▶ 21世纪大学数学丛书

第二版

高等数学

上册

田立新 主编

ADVANCED MATHEMATICS

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

江苏省高等学校精品教材
21 世纪大学数学丛书

高等数学

（第二版）

上 册

主 编 田立新
编 者 （按姓氏笔画为序）
丁丹平 王学弟 卢殿臣
田立新 冯志刚 孙 梅
李医民 姚洪兴 蔡国梁

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/田立新主编．—2版．—镇江：江苏大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-81130-264-6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①田… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第179201号

内容提要

本书是根据教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程教学改革计划”的精神，参照近年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见，结合多年高等数学课程改革实践编写而成的．全书强化数学思想方法的阐述，以培养学生运用所学知识解决实际问题的能力为出发点，具有注重理论性与应用性相结合的特点．

本书分为上、下两册．上册包括函数与极限、导数与微分、微分学基本定理、微分学应用、不定积分、定积分、定积分的应用、无穷级数等8章．每章附有小结，配有习题、自我检测题及复习题．书末附有二阶和三阶行列式简介、基本初等函数的图形及其主要性质、常用的三角公式、常用曲线和曲面、积分表、习题参考答案．

本书可作为高等院校各专业高等数学课程的教材，也可作为各专业的教学参考书．

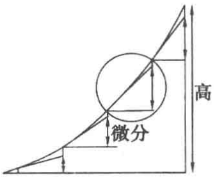
高等数学　上册

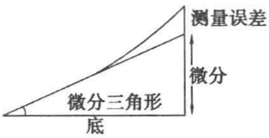
主　　编/田立新
责任编辑/段学庆
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷30号(邮编：212003)
电　　话/0511-84443089
传　　真/0511-84446464
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/787 mm×960 mm　1/16
印　　张/25
字　　数/504千字
版　　次/2011年9月第2版　2011年9月第5次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-264-6
定　　价/32.50元

如有印装质量问题请与本社发行部联系(电话：0511-84440882)

序

江苏是教育强省(例如据统计江苏籍院士约占两院院士的 25%)，江苏大学则是其最高学府之一，坐落在名城镇江，拥有焦山、金山、北固山、南山，得天独厚，令人神往. 我讲这山那山，因为微积分来自登山：每登山一步就做了一次微分，登到山顶便做完积分. 请看下面的登山图：





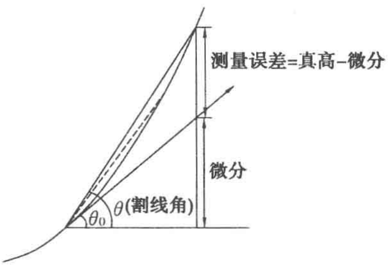
以图代文，以看代想，这里山坡的一小段(弯的)换成了切线段(直的)，则登山一步所测出的切线高度

$$\text{微分}=(\text{起点斜率})\cdot(\text{底}),$$

所以说每登山一步就做了一次微分. 但是用微分高代替真高时含有测量误差，即

$$\text{真高}=\text{微分高}+\text{测量误差}.$$

问题来了：这个测量误差有多小？能不能保证它尽量小？其实这个测量误差不是别的，它就是切线到曲线的一段距离. 什么是切线呢？既然它是在起点附近最靠近曲线的那一根直线，那么它要比其他直线(割线)到曲线的距离小得多，写成



$$\frac{\text{切线测量误差}}{\text{割线测量误差}}\ll 1,$$

简单些，将分母换成小底，得 $\text{相对误差}=\dfrac{\text{切线测量误差}}{\text{底}}\ll 1,$

$$\text{相对误差}=\frac{\text{测量误差}}{\text{底}}=\frac{\text{真高}}{\text{底}}-\frac{\text{微分}}{\text{底}}=\tan\theta-\tan\theta_0\to 0.$$

下面利用切线的相对误差来推导基本定理，只用两行：

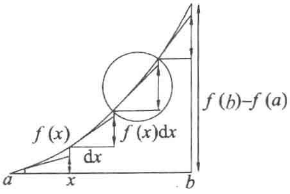
总高＝微分之和＋总误差，

总误差＝测量误差之和＝(相对误差×底)之和≤(最大相对误差)(底之和).

如果最大相对误差≪1，便有总误差≪1，当小到可以忽略，便有理想的等式，即基本定理　总高＝微分之积分.

所以说登到山顶便做完积分，这就是基本定理既直观又严格的白话证明，只用

到切线或微分的整体性质（最大相对误差）以及两行算术，不用其他准备知识、各种符号和巧妙繁长的证明.



示意图

虽然用白话证明微积分的基本定理是可能的，但是遇到更复杂的泰勒展开定理就有点棘手了，无论如何需要用函数语言. 如果山底的分割节点 x 由 a 跑到 b，山坡表述为 $f(x)$，山坡上的斜率（称为一阶导数）表述为 $f'(x)$，微分表述为 $f'(x)\mathrm{d}x$（$\mathrm{d}x$ 为节点 x 附近的变量），那么基本定理表述为 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

由此直接推出泰勒展开式，它只是机械地反复使用基本公式.

常数逼近 $f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} f'(s)\mathrm{d}s : \approx h \underset{[x,x+h]}{\text{upper}} |f'|$；

一次逼近 $f(x+h)-f(x)-hf'(x)=\int_x^{x+h}[f'(s_2)-f'(x)]\mathrm{d}s_2=$

$$\int_x^{x+h}\int_x^{s_2} f''(s_1)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2 : \approx \underset{[x,x+h]}{\text{upper}} |f''| \int_x^{x+h}\int_x^{s_2}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2=\frac{h^2}{2}\underset{[x,x+h]}{\text{upper}} |f''|;$$

二次逼近

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)=\int_x^{x+h}\int_x^{s_3}[f''(s_2)-f''(x)]\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=$$

$$\int_x^{x+h}\int_x^{s_3}\int_x^{s_2} f'''(s_1)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 : \approx \underset{[x,x+h]}{\text{upper}} |f'''| \int_x^{x+h}\int_x^{s_3}\int_x^{s_2}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=\frac{h^3}{3!}\underset{[x,x+h]}{\text{upper}} |f'''|;$$

三次逼近 $f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x) : \approx \frac{h^4}{4!}\underset{[x,x+h]}{\text{upper}} |f^{(4)}|$；

等等. 这里用到高阶导数（f''，f'''，…），并采用了缩写 $a : \approx b$ 表示 $|a|\leqslant b$. 这是具有累次积分余项的泰勒定理，这个证明最为简单（不用人为地分部积分）.

以上是一元函数微积分中两个最重要，也是最难的定理. 以此为核心，本书讲解了无穷级数、常微分方程、空间解析几何和多元函数微积分，顺序自然，表述清楚. 全书习题适中，每章附有本章小结，配有自我检测题及复习题，这对于学生的学习总结、复习巩固、自我检测、提高综合水平非常有益.

本书是江苏大学数学系的几位教师，根据 21 世纪教学内容和课程体系改革的要求，按照自身多年的教学实践，结合工科院校学科人才培养总体要求和教学特点编写而成. 相信本书的出版能体现高等数学 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，促进高等数学教学改革，通过教学中的因材施教，提高高等数学的教学水平.

中国科学院
数学与系统科学研究院

2007 年 8 月 20 日

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第二版前言

高等数学是大学教育的核心基础课程之一.本教材结构严谨、难易适中、通俗易懂、便于自学，有自己的特色和风格，被评为江苏省高等学校精品教材.

本教材自2007年出版以来，经过多年的教学实践检验，不断进行发展与完善.在第一版的基础上，我们根据教学当中发现的问题与不足，召开教材建设研讨座谈会，跟踪新世纪以来高等数学课程改革和高等数学教材发展的潮流，广泛征求具有丰富教学经验的专家、教授的修改建议和意见，结合自身教学改革成果与经验，进行了第二版的编写.

为了更好地与中学数学相衔接，我们在第一版的基础上对一些教学内容进行适当调整和增删，将部分国家及江苏省教改项目中的一些与之相关的研究成果融入新版教材的编写中.《高等数学》(第二版)力求保留第一版的风格和优点，一方面考虑现阶段大学学生的实际情况和学习特点，另一方面更强调培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，为学生的可持续发展奠定良好的基础.

本教材第二版修订编写工作由田立新教授主持，全书共13章，第1章由卢殿臣教授编写，第2章由孙梅教授编写，第3,4章由田立新教授编写，第5,6章由李医民教授编写，第7,10章由蔡国梁教授编写，第8章由冯志刚教授编写，第9章由丁丹平教授编写，第11,12章由姚洪兴教授编写，第13章由王学弟教授编写.

徐民京教授审阅了全书的修订稿件.刘恂副教授等对全书习题及参考答案进行了仔细的校验.中国科学院数学与系统科学研究院林群院士、上海交通大学乐经良教授、东南大学管平教授、南京理工大学杨孝平教授等对本书的修订提出了许多宝贵意见，对他们的鼓励和支持谨致感谢.

本书仍有许多不足和值得改进之处，衷心希望广大专家、教师、读者批评指正.

编 者

2011年8月

第一版前言

21 世纪大学数学丛书之一《高等数学》是根据教育部提出的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，参照近年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见，作为教育科学“十五”国家规划课题“新世纪工科数学教育改革及创新人才培养”项目(19－106－53)的研究成果，并结合多年高等数学课程教学改革的实践编写的一本教材.

全书分为上、下两册.上册包括一元函数微积分学、无穷级数，下册包括常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分学等.各章节配有习题，同时由本章小结给出各章主要内容和基本要求，各章的自我检测题、复习题便于学生检测和提高，各章的复习题中有些具有一定难度，教师可根据学生的实际情况选用.为了更好地与中学知识衔接和使用本书，书末附有二阶和三阶行列式简介、常用曲线和曲面、积分表和习题参考答案.

在本书编写工作中力求做到讲解数学内容的同时，加强对学生应用能力的培养，结合基本概念、基本定理和基本方法的介绍，考虑到实际应用的背景，注重学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.在一元函数微积分后给出无穷级数、常微分方程、空间解析几何，这样的编排更加强了对多元函数微积分学应用背景的学习及认识.考虑到全书的系统性及深度，书中部分标 * 号的内容，在教学中，根据实际情况，作为拓宽学生高等数学知识面的需要，教师可选讲或不讲.

全书共 13 章，第 1 章函数与极限、第 2 章导数与微分，由王文初编写；第 3 章微分学基本定理、第 4 章微分学应用，由田立新编写；第 5 章不定积分、第 6 章定积分，由李医民编写；第 7 章定积分的应用、第 10 章向量代数与空间解析几何，由蔡国梁编写；第 8 章无穷级数、第 9 章常微分方程，由叶惠民编写；第 11 章多元函数微分法及其应用、第 12 章重积分，由姚洪兴编写；第 13 章曲线积分与曲面积分，由王学弟编写；附录由王学弟整理.全书由田立新、王文初、叶惠民统稿.徐民京教授对全书进行了审阅，做了很多有益的修改，江苏大学数学系教师丁丹平、孙梅、丁娟在本书编写过程中始终给予关注并参与审阅，范兴华、刘恂、殷久利、张剑梅、陈

燕、施晓峰、钱骁勇、赵桃艳、房厚庆等教师为本书润色和修正，提出了许多宝贵意见，李益清、倪华、高安娜等教师对全书的习题及参考答案进行了仔细检查及验证，汤养老师和数学系研究生于水猛、徐俊、李兴光、邸丛颖、周维怀、孟伟业、张广英等也为本书做了不少有益的工作. 在本书出版之际，我们衷心感谢多年来一直关心、帮助、支持我们这本书出版的各位老师和学生. 本书在编写过程中，参考了众多的高等数学方面的教材；在出版过程中，得到了江苏大学出版社领导的大力支持和帮助，责任编辑吴明新、徐云峰为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动，在此一并致以谢意.

限于编写时间仓促，本书不妥与错误之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编 者

2007 年 8 月

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

1 函数与极限

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 连续是函数的一个重要形态. 因此，掌握并运用好极限方法是学好微积分的关键.

本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

1.1 函　　数

1.1.1 集　　合

1）集合的概念

集合是指所考察的具有共同特征的对象的总体，集合简称集. 例如某校一年级学生全体组成了一个集合；平面上过某个定点的直线全体组成了一个集合；能够被 3 整除的自然数的全体组成了一个集合等等. 组成集合的每一个对象称为该集合的元素，简称元.

通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素，若 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于 A，记作 $x\in A$；若 x 不是 A 的元素，则称 x 不属于 A，记作 $x\overline{\in} A$ 或 $x\notin A$.

表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，另一种是描述法.

所谓列举法，就是把集合中全体元素一一列举出来并写在大括号内. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

所谓描述法，就是把集合中的元素的公共特征描述出来. 例如集合 B 由具有某种特性的元素 x 的全体组成，记作 $B=\{x|x$ 具有的特征$\}$. 大括号内竖线左侧是这个元素的一般形式，竖线右侧是这个集合的元素所具有的公共特征. 例如，集合 M 是由满足 $x^2-4x+3\geqslant 0$ 的 x 的全体组成的集合，记作

$$M=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}.$$

由有限个元素组成的集合称为有限集，由无穷多个元素组成的集合称为无限集. 不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.

通常用$\mathbf{N}$表示非负整数(自然数)集，用$\mathbf{Z}$表示整数集，用$\mathbf{Q}$表示有理数集，用$\mathbf{R}$表示实数集，用$\mathbf{C}$表示复数集，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\};$$

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}^{+}, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

在表示数集的字母右上角标上的“+”表示该数集内去掉 0 和负数以后的集合. 例如，

$$\mathbf{N}^{+}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}.$$

2）**集合的运算**

设A,B是两个集合，若A的每个元素都是B的元素，则称A是B的子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$. 对于任一集合A，因为$\varnothing\subset A$，$A\subset A$，所以$\varnothing$，A都是集合A的子集.

若两个集合A,B满足$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与B相等，记作$A=B$.

若$A\subset B$，且$A\neq B$，则称A是B的真子集.

集合有下列几种基本运算：

设A,B为两个集合，由所有属于A或属于B的元素组成的集合，称为集合A与B的并集(简称并)，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由所有既属于A又属于B的元素组成的集合，称为集合A与B的交集(简称交)，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由所有属于A但不属于B的元素组成的集合，称为集合A与B的差集(简称差)，记作$A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\}.$$

假设考察的集合都是集合I的子集，称I为全集或基本集，称差集合$I\backslash A$为A在I中的余集或补集，记作A^{C}，即

$$A^{C}=I\backslash A=\{x\,|\,x\in I \text{ 但 } x\notin A, A\subset I\}.$$

集合的运算可用图 1-1 直观表示(图中阴影部分为运算结果).

集合的运算有下列性质：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com