全国高职高专教育规划教材

应用数学与数学文化

第2分册

主编 康永强 主审 李宏远

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

应用数学与数学文化

Yingyong Shuxue yu Shuxue Wenhua

第2分册

主编 康永强

主审 李宏远

编者 康永强 岑苑君 邱仰聪 欧笑杭 刘 锒 杨 超

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书分为两个分册，第2分册主要内容包括：行列式，矩阵，线性方程组，随机事件与概率，随机变量及其分布，数学期望和方差，数理统计的基本方法，用MATLAB数学软件来认识应用数学（二）。

本书以应用为目的，重视学生数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用意识和能力的培养；以学生受益为宗旨，内容阐述清晰，简捷直观，通俗易懂，不仅强调数学学习方法的引导，而且特别注重数学课程的育人功能，融入大量数学文化的素材，以此反映数学的思想、精神和应用；以能力训练为基础，能力训练的部分分为基础题和应用题两部分，且每章后附有参考答案，便于教师和学生根据情况进行选择。为了便于教学和自学，将与本书内容相关的数学实验合为附录一，教学中可充分利用数学软件的技术手段，加强学生数学基本知识的掌握和应用能力的提高。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院各专业的教材，也可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学与数学文化：全2册/康永强主编.—北京：高等教育出版社，2011.9

ISBN 978-7-04-032718-2

Ⅰ.①应… Ⅱ.①康… Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材 ②数学-文化-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O29②O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第175722号

策划编辑 邓雁城　责任编辑 崔梅萍　封面设计 李卫青　版式设计 王艳红
插图绘制 郝 林　责任校对 杨凤玲　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京市朝阳展望印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
本册印张 16.5
本册字数 400千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2011年9月第1版
印 次 2011年9月第1次印刷
两册定价 54.00元

物 料 号 32718-001

目　录

第三模块　线性代数

第四模块 描述随机问题的方法——概率论

第五模块 部分刻画整体——数理统计初步

第三模块
线性代数

主要内容

■ 行列式

- ➢ n 阶行列式
- ➢ n 阶行列式的性质
- ➢ n 阶行列式的计算
- ➢ 克拉默法则

■ 矩阵

- ➢ 矩阵的定义
- ➢ 矩阵的运算
- ➢ n 阶方阵的行列式
- ➢ 逆矩阵
- ➢ 矩阵的秩

■ 线性方程组

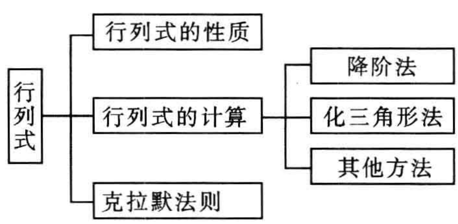
- ➢ n 元线性方程组和高斯消元法
- ➢ 线性方程组解的判定

行列式 第8章

第8章学习提要

- n 阶行列式
- n 阶行列式的性质
- n 阶行列式的计算
- 克拉默法则

本章知识结构



一个做学问的人,除了学习知识外,还要有"tast",这个词不太好翻译,有的译成品味,喜爱,一个人要有大的成就,就要有相当清楚的"tast".

——诺贝尔奖获得者杨振宁

第8章概述

在线性代数的一些问题,如线性方程组、矩阵等问题的研究中,常要利用行列式作工具,在数学的其他分支中也常常要用到行列式. 本章主要介绍行列式的基本概念、性质和计算,并以行列

式作为工具给出方程个数与未知数个数相同，且有唯一解的线性方程组的一种解法——克拉默法则.

学习目标

1. 理解二阶、三阶行列式的定义.

2. 知道 n 阶行列式、元素 a_{ij} 的余子式、代数余子式的定义.

3. 知道 n 阶行列式的性质.

4. 掌握行列式计算的基本方法，熟练计算二阶、三阶、四阶行列式的值，会计算简单的 n 阶行列式.

5. 了解克拉默法则及其推论，能用克拉默法则求方程个数与未知数个数相同，且系数行列式 $D\neq0$ 的、不超过五个元的线性方程组的解.

8.1 行列式的定义

8.1.1 n 阶行列式的定义

定义 8.1【n 阶行列式】 由 $n\times n$ 个数排列成 n 行 n 列，并在左、右两边各加一条竖线组成的式子：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**. 它代表一个由确定的运算关系所得到的数或式，其中 a_{ij} 称为**行列式的元素**，表示 n 阶行列式中第 i 行第 j 列相交处的那个元素（$i,j=1,2,\cdots,n$）.

1. 当 $n=1$ 时：规定 $D=|a_{11}|=a_{11}$.

2. 当 $n=2$ 时，有

定义 8.2【二阶行列式】 由 2×2 个数排成两行两列，组成的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称为二阶行列式，其中 a_{ij} 称为**行列式的元素**. 记为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

根据定义，二阶行列式符合如下的计算法则：主对角线上元素的积减去副对角线上元素的积. 我们把这个法则称为**对角线法则**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

—— 主对角线

----- 副对角线

【例 1】 计算行列式：(1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -\cos x \\ -\cos x & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\times4-3\times(-2)=-4+6=2$；

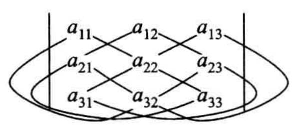
(2) $\begin{vmatrix} 1 & -\cos x \\ -\cos x & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-(-\cos x)\times(-\cos x)=1-\cos^2 x=\sin^2 x.$

定义 8.3【三阶行列式】 由 3×3 个数排成三行三列，组成的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称为三阶行列式，其中 a_{ij} 称为**行列式的元素**. 记为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

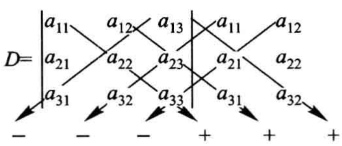
下面介绍三阶行列式的两个计算方法："对角线法"和"沙路法".

(1) 对角线法则



$$=a_{11}a_{22}a_{33} \quad +a_{12}a_{23}a_{31} \quad +a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} \quad -a_{12}a_{21}a_{33} \quad -a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(2) 沙路法



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

【例 2】 计算行列式：$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$=[2\times0\times8+1\times5\times(-1)+3\times4\times6]-[3\times0\times(-1)+2\times5\times6+1\times4\times8]$
$=-25.$

8.1.2 余子式和代数余子式

为了计算 n 阶行列式的值(或称 n 阶行列式的展开),先给出余子式和代数余子式的定义.

定义 8.4【代数余子式】 由行列式 D_n 划去 a_{ij} 所在的行和列,将余下元素按原来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij},称为元素 a_{ij} 的**余子式**. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式.**

【例 3】、求四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\6&-1&7&0\\5&-2&8&-3\\-4&9&-5&-6\end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式 M_{23} 和代数余子式 A_{23}.

解 元素 a_{23} 的余子式为划去第二行和第三列后,余下元素按原来顺序构成的三阶行列式,即元素 a_{23} 的余子式 $M_{23}=\begin{vmatrix}1&2&4\\5&-2&-3\\-4&9&-6\end{vmatrix}$.

元素 a_{23} 的代数余子式 A_{23} 为余子式 M_{23} 前再乘代数符号因子 $(-1)^{2+3}$,即

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}1&2&4\\5&-2&-3\\-4&9&-6\end{vmatrix}.$$

定理 8.1 n 阶行列式 $D_n(n>2)$ 等于它的第一行(任一行或任一列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和. 即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

根据定理 8.1 知道,一个 n 阶列式代表一个数值,这个数值可以由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积的和而求得,通常把这定义为按第一行展开.

【例 4】 按不同行(列)分别展开计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}$.

解 行列式按第一行展开为:

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\3&5\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4&1\\2&5\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4&3\\2&3\end{vmatrix}=10.$$

按第二行展开为:

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}=-4\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}=10.$$

按第三行展开为：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}=2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&2\\-4&1\end{vmatrix}+5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}=10.$$

【例 5】 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&-4\\7&-1&0&5\\-2&6&1&0\\8&4&-3&-5\end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开：

$$\begin{aligned}D_4&=2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}-1&0&5\\6&1&0\\4&-3&-5\end{vmatrix}+(-4)\times(-1)^{1+4}\times\begin{vmatrix}7&-1&0\\-2&6&1\\8&4&-3\end{vmatrix}\\&=2\times\left[(-1)\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&0\\-3&-5\end{vmatrix}+5\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}\right]+\\&\quad 4\times\left[7\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}-2&1\\8&-3\end{vmatrix}\right]\\&=2\times[5+5\times(-18-4)]+4\times[7\times(-18-4)+(6-8)]\\&=-834.\end{aligned}$$

【注】 计算此例可以体会到，如果某一行的零元素越多，按该行展开时计算越方便.

8.1.3 特殊的 n 阶行列式

下面介绍几种特殊的 n 阶行列式.

1. 对角行列式

只在主对角线上有非零元素的行列式称**对角行列式**.

如对角行列式
$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

而
$$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&\lambda_1\\0&0&\cdots&\lambda_2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\lambda_{n-1}&\cdots&0&0\\\lambda_n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

2. 三角行列式

上三角行列式: 主对角线以下元素全为零的行列式,称为上三角行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角行列式: 主对角线以上元素全为零的行列式,称其为下三角行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【注】 上(下)三角行列式的值均等于主对角线上各元素的乘积.

【例 6】 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{24}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43};$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{14}\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{14}a_{23}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}=-a_{14}a_{23}\cdot(0-a_{32}a_{41})=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$