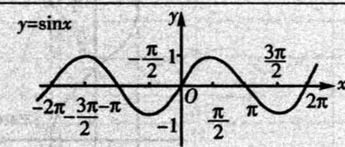
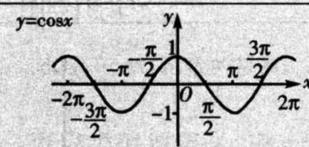
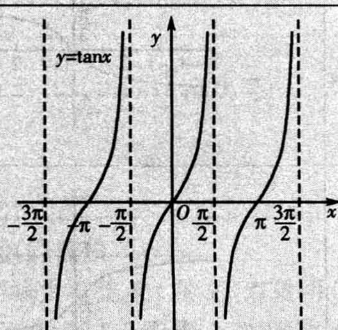
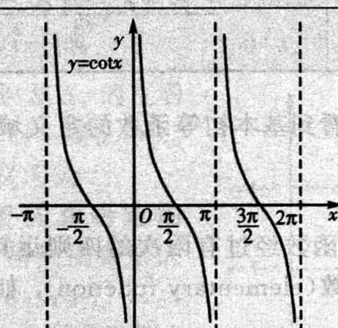
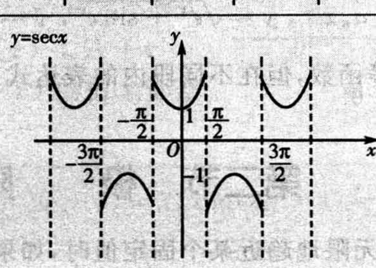
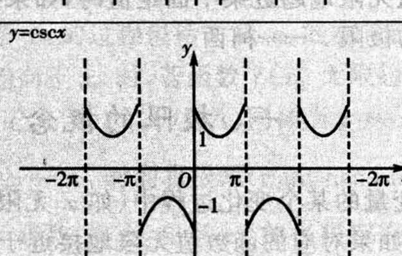
1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等五类函数统称为**基本初等函数**（basic elementary function）. 见表 1.2.

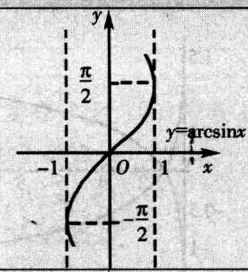
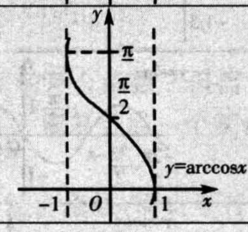
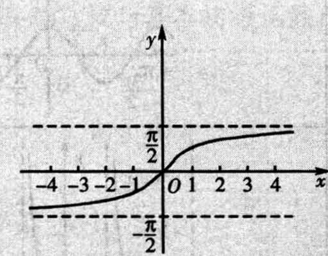
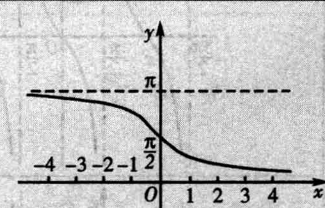
表 1.2 基本初等函数表

名称	表达式	定义域	图形	特征
幂函数	$y=x^a$ $(a\neq 0)$	随 a 的不同，函数的定义域不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过(1,1)点，在第一象限内，当 $a>0$ 时，为增函数；当 $a<0$ 时，为减函数
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0,\\a\neq 1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且过点 (0，1)，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数

续表

名称		表达式	定义域	图形	特征
对数函数		$y=\log_a x$ $\left(\begin{matrix}a>0\\ \text{且 } a\neq 1\end{matrix}\right)$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，且过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的奇函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的偶函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期的奇函数，在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为单增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内为减函数
	正割函数	$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 2π 为周期的偶函数，$\lvert\sec x\rvert\geqslant 1$
	余割函数	$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 2π 为周期的奇函数，$\lvert\csc x\rvert\geqslant 1$

续表

名称		表达式	定义域	图形	特征
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		值域取主值为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，为单调递增，奇函数
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		值域取主值 $[0,\pi]$，为单调递减函数
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		值域取主值为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，为单调递增的奇函数
	反余切函数	$y=\text{arccot}\,x$	$(-\infty,+\infty)$		值域取主值 $(0,\pi)$，为单调递减函数

从表 1.2 中，我们可以清楚地看到基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性及其函数图形等．

2. 初等函数

定义 1.4 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合运算所构成的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**(elementary function)．如

$$y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\ ,\ y=\sqrt{e^x+\sin x}\ ,\ y=\sqrt{\cot 3x}+e^{x+1}\ ,\ y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$$

都是初等函数；分段函数不是初等函数，但在不同段内的表达式，通常用初等函数表示．分段函数也是重要的函数．

第二节　极　　限

当属于一个变量的相继的值无限地趋近某个固定值时，如果最终同固定值之差可以随意地小，那么，这个固定值就称为所有这些值的极限．——柯西

一、极限的概念

对于函数 $y=f(x)$，在自变量的某个变化过程中(如 x 无限增大即 $x\to\infty$ 的过程或 x 无限接近于某一个常数即 $x\to x_0$ 的过程)，如果对应的函数值无限地接近于某一个常数，那么这个常数叫做在自变量的这一变化过程中函数的极限，这个极限是由自变量的变化过程所决定的．主要研究以下两种情形：

1. 自变量趋向于无穷大（$x\to\infty$）时函数的极限

定义 1.5　若自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**(limit)，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或\ f(x)\to A(x\to\infty)$$

从几何意义上看，表示随着 x 的绝对值的增大，曲线 $f(x)$ 与直线 $y=A$ 越来越接近，即，对于任意的 $\varepsilon>0$，无论直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，只要 x 离原点足够远，即 $|x|>M$，函数 $f(x)$ 的图形都在这个条形区域内，如图 1.5.

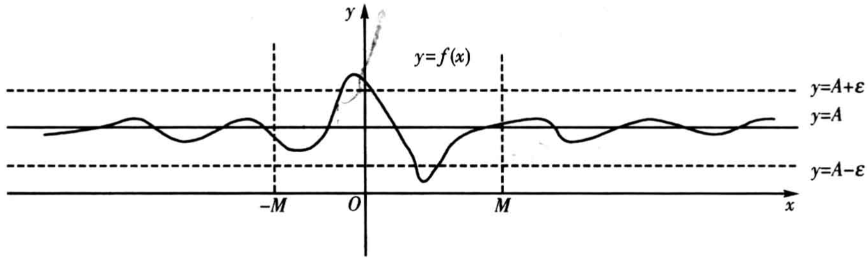


图 1.5　当 $x\to\infty$ 时函数的极限

如果仅考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$，那么可以类似地定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1.11　由函数的几何意义可知下列等式成立 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

2. 自变量趋向于定值（$x\to x_0$）时函数的极限

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义（在 x_0 点处可以没有定义），若当 x 无论以怎样的方式趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 都无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

注意　①这里 $x\to x_0$ 的方式是任意的（从 x_0 的左端趋于 x_0 或从 x_0 的右端趋于 x_0）. ②函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限是否存在与函数在 x_0 点是否有定义无关.

从几何意义上看，可以描述为对于任意给定的 $\varepsilon>0$，无论直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，总能找到 x 的一个区域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，使得当 x 在这个区域内取值时，$f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad 即 \quad A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

即在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0;\delta)$ 内 $f(x)$ 的值全部落在如图 1.6 所示横条虚线形区域内.

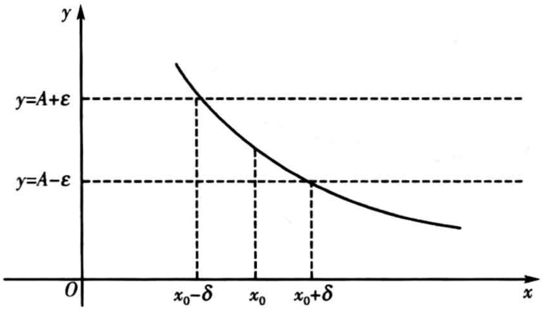


图 1.6　$x\to x_0$ 时函数的极限

例 1.12　由定义及几何意义，易知 $\lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3$，$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

可以看出，上述 x 以任意方式趋近于 x_0 的过程包括 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 和从 x_0 的右侧趋向于 x_0 这两种情况. 当只考虑 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 时，若函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**(left-hand limit)，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；同样当 x 从 x_0 的右侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**(right-hand limit)，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

左极限和右极限统称为**单侧极限**. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在的充分必要条件为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在且相等. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

这个结论常用于讨论分段函数在分段点处的极限.

例 1.13 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\infty<x<0, \\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 因为是分段函数,故在求分段点的极限时,需分别求左右极限.

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$,而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=1\neq 0=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$,且 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$,

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=1=\lim_{x\to 1^+}f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

二、极限的四则运算

定理 1.1 若 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=A\cdot B$.

特别地,当 c 、k 为常数时,有 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$,$\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k$.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

该定理中 x 的变化趋势应为同一个变化趋势.

注:(1)、(2)可推广到有限个函数.

例 1.14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2.$$

例 1.15 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2.$$

例 1.16 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+x+2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 1.17　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{2}$.

三、两个重要极限

为了导出两个重要极限公式，不加证明地给出下列定理.

定理 1.2　**夹逼定理**：在同一极限过程中，若三个函数 $f(x)$、$g(x)$和 $h(x)$之间满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

定理 1.3　**单调有界数列必有极限**：若数列 $\{x_n\}$ 单调并且有界，则 $\{x_n\}$ 一定有极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

1. 第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\quad（这里的 x 以弧度为单位）$$

证明　作单位圆如图 1.7 所示，取角 $\angle AOB=x$（弧度）（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$），于是有 $BC=\sin x$，弧 $AB=x$，$AD=\tan x$，由图得

$$S_{\triangle AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\triangle AOD}$$

即 $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\tan x$，得 $\sin x<x<\tan x$.

从而有 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$，又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，

而 $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$，

故有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

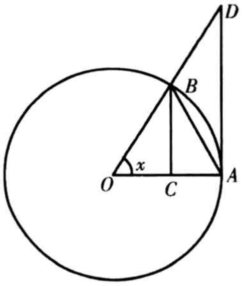


图 1.7

例 1.18　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\times 1=5$.

例 1.19　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

例 1.20　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

2. 第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad 或 \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

解释说明：列出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的数值表（表 1.3），观察其变化趋势.

表 1.3 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的数值表

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000	…
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…

当 $x=n$ 时，从上表可以看出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为单增有界数列，根据定理 1.2，易知其极限存在，且有 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

又设 $n\leqslant x<n+1$，故有 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，

从而有 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

另一方面，令 $x=-(t+1)$，则 $x\to-\infty$，$t\to+\infty$，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=e,$$

所以得出 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

例 1.21 求 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}$$
$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}=e^{-2}.$$

例 1.22 （案例 1-1 解答）

解 我们先按单位厚度来考虑. X 射线开始的强度为 I_0，经过第一个单位厚度后，由于被吸收了 $I_0\cdot p\%$，故剩下的强度为

$$I_0-I_0\cdot p\%=I_0(1-p\%),$$

这也是 X 射线开始进入第二个单位的强度，由于经过第二个单位厚度又要吸收 $p\%$，即吸收 $I_0(1-p\%)\cdot p\%$，故剩下的强度为

$$I_0(1-p\%)-I_0(1-p\%)p\%=I_0(1-p\%)^2,$$

以此类推，经过 d 个单位厚度后，剩下的强度为

$$I_0(1-p\%)^d.$$

这实际上只是所求 I 值的近似值,原因在于上述的解题方法把吸收过程看成是经过一个一个单位厚度跳跃式地进行的,而实际吸收过程是连续进行的. 为了更接近实际,采用下面的一般化方法来解决该问题.

将每个单位厚度分成 n 等份,然后按 $\frac{1}{n}$ 单位厚度去计算,于是经过 d 单位厚度后剩下的强度为

$$I_0\left(1-p\%\cdot\frac{1}{n}\right)^{nd},$$

为清楚起见,令 $\alpha=p\%$,上式变为

$$I_0\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{nd},$$

由第二个重要极限求得

$$I=\lim_{n\to\infty}I_0\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{nd}=I_0e^{-\alpha d}.$$

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 1.7　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为**无穷小量**(infinitesimal),简称为无穷小.

简言之,极限为 0 的变量或函数称为无穷小量.

定义中的 $x\to x_0$,可换成 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\infty$,$x\to-\infty$,$x\to+\infty$ 等,当然函数 $f(x)$ 也可换成数列 $\{x_n\}$,此时 $x\to x_0$ 换成 $n\to\infty$.

无穷小量是以零为极限的变量,提到无穷小量时要指明自变量的变化过程,比如 $\sin x$ 在 $x\to 0$ 时是无穷小量.

任意很小的数都不是无穷小量,但零是可以看作无穷小的常数(也是唯一一个可看成无穷小的常数),因为常数的极限总是等于常数本身.

根据无穷小量的定义及极限的定义与运算法则,可知无穷小量有如下性质:

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 2　有限个无穷小之积为无穷小.

性质 3　有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

例如,因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$,即 x 是 $x\to0$ 时的无穷小量,而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$,即 $\sin\frac{1}{x}$ 为有界变量,所以当 $x\to0$ 时,$x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小量,即 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$,这也提供了一种求极限的方法.

当然常量也是有界的,所以常量与无穷小量之积为无穷小量.

定理 1.4　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量. 这里 $x\to x_0$ 也可换成其他变化过程.

2. 无穷小量的比较

两个无穷小量的和、差、积都是无穷小量,那么,两个无穷小量的商是否仍是无穷小量呢? 例如当 $x\to0$ 时,$x,x^2,2x,x^3$ 都是无穷小量,不同的是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^3}$ 不存在,也就是说当 $x\to0$ 时,$\frac{x^2}{x}$ 是无穷小量,但 $\frac{2x}{x}$,$\frac{x^2}{x^3}$ 不是无穷小量. 这些情形表明,同为无穷小量,但它们趋于 0 的速度有快有慢,为了比较不同的无穷小量趋于 0 的速度,引入无穷小量的比较中"阶"的概念:

定义 1.8　设 $\alpha=\alpha(x)$,$\beta=\beta(x)$ 在自变量的某个变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 等)是无穷小(且 $\alpha\neq0$),则

(1) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶**的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;或称 α 是比 β **低阶**的无穷小.