

全国高职高专教育规划教材

应用数学 与 数学文化

第2分册

主编 康永强 主审 李宏远



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

应用数学与数学文化

Yingyong Shuxue yu Shuxue Wenhua

第2分册

主编 康永强

主审 李宏远

编者 康永强 岑苑君 邱仰聪 欧笑杭 刘 镡 杨 超



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书分为两个分册,第2分册主要包括:行列式,矩阵,线性方程组,随机事件与概率,随机变量及其分布,数学期望和方差,数理统计的基本方法,用MATLAB数学软件来认识应用数学(二)。

本书以应用为目的,重视学生数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用意识和能力的培养;以学生受益为宗旨,内容阐述清晰,简捷直观,通俗易懂,不仅强调数学学习方法的引导,而且特别注重数学课程的育人功能,融入大量数学文化的素材,以此反映数学的思想、精神和应用;以能力训练为基础,能力训练的部分分为基础题和应用题两部分,且每章后附有参考答案,便于教师和学生根据情况进行选择。为了便于教学和自学,将与本书内容相关的数学实验合为附录一,教学中可充分利用数学软件的技术手段,加强学生数学基本知识的掌握和应用能力的提高。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院各专业的教材,也可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学与数学文化:全2册/康永强主编. —北京:高等教育出版社,2011.9

ISBN 978-7-04-032718-2

I. ①应… II. ①康… III. ①应用数学-高等职业教育-教材
②数学-文化-高等职业教育-教材 IV. ①O29②O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第175722号

策划编辑 邓雁城
插图绘制 郝林

责任编辑 崔梅萍
责任校对 杨凤玲

封面设计 李卫青
责任印制 韩刚

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京市朝阳展望印刷厂
开本 787mm×1092mm 1/16
本册印张 16.5
本册字数 400千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2011年9月第1版
印次 2011年9月第1次印刷
两册定价 54.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32718-001

目 录

第三模块 线性代数

第 8 章 行列式	2
第 8 章学习提要	2
第 8 章概述	2
学习目标	3
8.1 行列式的定义	3
8.1.1 n 阶行列式的定义	3
8.1.2 余子式和代数余子式	5
8.1.3 特殊的 n 阶行列式	6
【能力训练 8.1】	8
【数学文化聚焦】行列式的来源	9
8.2 行列式的性质	9
【能力训练 8.2】	13
【数学文化聚焦】行列式在解析几何中的应用	14
8.3 行列式的计算	15
8.3.1 降阶法	15
8.3.2 化三角行列式	16
【能力训练 8.3】	18
【数学文化聚焦】范德蒙德	18
8.4 克拉默 (Cramer) 法则	19
8.4.1 克拉默法则	19
8.4.2 运用克拉默法则讨论齐次线性方程组的解	21
【能力训练 8.4】	22
【数学文化聚焦】克拉默与克拉默法则	22
第 8 章学法建议	23
【数学文化聚焦】雅可比	23
【综合能力训练八】	24
第 8 章能力训练参考答案	25
第 9 章 矩阵	27

第9章学习提要	27
第9章概述	28
学习目标	28
9.1 矩阵的定义	28
9.1.1 矩阵的概念	28
9.1.2 几类特殊的矩阵	30
【能力训练 9.1】	32
【数学文化聚焦】矩阵的创立	32
9.2 矩阵的运算	33
9.2.1 矩阵的相等	33
9.2.2 矩阵的加法运算	33
9.2.3 矩阵的数乘运算	35
9.2.4 矩阵的乘法	36
9.2.5 矩阵的转置	40
【能力训练 9.2】	42
【数学文化聚焦】矩阵的奇异值分解	44
9.3 n 阶方阵的行列式	44
【能力训练 9.3】	46
9.4 逆矩阵	46
9.4.1 线性方程组的矩阵表示法	46
9.4.2 逆矩阵的定义	47
9.4.3 用伴随矩阵法求逆矩阵	48
9.4.4 矩阵的初等行变换	50
9.4.5 用初等行变换求逆矩阵	51
【能力训练 9.4】	53
【数学文化聚焦】矩阵密码问题	54
9.5 矩阵的秩	55
9.5.1 阶梯形矩阵	55
9.5.2 行简化阶梯形矩阵	56
9.5.3 矩阵的子式	57
9.5.4 矩阵的秩	57
【能力训练 9.5】	59
【数学文化聚焦】游戏植入广告的矩阵化传播	60
第9章学法建议	61
【数学文化聚焦】社会新闻中的关联矩阵	62
【综合能力训练九】	62
第9章能力训练参考答案	63
第10章 线性方程组	67

第 10 章学习提要	67
第 10 章概述	68
学习目标	68
10.1 n 元线性方程组和高斯消元法	68
10.1.1 n 元线性方程组的基本概念	68
10.1.2 高斯消元法	70
【能力训练 10.1】	75
【数学文化聚焦】线性方程组的发展简史	76
10.2 线性方程组解的判定	76
10.2.1 n 元非齐次线性方程组解的判定	76
10.2.2 n 元齐次线性方程组解的判定	78
【能力训练 10.2】	82
【数学文化聚焦】线性方程组在交通流量问题中的应用	83
第 10 章学法建议	84
【数学文化聚焦】数学家与线性代数	85
【综合能力训练十】	85
第 10 章能力训练参考答案	87

第四模块 描述随机问题的方法——概率论

第 11 章 偶然中的必然——随机事件与概率	92
第 11 章学习提要	92
第 11 章概述	92
学习目标	93
11.1 随机事件的概念及运算	93
11.1.1 随机试验和样本空间	93
11.1.2 随机事件	95
11.1.3 基本事件和复合事件	96
11.1.4 事件间的关系与运算	96
【能力训练 11.1】	98
【数学文化聚焦】概率论的起源	99
11.2 随机事件的概率	100
11.2.1 概率是什么?	100
11.2.2 概率的定义	100
11.2.3 概率的基本性质	102
【能力训练 11.2】	103
【数学文化聚焦】偶然中的必然	104
11.3 条件概率与概率运算	104

11.3.1	概率加法公式	104
11.3.2	条件概率	106
11.3.3	概率乘法公式	108
	【能力训练 11.3】	109
	【数学文化聚焦】蒙提霍尔问题	111
11.4	事件的独立性	112
11.4.1	两个事件的独立性	112
11.4.2	三个事件的相互独立性	113
	【能力训练 11.4】	115
	【数学文化聚焦】蒲丰投针问题	117
11.5	拓展与提高	118
11.5.1	全概率公式	118
11.5.2	贝叶斯公式	120
	【能力训练 11.5】	123
	【数学文化聚焦】贝叶斯统计法	124
第 11 章	学法建议	125
	【数学文化聚焦】彩票中奖的可能性分析	126
	【综合能力训练十一】	127
第 11 章	能力训练参考答案	129
第 12 章	随机现象的函数化——随机变量及其分布	132
第 12 章	学习提要	132
第 12 章	概述	132
	学习目标	133
12.1	随机变量及其分布函数	133
12.1.1	随机变量的概念	133
12.1.2	随机事件与随机变量的关系	134
12.1.3	随机变量的分类	135
12.1.4	分布函数及其基本性质	135
	【能力训练 12.1】	135
	【数学文化聚焦】神奇的功勋	136
12.2	离散型随机变量及其分布	137
12.2.1	离散型随机变量的概率分布及基本性质	137
12.2.2	常用离散型随机变量的分布	139
	【能力训练 12.2】	142
	【数学文化聚焦】从死亡线上生还的人	144
12.3	连续型随机变量及其分布	144
12.3.1	连续型随机变量的概率密度及其基本性质	144
12.3.2	连续型随机变量的分布密度与分布函数的关系	145

12.3.3 常用连续型随机变量的分布	146
【能力训练 12.3】	148
【数学文化聚焦】概率论的应用	149
12.4 正态分布	150
12.4.1 正态分布概念	150
12.4.2 标准正态分布	151
12.4.3 一般正态分布与标准正态分布的关系	152
【能力训练 12.4】	155
【数学文化聚焦】 3σ 规则	156
12.5 拓展与提高	156
12.5.1 几何分布	156
12.5.2 泊松(Poisson)分布	157
12.5.3 随机变量的独立性	159
【能力训练 12.5】	159
【数学文化聚焦】标准分	159
第 12 章学法建议	160
【数学文化聚焦】数学王子——高斯	162
【综合能力训练十二】	162
第 12 章能力训练参考答案	163
第 13 章 随机变量的数字特征——数学期望和方差	167
第 13 章学习提要	167
第 13 章概述	167
学习目标	168
13.1 数学期望	168
13.1.1 数学期望的概念	168
13.1.2 离散型随机变量的数学期望(均值)	169
13.1.3 连续型随机变量的数学期望	172
13.1.4 数学期望的性质	173
【能力训练 13.1】	173
【数学文化聚焦】帕斯卡	174
13.2 方差	174
13.2.1 方差的概念	174
13.2.2 计算方差的简捷公式	175
13.2.3 方差的性质	178
13.2.4 常用分布的数学期望和方差	178
【能力训练 13.2】	179
【数学文化聚焦】“美丽心灵”唤醒的数学怪才——约翰·纳什	180
13.3 拓展与提高	180

13.3.1 数字特征的应用(决策与风险)	180
【能力训练 13.3】	183
【数学文化聚焦】田忌赛马	184
第 13 章学法建议	185
【数学文化聚焦】投资规律——不要把鸡蛋放在同一个篮子中	185
【综合能力训练十三】	186
第 13 章能力训练参考答案	187

第五模块 部分刻画整体——数理统计初步

第 14 章 数理统计的基本方法	190
第 14 章学习提要	190
第 14 章概述	190
学习目标	191
14.1 总体 样本	191
14.1.1 总体和总体的分布	191
14.1.2 样本与样本值	191
14.1.3 统计推断问题简述	192
14.1.4 总体和样本的数字特征	192
【能力训练 14.1】	193
【数学文化聚焦】统计的若干应用	194
14.2 统计量及其分布	195
14.2.1 统计量	195
14.2.2 临界值	195
14.2.3 常见统计量的分布	196
【能力训练 14.2】	199
【数学文化聚焦】伯努利家族的贡献	200
14.3 参数估计	201
14.3.1 点估计	201
14.3.2 区间估计	202
【能力训练 14.3】	207
【数学文化聚焦】现代企业的 6σ 管理法	208
14.4 假设检验	209
14.4.1 假设检验的原理	209
14.4.2 假设检验的基本方法	210
【能力训练 14.4】	215
【数学文化聚焦】生日悖论	216
14.5 拓展与提高	217

14.5.1 单侧检验	217
【能力训练 14.5】	220
【数学文化聚焦】统计与数学的区别	221
第 14 章学法建议	222
【数学文化聚焦】诺贝尔为什么没有设立数学奖?	223
【综合能力训练十四】	224
第 14 章能力训练参考答案	226
附录一 用 MATLAB 数学软件来认识应用数学(二)	229
四、利用 MATLAB 进行矩阵运算和线性方程组求解	229
实验九 矩阵运算	229
实验十 求解线性方程组	232
五、利用 MATLAB 计算概率论及数理统计的问题	235
实验十一 计算随机变量的概率分布	235
实验十二 计算随机变量的数学期望和方差	239
实验十三 参数估计	241
附录二 概率统计公式	243
附表	245
附表一 常见的概率分布表	245
附表二 泊松分布概率值表	246
附表三 标准正态分布函数数值表	248
附表四 t 分布表	249
附表五 χ^2 分布表	250
参考文献	252

第三模块

线性代数

主要内容

■ 行列式

- n 阶行列式
- n 阶行列式的性质
- n 阶行列式的计算
- 克拉默法则

■ 矩阵

- 矩阵的定义
- 矩阵的运算
- n 阶方阵的行列式
- 逆矩阵
- 矩阵的秩

■ 线性方程组

- n 元线性方程组和高斯消元法
- 线性方程组解的判定

行列式

第 8 章

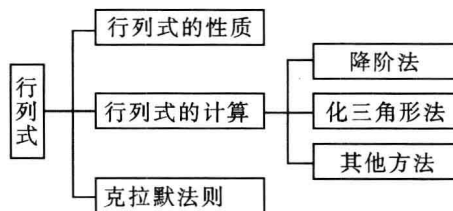


第 8 章 学习提要

- ◆ n 阶行列式
- ◆ n 阶行列式的性质
- ◆ n 阶行列式的计算
- ◆ 克拉默法则



本章知识结构



一个做学问的人,除了学习知识外,还要有“tast”,这个词不太好翻译,有的译成品味,喜爱,一个人要有大的成就,就要有相当清楚的“tast”.

——诺贝尔奖获得者杨振宁

第 8 章概述

在线性代数的一些问题,如线性方程组、矩阵等问题的研究中,常要利用行列式作工具,在数学的其他分支中也常常要用到行列式.本章主要介绍行列式的基本概念、性质和计算,并以行列

式作为工具给出方程个数与未知数个数相同,且有唯一解的线性方程组的一种解法——克拉默法则。

学习目标

1. 理解二阶、三阶行列式的定义.
2. 知道 n 阶行列式、元素 a_{ij} 的余子式、代数余子式的定义.
3. 知道 n 阶行列式的性质.
4. 掌握行列式计算的基本方法,熟练计算二阶、三阶、四阶行列式的值,会计算简单的 n 阶行列式.
5. 了解克拉默法则及其推论,能用克拉默法则求方程个数与未知数个数相同,且系数行列式 $D \neq 0$ 的、不超过五个元的线性方程组的解.

8.1 行列式的定义

8.1.1 n 阶行列式的定义

定义 8.1【 n 阶行列式】 由 $n \times n$ 个数排列成 n 行 n 列,并在左、右两边各加一条竖线组成的式子:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.它代表一个由确定的运算关系所得到的数或式,其中 a_{ij} 称为行列式的元素,表示 n 阶行列式中第 i 行第 j 列相交处的那个元素 ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

1. 当 $n=1$ 时:规定 $D = |a_{11}| = a_{11}$.
2. 当 $n=2$ 时,有

定义 8.2【二阶行列式】 由 2×2 个数排成两行两列,组成的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称为二阶行列式,其中 a_{ij} 称为行列式的元素.记为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

根据定义,二阶行列式符合如下的计算法则:主对角线上元素的积减去副对角线上元素的积.我们把这个法则称为**对角线法则**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{—— 主对角线} \\ \text{----- 副对角线} \end{array}$$

【例 1】 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & -\cos x \\ -\cos x & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \times 4 - 3 \times (-2) = -4 + 6 = 2$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -\cos x \\ -\cos x & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-\cos x) \times (-\cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

定义 8.3【三阶行列式】 由 3×3 个数排成三行三列,组成的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{称为三}$$

阶行列式,其中 a_{ij} 称为行列式的元素. 记为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

下面介绍三阶行列式的两个计算方法:“对角线法”和“沙路法”.

(1) 对角线法则

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(2) 沙路法

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

【例 2】 计算行列式: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= [2 \times 0 \times 8 + 1 \times 5 \times (-1) + 3 \times 4 \times 6] - [3 \times 0 \times (-1) + 2 \times 5 \times 6 + 1 \times 4 \times 8] \\ = -25.$$

8.1.2 余子式和代数余子式

为了计算 n 阶行列式的值(或称 n 阶行列式的展开),先给出余子式和代数余子式的定义.

定义 8.4【代数余子式】 由行列式 D_n 划去 a_{ij} 所在的行和列,将余下元素按原来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} ,称为元素 a_{ij} 的余子式. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

【例 3】 求四阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ -4 & 9 & -5 & -6 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式 M_{23} 和代数余子式 A_{23} .

解 元素 a_{23} 的余子式为划去第二行和第三列后,余下元素按原来顺序构成的三阶行列式,

即元素 a_{23} 的余子式 $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ -4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$.

元素 a_{23} 的代数余子式 A_{23} 为余子式 M_{23} 前再乘代数符号因子 $(-1)^{2+3}$, 即

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ -4 & 9 & -6 \end{vmatrix}.$$

定理 8.1 n 阶行列式 $D_n (n \geq 2)$ 等于它的第一行(任一行或任一列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和. 即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}.$$

根据定理 8.1 知道,一个 n 阶行列式代表一个数值,这个数值可以由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积的和而求得,通常把这定义为按第一行展开.

【例 4】 按不同行(列)分别展开计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解 行列式按第一行展开为:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

按第二行展开为:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

按第三行展开为:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

【例 5】 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开:

$$\begin{aligned} D_4 &= 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \left[(-1) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad 4 \times \left[7 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \right] \\ &= 2 \times [5 + 5 \times (-18 - 4)] + 4 \times [7 \times (-18 - 4) + (6 - 8)] \\ &= -834. \end{aligned}$$

【注】 计算此例可以体会到,如果某一行的零元素越多,按该行展开时计算越方便.

8.1.3 特殊的 n 阶行列式

下面介绍几种特殊的 n 阶行列式.

1. 对角行列式

只在主对角线上有非零元素的行列式称**对角行列式**.

如对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

而

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

2. 三角行列式

上三角行列式:主对角线以下元素全为零的行列式,称为上三角行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

下三角行列式:主对角线以上元素全为零的行列式,称其为下三角行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

【注】 上(下)三角行列式的值均等于主对角线上各元素的乘积.

【例 6】 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 (1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\ & = -a_{12} a_{24} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{12} a_{24} a_{31} a_{43}; \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\ & = -a_{14} a_{23} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = -a_{14} a_{23} \cdot (0 - a_{32} a_{41}) = a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}. \end{aligned}$$