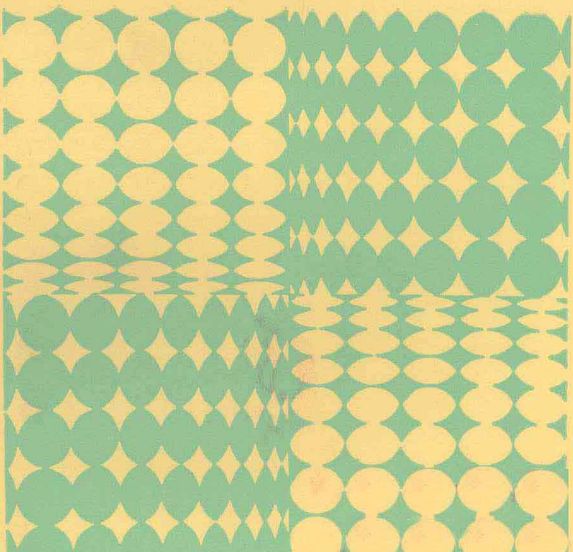
九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

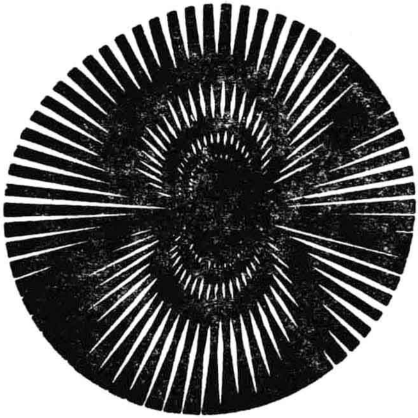
四边形

曾家骏



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编　罗四维　杨泰良

四边形

曾家骏

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

(川)新登字005号

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物
四边形 曾家骏

四川教育出版社出版发行 (成都盐道街三号)
四川省新华书店经销 内江新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张4.25 插页1 字数75千
1992年8月第一版 1992年8月第一次印刷
印数：1—4740册

ISBN7-5408-1738-0/G·1660 定价：1.53元

前　言

这套读物主要是为初中学生而写的．我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用．

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触．作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间．书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事．在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力．为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的．这就是编写这套读物的初衷．

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）．各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用.本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用.我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用.

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正.

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿.

1992年2月

目 录

一　从三角形到四边形……………………（ 2 ）
§1　四边形有稳定性吗？……………………（ 2 ）
§2　四边形的边和角的限制条件…………（ 5 ）
§3　与四边形有关的证明和计算…………（ 6 ）
二　平行四边形……………………………（ 13 ）
§1　平行四边形　平行移动………………（ 13 ）
§2　矩形　菱形
　　黄金矩形——奇妙的分割……………（ 24 ）
§3　正方形　图形的旋转…………………（ 28 ）
三　梯形　其它特殊四边形………………（ 46 ）
§1　梯形　等腰梯形　直角梯形…………（ 46 ）
§2　其它特殊四边形………………………（ 58 ）
四　四边形的面积…………………………（ 65 ）
§1　四边形的面积计算公式………………（ 65 ）
§2　面积法——一种重要的解题方法……（ 80 ）
五　四边形与其它图形的位置关系………（ 91 ）
§1　四边形与三角形、其它四边形的互接
　　………………………………………（ 91 ）
§2　圆的内接四边形　外切四边形　双圆
　　四边形…………………………………（ 103 ）
附：练习题的提示、略证、答案…………（ 119 ）

四边形是人们最熟悉的平面图形！在日常生活中，你随处可见各种四边形形状的物件。坐在教室里，面前的课桌、书本、文具盒、讲台上的黑板、教室的门窗、四周的墙壁……都是四边形形状的；回到家里，你熟悉的衣柜、书架、床、桌凳、沙发，还有你喜爱的电视机、收录机……不也是四边形形状的吗？当你漫步在校园里，大街上，田野间，你还会发现许许多多的四边形形状的实物呈现在眼前．看来，与你接触最多的物件几乎都是四边形形状的．

古代劳动人民早就注意到四边形的重要性，并开始研究它．几何学的发源，就是从丈量土地，修筑堤坝，盖建房屋……这些与四边形有关的实践活动中开始的．

四边形是边数仅比三角形多的最简单的多边形，又是比三角形复杂的几何图形．四边形，特别是特殊四边形有许多重要而有趣的性质．本书着重研究凸四边形的性质，文中提到的四边形若非特别说明都是指凸四边形．

一　从三角形到四边形

用一条对角线就把一个四边形分成了两个三角形．因此四边形的许多性质可以借助三角形来研究．在本节中我们将把三角形与四边形的一些性质通过对比进行讨论．

§1　四边形有稳定性吗？

我们已经知道三角形具有“稳定性”，即如果一个三角形的三条边的长度固定了，这个三角形的形状大小就完全确定了．人们常常利用三角形的这个性质来固定一些物件的形状，如屋架、门框、桌凳等．

为什么三角形具有稳定性？这是因为，所有三边对应相等的三角形是全等的（全等三角形的“边边边定理”）．既然如此，一个三角形的三边长度确定后就不能再变形了．除此之外，一些其它的三个条件也可以确定一个三角形．但这些条件必须是相互独立的，任何一个条件不能由其它条件推出．已知三个角就不能确定三角形．比如老师教学用的

教具三角板和同学们画图用的小三角板三个角都分别相等，但它们显然不能完全重合，即不全等．因为三角形的三个内角不互相独立，已知其中两个角，第三个角就知道了．确定三角形的三个独立条件也不一定全是边和角，还可以是三角形的其它元素．如两边和其中一边上的中线；两条边和其中一边上的高，等等．

四边形有没有这种“稳定性”呢？如果四边形的四条边长度完全固定了，这个四边形的形状大小是否就确定了呢？你不妨用四根小木条钉成一个四边形，试一下，就会发现，这种四边形是“活动”的，可以变出许多四边形来，即它的形状大小不能确定．因此我们说，在这种意义下，四边形是没有“稳定性”的．

确定一个四边形需要几个条件呢？一般说来需要五个独立条件．例如，不仅知道四边形的四条边的长度，还知道它的一个内角的大小，这个四边形的形状大小就完全确定了．在四边形$ABCD$中，知道四边长$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，且$\angle A=\alpha$，（这里a、b、c、d是已知线段，α是已知角）可以这样作出此四边形：

先利用“边、角、边”的条件作出$\triangle ABD$，使$AB=a$，$AD=d$，$\angle A=\alpha$，再利用“边边边”的条件在$\triangle ABD$外作$\triangle BDC$，使它的边BD即$\triangle ABD$的边BD，且$DC=c$，$CB=b$．这时四边形$ABCD$完全符合条件要求，见图1－1．

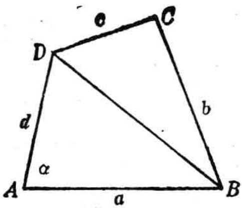


图1—1

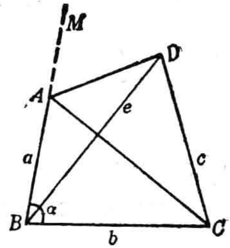


图1—2

以下的“五个独立条件组”也可以确定四边形：

已知四边及一条对角线；

已知三边及其中两组邻边的夹角；

已知两条邻边及三个内角（注意：这时第四个内角也已确定了）；

已知三边，其中两边的夹角及过这个角顶点的对角线；……

现在把前三种情形的作图留给有兴趣的同学研究，让我们一起来研究第四个问题吧！

已知：线段a，b，c，e，角α

求作：四边形$ABCD$，使得$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，对角线$BD=e$，$\angle ABC=\alpha$.

分析：假设符合条件的四边形$ABCD$已作出，如图1—2．我们注意到在$\triangle ABC$中已知两边及夹角，$\triangle BDC$中已知三边，它们都完全确定了，这时四边形$ABCD$也随之确定了．由先作$\triangle ABC$，或先作$\triangle BDC$，可得出以下两种作法．

作法一：①作$\triangle ABC$，使$AB=a$，$BC=b$，$\angle ABC=\alpha$．②分别以B、C为圆心，e和c为半径画弧，二弧相交于D（D与A在BC的同侧）．③连BD、CD、AD，则四边形$ABCD$即为所求．

作法二：①作$\triangle BDC$，使$BC=b$，$BD=e$，$DC=c$．②以B为顶点，BC为一边，在与D同侧的半平面上作$\angle MBC=\alpha$．③在射线BM上截取$BA=a$，连接AD，则四边形$ABCD$即为所求．

不难验证：用这两种方法作出的四边形$ABCD$都完全符合要求．

如果我们把“稳定性”理解成是形状大小完全确定，那么也可以说，四边一角固定的四边形是“稳定”的，三个内角及二邻边固定的四边形是“稳定”的，……．

不知你注意过没有：有的窗户上钉有角铁，有的没有竣工的房屋的门框上斜钉了一块木条．工人们为什么这样作？现在你不难回答这种问题了．因为仅靠窗户或门框的四条边不足以稳定四边形．如果再加上一个条件，如一个角或一条对角线，这个四边形就确定（稳定）了．

§2 四边形的边和角的限制条件

我们已经知道，任意三角形中三个内角都在0°

—180°之间，并且三个内角的和为180°；任意两边之和大于第三边；任意两边之差小于第三边．对四边形，它的边和角有没有类似的条件限制呢？

我们首先研究对内角的限制．显然凸四边形的每个内角都在0°—180°之间（因若有大于180°的内角时就不再是凸四边形了），并且四个内角的和为360°．所以凸四边形的四个内角中最多有三个锐角，至少有一个钝角或直角．

其次，再来研究对于边的限制．由于连接两点的所有线中以线段最短．所以四边形任意三边之和大于第四边，任意两边之和大于另外两边之差．后一结论可由前一接论直接推出：由$a+b+c>d \Longrightarrow a+b>d-c$，由$a+b+d>c \Longrightarrow a+b>c-d$．$\therefore\ a+b>|c-d|$．除此之外还不难证明：四边形四边之和大于两条对角线之和；任一组对边之和小于两条对角线之和；任一条对角线小于与它相邻的二边之和；……等等．

§3　与四边形有关的证明和计算

一般四边形所共有的性质实在不太多，因此关于一般四边形的证明计算问题仍然主要是利用三角形的有关性质进行的．为此常常需要添加辅助线，把四边形的问题转化为三角形的问题来解决．

例1 如图1—3，在四边形$ABCD$中，$\angle D>\angle B$，AF平分$\angle DAB$，CG平分$\angle DCB$，AF与CG相交于F，求证$\angle AFG=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$

分析：本题是证角的相等关系，可考虑利用多边形（包括三角形）内角和定理、外角定理等。

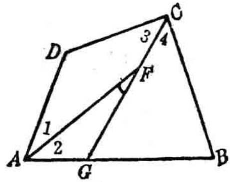


图1—3

证法一：∵ 四边形$AFCD$、$ABCD$内角和均为360°，且$\angle AFG=180°-\angle AFC$。

但$\angle AFC=360°-\angle D-\angle 1-\angle 3$

$$=360°-\angle D-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle C$$

$$=(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)-\angle D-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle C$$

$$=\frac{1}{2}\angle A+\angle B+\frac{1}{2}\angle C,$$

∴ $\angle AFG=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)-\left(\frac{1}{2}\angle A+\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)$

$$=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B).$$

证法二：由三角形外角定理，得

$\angle AFG=\angle CGB-\angle 2$

$$=(180°-\angle B-\angle 4)-\frac{1}{2}\angle A$$

$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)-\angle B$$

$$-\frac{1}{2}\angle C-\frac{1}{2}\angle A$$

$$=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B).$$

注意：以上利用了代换$360^\circ=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$，$180^\circ=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)$.

例2　D、E是$\triangle ABC$内的二点，四边形$BEDC$是凸四边形．求证：四边形$BEDC$的周长小于$\triangle ABC$的周长（见图1—4）．

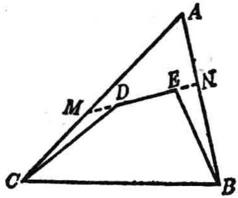


图1—4

分析：四边形$BEDC$与$\triangle ABC$有一条公共边BC，故本题只需证明$CD+DE+EB<AC+AB$．这是涉及线段和的不等关系问题，通常要利用"三角形两边之和大于第三边"这一结论．为此应想法使CD、DE、EB等线段成为三角形的边或边的一部份．

证明：将线段DE两方分别延长交AC于M，交AB于N，则

在$\triangle MCD$中，有$MC+MD>CD$，

在$\triangle ENB$中，有$EN+NB>EB$，

而在$\triangle AMN$中，有$AM+AN>MN=MD+DE+EN$．

将以上三个同向不等式两边相加并整理，则

有$AM+MC+AN+NB>CD+EB+DE$,

即 $AC+AB>CD+DE+EB$,

$\therefore$ $AC+AB+CB>CD+DE+EB+BC$.

本题结论可以推广，即三角形的周长大于与它有一条公共边且包含在此三角形内的任意边数的凸多边形的周长.

例 3 若四边形的一组对角的平分线相交在一条对角线上，试证它的另一组对角的平分线相交在另一条对角线上.

已知：如图1—5，四边形$ABCD$中，$\angle BAD$和$\angle BCD$的平分线的交点E在对角线BD上.

求证：$\angle ABC$和$\angle ADC$的平分线的交点在AC上.

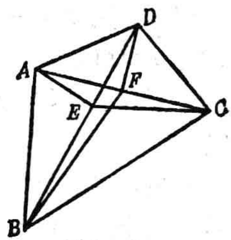


图1—5

分析：从题目的条件和结论出发，似应考虑利用三角形内角平分线定理及有关比例性质.

证明：$\because AE$、CE分别平分$\triangle BAD$和$\triangle BCD$的内角$\angle BAD$和$\angle BCD$,

$$\therefore \frac{BA}{AD}=\frac{BE}{ED}=\frac{BC}{CD}，即\frac{BA}{BC}=\frac{DA}{DC} \quad (1)$$

设$\angle ABC$的平分线交AC于F，连DF.

$$则\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{FC} \quad (2)$$

由(1)、(2) $\therefore$ $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC}$.

由三角形内角平分线定理的逆定理，∴ FD平分$\angle ADC$，即$\angle ABC$和$\angle ADC$的平分线交点F在对角线AC上.

注意：本题没有先直接作出$\angle ABC$和$\angle ADC$的平分线的交点，再证此交点在AC上，或此交点与A、C三点共线. 而是先作出$\angle ABC$的平分线与AC的交点F，再连FD，并证FD平分$\angle ADC$，这就大大降低了本题的难度.

例4　见图1—6，四边形$ABCD$的两条对角线AC、BD相交于O，AB、BC、CD的中点分别是E、F、G，直线GO与直线FE相交于P，求证$PB\parallel DC$.

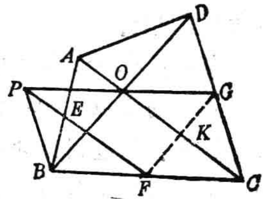


图1—6

分析：本题条件中有三条线段的中点，应考虑与线段中点有关的定理，如三角形中位线定理等. 又本题结论是证$PB\parallel DC$，从角的关系似不易入手，由于中位线产生平行线，进而得到线段比例关系，可考虑利用线段比例关系证直线平行.

证明：连接FG，设交OC于K. 由三角形中位线定理，有$EF\parallel AC$，$FG\parallel BD$，

$$\therefore\quad \frac{BO}{FK}=\frac{OC}{KC}=\frac{OD}{KG}，\text{即}\frac{BO}{OD}=\frac{FK}{KG}.$$

又在$\triangle PFG$中，∵ $OK\parallel PF$，

$$\therefore\quad \frac{FK}{KG}=\frac{PO}{OG}，\quad\therefore\quad \frac{BO}{OD}=\frac{PO}{OG}.$$

由平行线截得比例线段定理的逆定理，
$\therefore$ $PB\parallel DG$，即$PB\parallel DC$。

练习一

1. 已知线段a、b、c、d、e，角α，β，γ，求作四边形$ABCD$，使得

（1）$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$AC=e$；

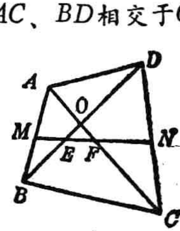
（2）$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$\angle ABC=\alpha$，$\angle BCD=\beta$；

（3）$AB=a$，$BC=b$，$\angle DAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCD=\gamma$。

2. 求证：任意四边形两条对角线之和小于其周长而大于周长之半。

3. 一个凸多边形所有内角与一个外角的和为1992°，问：它有多少条边？

4. 四边形$ABCD$的两条对角线AC、BD相交于O，$AC=BD$，M、N分别是AB、DC的中点，MN交BD于E，交AC于F。求证：$OE=OF$。



第4题图

5. 求证：四边形一组对边中点的连线长小于或等于另一组对边的和的一半。在相等关系成立时，这个四