

# 高等数学

经管类

(下册)

西南财经大学高等数学教研室 编



科学出版社

# 高等数学

(经管类)下册

西南财经大学高等数学教研室 编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是依据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的经济类本科微积分课程教学基本要求,参考了近年来经济管理类硕士研究生入学统一考试中的数学考试大纲,根据编者长期在财经类高校担任“经济数学”课程教学和科研工作的经验编写而成的.全书分为上、下两册,本书为下册,共5章,分别是多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程.书末还附有数学实验(下)和习题答案与提示.

本书可作为高等院校经济管理类专业微积分课程的教材,也可作为非数学类专业学生的微积分教材或参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类.下册/西南财经大学高等数学教研室编.——北京:科学出版社,2013

ISBN 978-7-03-037857-6

I. ①高… II. ①西… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 130395 号

责任编辑:胡云志 任俊红 李香叶 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:阎磊 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2013 年 7 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2013 年 7 月第一次印刷 印张:16 1/2

字数:433 000

定价:33.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 目 录

第 7 章 多元函数微分学	1
7.1 空间解析几何基本知识	1
7.1.1 空间直角坐标系	1
7.1.2 空间两点间的距离	2
7.1.3 空间曲面与方程	3
7.1.4 空间曲线及其方程	10
7.1.5 空间曲线在坐标面上的投影	11
习题 7.1	12
7.2 多元函数的基本概念	13
7.2.1 平面点集	14
7.2.2 多元函数的概念	15
7.2.3 二元函数的极限	17
7.2.4 二元函数的连续性	19
习题 7.2	21
7.3 偏导数	22
7.3.1 偏导数的定义及其计算	22
7.3.2 高阶偏导数	24
* 7.3.3 偏导数在经济分析中的应用	26
习题 7.3	29
7.4 全微分	30
7.4.1 全微分的定义	31
7.4.2 可微与连续、可偏导之间的关系	31
* 7.4.3 全微分在近似计算中的应用	33
习题 7.4	34
7.5 多元复合函数与隐函数的求导法则	34
7.5.1 多元复合函数的求导法则	34
7.5.2 隐函数的求导法则	39
习题 7.5	43
7.6 多元函数的极值与最值	45
7.6.1 二元函数的极值	45
7.6.2 条件极值问题	47
7.6.3 多元函数的最值	51
* 7.6.4 最小二乘法	54
习题 7.6	57
总习题七	58

<b>第 8 章 重积分</b> .....	62
8.1 二重积分的概念及其性质 .....	62
8.1.1 二重积分的概念 .....	62
8.1.2 二重积分的性质 .....	64
习题 8.1 .....	67
8.2 二重积分的计算 .....	68
8.2.1 直角坐标系下二重积分的计算 .....	68
8.2.2 极坐标系下二重积分的计算 .....	74
* 8.2.3 二重积分的换元法 .....	77
习题 8.2 .....	78
8.3 二重积分的应用 .....	80
8.3.1 二重积分的几何应用 .....	80
8.3.2 二重积分在经济管理中的应用 .....	81
习题 8.3 .....	83
* 8.4 反常二重积分与三重积分简介 .....	83
8.4.1 反常二重积分 .....	83
8.4.2 三重积分 .....	85
* 习题 8.4 .....	87
* 8.5 含参变量的积分 .....	87
8.5.1 被积函数含参变量的积分 .....	87
8.5.2 积分限含参变量的积分 .....	90
* 习题 8.5 .....	90
总习题八 .....	91
<b>第 9 章 无穷级数</b> .....	94
9.1 常数项级数的概念和性质 .....	94
9.1.1 常数项级数的概念 .....	94
9.1.2 无穷级数的基本性质 .....	98
习题 9.1 .....	100
9.2 正项级数 .....	101
9.2.1 正项级数的概念 .....	101
9.2.2 正项级数敛散性的判别法 .....	102
习题 9.2 .....	108
9.3 任意项级数 .....	109
9.3.1 交错级数及其敛散性判别 .....	109
9.3.2 绝对收敛与条件收敛 .....	111
习题 9.3 .....	113
9.4 幂级数 .....	114
9.4.1 函数项级数的概念 .....	114
9.4.2 幂级数及其敛散性 .....	115
9.4.3 幂级数的基本性质 .....	120
习题 9.4 .....	123

9.5 函数的幂级数展开 .....	123
9.5.1 泰勒级数 .....	123
9.5.2 函数的幂级数展开 .....	125
习题 9.5 .....	130
* 9.6 幂级数在数值计算中的应用 .....	130
9.6.1 函数值的近似计算 .....	131
9.6.2 积分的近似计算 .....	131
习题 9.6 .....	132
总习题九 .....	133
<b>第 10 章 微分方程</b> .....	<b>136</b>
10.1 微分方程的基本概念 .....	136
10.1.1 引例 .....	136
10.1.2 微分方程的基本概念 .....	137
习题 10.1 .....	139
10.2 一阶微分方程 .....	139
10.2.1 可分离变量的微分方程 .....	140
10.2.2 齐次方程 .....	141
10.2.3 一阶线性微分方程 .....	145
* 10.2.4 伯努利方程 .....	148
习题 10.2 .....	148
10.3 可降阶的高阶微分方程 .....	150
10.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 .....	150
10.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 .....	150
10.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 .....	152
习题 10.3 .....	153
10.4 高阶线性微分方程 .....	153
10.4.1 线性微分方程的解的结构 .....	153
10.4.2 常系数齐次线性微分方程的解法 .....	155
10.4.3 常系数非齐次线性微分方程的解法 .....	159
10.4.4 欧拉方程 .....	166
习题 10.4 .....	168
10.5 常系数线性微分方程组解法举例 .....	169
习题 10.5 .....	171
10.6 微分方程在经济学中的应用 .....	172
10.6.1 市场动态均衡价格模型 .....	172
10.6.2 人口增长模型 .....	173
10.6.3 提高劳动生产率模型 .....	174
10.6.4 具有价格预期的市场模型 .....	175
习题 10.6 .....	176
总习题十 .....	177

<b>* 第 11 章 差分方程</b> .....	179
11.1 差分与差分方程的概念 .....	179
11.1.1 差分的概念与性质 .....	179
11.1.2 差分方程的概念 .....	181
11.1.3 常系数线性差分方程解的结构 .....	182
习题 11.1 .....	183
11.2 一阶常系数线性差分方程 .....	183
11.2.1 一阶常系数齐次线性差分方程 .....	183
11.2.2 一阶常系数非齐次线性差分方程 .....	184
习题 11.2 .....	189
11.3 二阶常系数线性差分方程 .....	189
11.3.1 二阶常系数齐次线性差分方程的求解 .....	189
11.3.2 二阶常系数非齐次线性差分方程 .....	191
习题 11.3 .....	194
11.4 差分方程在经济学中的应用 .....	195
11.4.1 教育储蓄问题 .....	195
11.4.2 购房还贷问题 .....	196
11.4.3 价格与库存量问题 .....	196
11.4.4 国民收入的稳定性问题 .....	197
习题 11.4 .....	199
总习题十一 .....	200
<b>数学实验(下)</b> .....	202
S.6 空间解析几何 .....	202
习题 S.6 .....	212
S.7 多元函数微分学 .....	212
S.7.1 验证性实验 .....	212
S.7.2 设计性实验 .....	218
习题 S.7 .....	220
S.8 多元函数积分学 .....	220
S.8.1 验证性实验 .....	221
S.8.2 设计性实验 .....	226
习题 S.8 .....	227
S.9 级数及应用 .....	228
S.9.1 验证性实验 .....	228
S.9.2 设计性实验 .....	231
习题 S.9 .....	232
S.10 微分方程 .....	233
S.10.1 验证性实验 .....	233
S.10.2 设计性实验 .....	237
习题 S.10 .....	238
<b>习题参考答案与提示</b> .....	240



## 第 7 章 多元函数微分学

前面各章节讨论了一元函数的极限、连续性、微分和积分等问题. 但不论在数学的理论问题还是在实际问题的研究中所遇到的函数, 往往并不仅仅依赖于一个自变量, 而是依赖于多个自变量. 因此需要研究多变量函数, 即多元函数(二元及二元以上的函数). 多元函数微分学是一元函数微分学的推广, 与一元函数微分学相比, 多元函数微分学有许多性质和一元函数微分学相类似, 但从一元函数到多元函数有本质上的飞跃, 而从二元函数到三元及三元以上的函数则只是技巧性的差异, 无实质上的不同. 本章在一元函数微分学的基础上, 将以二元函数为背景, 研究多元函数的微分及其应用.

通过本章的学习, 掌握多元函数微分学的基本理论以及运用此理论解决几何、经济与管理等领域的实际问题的具体方法.

### 7.1 空间解析几何基本知识

与平面解析几何相类似, 通过建立空间直角坐标系, 就可把空间中的点与有序数组(称为该点的坐标)联系起来, 从而可用代数方法来研究空间中几何图形的性质. 例如, 平面解析几何使一元微积分学有了直观的几何意义, 空间解析几何也能给多元函数提供直观的几何解释, 因此在学习多元函数的微积分之前, 先介绍空间解析几何的基本知识.

#### 7.1.1 空间直角坐标系

过空间定点  $O$  作三条相互垂直的数轴, 它们都以  $O$  为原点, 并且它们有相同的长度单位. 将这三条数轴分别记为  $x$  轴(横轴),  $y$  轴(纵轴),  $z$  轴(竖轴), 统称为坐标轴(coordinate axes), 通常把  $x$  轴和  $y$  轴配置在水平面上, 而把  $z$  轴配置在铅直线上. 各轴正方向通常按下述右手法则(right-handed system)确定: 以右手握住  $z$  轴, 让右手的四个手指从  $x$  轴的正向以  $\frac{\pi}{2}$  的角度转向  $y$  轴的正向时, 大拇指所指的方向即为  $z$  轴的正向, 如图 7.1.1 所示. 这样就建立了一个空间直角坐标系(rectangular coordinate system in three-dimensional space), 记为  $Oxyz$ , 点  $O$  称为坐标原点(coordinate origin).

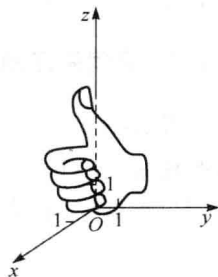


图 7.1.1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样确定出的三个平面统称为坐标平面(coordinate planes), 简称为坐标面. 由  $x$  轴和  $y$  轴确定的坐标面称为  $xy$  坐标面, 类似地有  $yz$  坐标面、 $zx$  坐标面. 这三个坐标面把整个空间分成八个部分, 每一部分称为一个卦限(octants), 如图 7.1.2 所示.  $x, y, z$  轴的正半轴所在的卦限称为第 I 卦限, 从第 I 卦限开始, 从  $Oz$  轴的正向向下看, 按逆时针方向, 先后出现的卦限依次称为第 II, III, IV 卦限; 第 I, II, III, IV 卦限下面的空间部分依次称为第 V, VI, VII, VIII 卦限.

设  $M$  是空间的一点, 过点  $M$  分别作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的平面, 与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的交点依次为  $P, Q, R$ , 如图 7.1.3 所示, 且这三点在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的坐标依次为  $x, y, z$ ,



则空间中的点  $M$  就唯一地确定了一个有序数组  $(x, y, z)$ ; 反之, 给定一个有序数组  $(x, y, z)$ , 先在  $x$  轴上取坐标为  $x$  的点  $P$ , 在  $y$  轴上取坐标为  $y$  的点  $Q$ , 在  $z$  轴上取坐标为  $z$  的点  $R$ , 然后过  $P, Q$  和  $R$  点分别作  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的垂直平面, 这三个垂直平面确定了唯一的交点  $M$ . 由此就建立了空间的点  $M$  与有序数组  $(x, y, z)$  之间的一一对应关系, 如图 7.1.3 所示. 称有序数组  $(x, y, z)$  为点  $M$  的坐标 (coordinate), 记为  $M(x, y, z)$ , 并称  $x, y, z$  分别为点  $M$  的横坐标 (abscissa), 纵坐标 (ordinate), 竖坐标 (vertical coordinates).

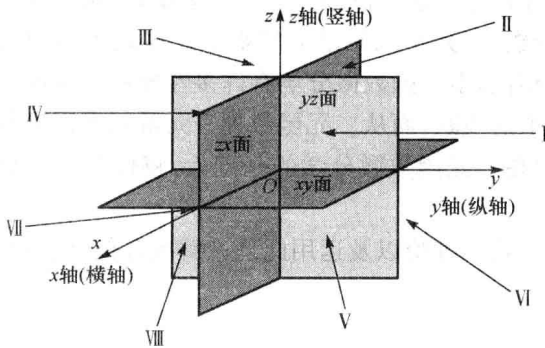


图 7.1.2

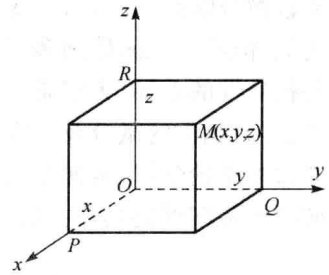


图 7.1.3

显然, 原点  $O$  的坐标为  $(0, 0, 0)$ . 坐标轴和坐标面上的点的坐标各有一定的特征, 即坐标轴上的点至少有两个坐标为 0, 坐标面上的点至少有一个坐标为 0. 例如,  $x$  轴上的点, 都有  $y = z = 0$ ;  $y$  轴上的点, 都有  $x = z = 0$ ;  $z$  轴上的点, 都有  $x = y = 0$ .  $xy$  坐标面上的点, 都有  $z = 0$ ;  $yz$  坐标面上的点, 都有  $x = 0$ ;  $xz$  坐标面上的点, 都有  $y = 0$ .

在实数轴上, 实数  $x$  与数轴上的点是一一对应的; 在平面上, 两个数组成的有序数对  $(x, y)$  与平面上的点是一一对应的; 在三维空间中, 建立空间直角坐标系后, 三个数组成的有序数组  $(x, y, z)$  与空间中的点是一一对应的. 由此, 我们可以推广, 四个数组成的有序数组  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  与四维空间中的点是一一对应的. 一般地,  $n$  个数组成的有序数组  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  称为  $n$  维空间中的点, 并用  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  维空间.

### 7.1.2 空间两点间的距离

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间任意两点, 如图 7.1.4 所示, 下面来求它们之间的距离  $d = |M_1M_2|$ .

过点  $M_1, M_2$  各作三个平面分别垂直于三条坐标轴, 可得如图 7.1.4 所示的长方体. 从而

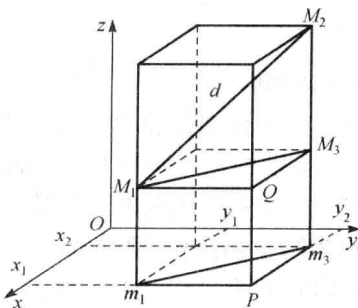


图 7.1.4

$$\begin{aligned}
 d^2 &= |M_1M_2|^2 \\
 &= |M_1M_3|^2 + |M_2M_3|^2 \quad (\text{因 } \triangle M_1M_2M_3 \text{ 为直角三角形}) \\
 &= |M_3Q|^2 + |M_1Q|^2 + |M_2M_3|^2 \quad (\text{因 } \triangle M_1QM_3 \text{ 为直角三角形}) \\
 &= |m_3P|^2 + |m_1P|^2 + |M_2M_3|^2 \\
 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,
 \end{aligned}$$

从而得到  $M_1$  和  $M_2$  两点之间的距离公式 (distance formula)

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \quad (7.1.1)$$

特别地,点  $M(x, y, z)$  与坐标原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7.1.2)$$

**例 1** 在  $yz$  坐标面上求一点  $M$ , 使它的竖坐标为 1, 且与点  $(1, 2, 0)$  和点  $(-2, 1, -4)$  的距离相等.

**解** 因为所求点在  $yz$  坐标面上, 所以设该点为  $(0, y, 1)$ , 由题意, 得

$$\sqrt{(0-1)^2 + (y-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(0+2)^2 + (y-1)^2 + (1+4)^2},$$

解得  $y = -12$ , 于是所求点为  $(0, -12, 1)$ .

### 7.1.3 空间曲面与方程

在日常生活中, 经常会看到各种各样的曲面, 如体育器材中各种球的表面、反光镜的镜面等. 把任何曲面(curve)都理解为满足一定条件的点的几何轨迹, 那么与平面解析几何相仿, 空间解析几何可以利用空间坐标法, 把由空间中满足一定条件的点的几何图形——曲面和代数方程联系起来.

由平面解析几何知, 当取定平面直角坐标系  $xOy$  后, 对于坐标平面上的一条曲线, 都可以用一个二元方程

$$F(x, y) = 0 \text{ 或 } y = f(x)$$

来表示, 即曲线上任意一点的坐标都满足该方程; 反过来, 满足方程的任意一个解构成的有序数对  $(x, y)$  一定是曲线上某一点的坐标.

对于空间中的曲面  $\Sigma$ , 当建立空间直角坐标系  $Oxyz$  后, 如果曲面  $\Sigma$  上的任意点  $M$  的坐标  $(x, y, z)$  与一个三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \text{ 或 } z = f(x, y) \quad (7.1.3)$$

有如下关系:

- (1) 曲面  $\Sigma$  上的任意点的坐标都满足方程(7.1.3);
- (2) 不在曲面  $\Sigma$  上的点的坐标都不满足方程(7.1.3),

则称方程(7.1.3)是曲面  $\Sigma$  的方程, 而曲面  $\Sigma$  是方程(7.1.3)的图形, 如图 7.1.5 所示.

这样, 就可利用方程来研究曲面. 关于曲面的讨论有下列两个基本问题:

(1) 已知曲面  $\Sigma$  上点的几何轨迹, 建立该曲面方程;

(2) 已知方程  $F(x, y, z) = 0$ , 研究此方程所表示的曲面形状.

如果  $F(x, y, z) = 0$  是一次方程, 那么在空间直角坐标系中所表示的曲面称为一次曲面, 即平面(plane); 在平面解析几何中, 将二元二次方程表示的曲线称为二次曲线, 那么空间解析几何中, 如果  $F(x, y, z) = 0$  是三元二次方程, 则它所表示的图形为空间中的曲面, 称为二次曲面(quadratic surface).

下面主要介绍多元微积分学中经常用到的空间曲面.

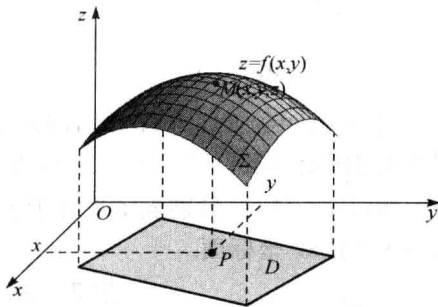


图 7.1.5

1. 平面

**例 2** 若点  $M(x, y, z)$  到两定点  $A(-1, 2, 1)$  和  $B(2, 3, -1)$  的距离相等, 求点  $M$  的轨迹方程.

**解** 由题意知

$$|AM| = |BM|.$$

由距离公式(7.1.1), 得

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2},$$

化简上式, 得到三元一次方程

$$3x + y - 2z - 4 = 0.$$

**注** 到两定点  $A$  和  $B$  的距离相等的动点  $M$  的轨迹称为连接这两定点的线段  $AB$  的垂直平分面(perpendicular bisector of plane). 例 2 中的方程就是线段  $AB$  的垂直平分面的方程.

平面是曲面的一种特殊形式, 一般地, 三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7.1.4}$$

表示空间中的平面, 其中  $A, B, C, D$  为任意常数且  $A, B, C$  不全为零, 这是空间平面  $\pi$  的一般式方程(general form equation).

下面讨论方程(7.1.4)的一些特殊情形.

当  $D=0$  时, 方程(7.1.4)为  $Ax + By + Cz = 0$ , 表示过原点的平面, 如图 7.1.6 所示.

当  $A=0$  时, 方程(7.1.4)为  $By + Cz + D = 0$ , 表示一个平行于  $x$  轴的平面, 如图 7.1.7(a)所示;

当  $A=D=0$  时, 方程(7.1.4)为  $By + Cz = 0$ , 表示一个通过  $x$  轴的平面, 如图 7.1.7(b)所示.

同样地, 方程  $Ax + Cz + D = 0$  和  $Ax + By + D = 0$  分别表示平行于  $y$  轴,  $z$  轴的平面.

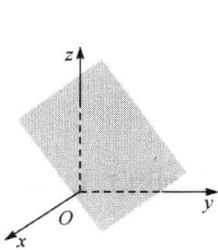
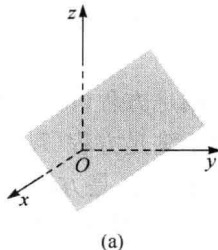
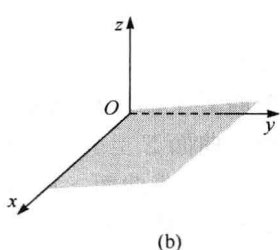


图 7.1.6



(a)



(b)

图 7.1.7

当  $A=B=0$  时, 方程(7.1.4)为  $Cz + D = 0$ , 表示一个平行于  $xy$  坐标面的平面, 如图 7.1.8所示; 当  $A=B=D=0$  时, 方程(7.1.4)为  $z=0$ , 表示  $xy$  坐标面. 同样地, 方程  $Ax + D = 0$  和  $By + D = 0$  分别表示平行于  $yz$  坐标面,  $xz$  坐标面的平面, 方程  $x=0$  和  $y=0$  分别表示  $yz$  坐标面,  $zx$  坐标面.

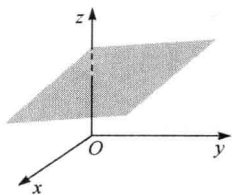


图 7.1.8

**例 3** 求过点  $M_1(a, 0, 0)$ ,  $M_2(0, b, 0)$  和  $M_3(0, 0, c)$  的平面方程, 其中  $abc \neq 0$ .

**解** 设所求平面方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C \text{ 不全为零}).$$

由于点  $M_1, M_2$  和  $M_3$  都在平面上, 所以它们的坐标都满足方程, 从而有

$$\begin{cases} Aa+D=0, \\ Bb+D=0, \\ Cc+D=0, \end{cases}$$

解得

$$A=-\frac{D}{a}, \quad B=-\frac{D}{b}, \quad C=-\frac{D}{c},$$

从而所求平面方程为

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0,$$

消去  $D$ , 得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (7.1.5)$$

方程(7.1.5)称为平面的**截距式方程**(intercept form equation), 其中  $a, b$  和  $c$  分别称为平面在  $x$  轴,  $y$  轴和  $z$  轴上的截距, 如图 7.1.9 所示.

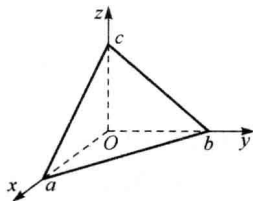


图 7.1.9

## 2. 常见二次曲面及其方程

### (1) 球面.

以定点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为**球心**(center of the sphere), 半径为  $R$  的**球面**(spherical surface), 可以看成动点  $M(x, y, z)$  与球心  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  间的距离相等的几何轨迹, 即

$$|M_0M| = R.$$

由距离公式(7.1.1), 得

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R,$$

即

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (7.1.6)$$

方程(7.1.6)就是满足已知条件的球面方程. 该方程可以写成下述形式

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

特别地, 球心在坐标原点, 半径为  $R$  的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

### (2) 母线平行于坐标轴的柱面.

**定义 1** 在空间中, 动直线  $L$  沿着给定曲线  $C$  平行移动所生成的曲面, 称为**柱面**(cylinder). 动直线  $L$  的每一位置称为柱面的一条**母线**(ruling), 定曲线  $C$  称为柱面的**准线**(directrix), 如图 7.1.10 所示.

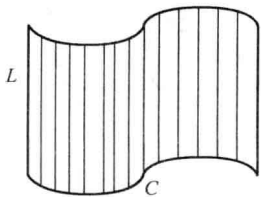


图 7.1.10

不同类型的准线生成不同的柱面. 例如, 如果准线为直线, 则生成的柱面为平面; 如果准线为圆, 则生成的柱面为**圆柱面**(circular cylinder); 如果准线为椭圆, 则生成的柱面为**椭圆柱面**(ellipsoid cylinder); 如果准线为双曲线, 则生成的柱面为**双曲柱面**(hyperbolic cylinder); 如果准线为抛物线, 则生成的柱面为**抛物柱面**(parabolic cylinder).

下面主要讨论准线为坐标面上的曲线, 而母线平行于坐标轴的

柱面的方程.

首先来建立以  $xy$  坐标面上的曲线

$$C: \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

为准线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面方程, 如图 7.1.11 所示.

设  $M(x, y, z)$  为所求柱面上任一点, 过  $M$  作平行于  $z$  轴的直线交  $xy$  坐标面于点  $\tilde{M}(x, y, 0)$ , 由柱面定义知  $\tilde{M}$  必在准线  $C$  上, 从而  $\tilde{M}$  的坐标  $(x, y, 0)$  满足曲线  $C$  的方程

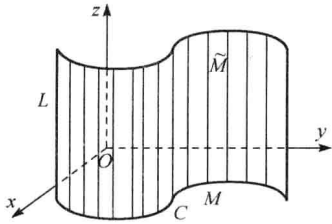


图 7.1.11

$$C: \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

由于方程  $F(x, y) = 0$  不含  $z$ , 所以点  $M$  的坐标  $(x, y, z)$  也满足  $F(x, y) = 0$ . 而不在柱面上的点作平行于  $z$  轴的直线与  $xy$  坐标面的交点必不在准线  $C$  上, 即是不在柱面上的点的坐标不满足  $F(x, y) = 0$ .

综上所述, 不含变量  $z$  的方程

$$F(x, y) = 0 \tag{7.1.7}$$

在空间表示以  $xy$  坐标面上的曲线为准线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面.

类似地, 不含变量  $x$  的方程

$$F(y, z) = 0$$

在空间表示以  $yz$  坐标面上的曲线为准线, 而母线平行于  $x$  轴的柱面.

而不含变量  $y$  的方程

$$F(x, z) = 0$$

在空间表示以  $zx$  坐标面上的曲线为准线, 而母线平行于  $y$  轴的柱面.

例如, 方程  $x^2 + y^2 = R^2$  在空间表示以  $xy$  坐标面上的圆为准线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面, 称为圆柱面, 如图 7.1.12 所示.

方程  $y^2 = 2px (p > 0)$  在空间表示以  $xy$  坐标面上的抛物线为准线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面, 称为抛物柱面, 如图 7.1.13 所示.

方程  $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$  在空间表示以  $xz$  坐标面上的椭圆为准线, 母线平行于  $y$  轴的柱面, 称为椭圆柱面, 如图 7.1.14 所示.

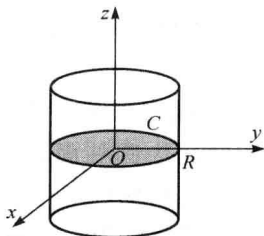


图 7.1.12

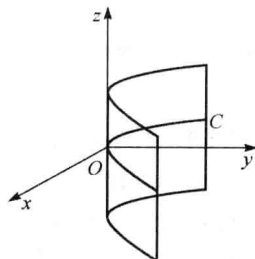


图 7.1.13

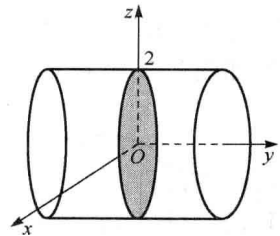


图 7.1.14

方程  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  在空间表示以  $xy$  坐标面上的双曲线为准线, 母线平行于  $z$  轴的双曲柱

面,如图 7.1.15 所示.

(3) 以坐标轴为旋转轴的旋转曲面.

**定义 2** 平面曲线  $C$  绕着该平面上的一条定直线  $L$  旋转一周所形成的曲面称为**旋转曲面**(surface of revolution). 定直线  $L$  称为**旋转轴**(axis of revolution), 平面曲线  $C$  的每一位置称为旋转曲面的一条**母线**, 如图 7.1.16 所示.

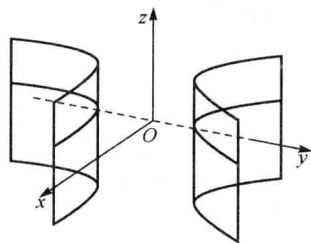


图 7.1.15

下面主要讨论旋转轴为坐标轴, 而母线为坐标面上的曲线的旋转曲面的方程.

首先来建立以  $yz$  坐标面上的曲线(为母线)

$$C: \begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕着  $z$  轴旋转一周所形成的旋转曲面  $\Sigma$  的方程, 如图 7.1.17 所示.

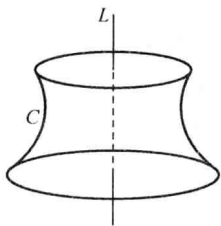


图 7.1.16

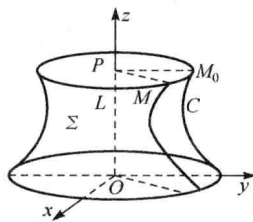


图 7.1.17

设  $M(x, y, z)$  为旋转曲面  $\Sigma$  上任意一点, 过点  $M$  作平面垂直于  $z$  轴, 交  $z$  轴于点  $P(0, 0, z)$ , 交曲线  $C$  于点  $M_0(0, y_0, z_0)$ . 而点  $M$  可由点  $M_0$  绕  $z$  轴旋转得到, 所以有

$$|PM| = |PM_0|, \quad z = z_0. \quad (7.1.8)$$

由两点间的距离公式, 有

$$|PM| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |PM_0| = |y_0|,$$

则

$$y_0 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7.1.9)$$

又因为  $M_0$  在曲线  $C$  上, 所以

$$F(y_0, z_0) = 0.$$

将式(7.1.8)、式(7.1.9)代入上式, 即得旋转曲面  $\Sigma$  的方程

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

即若要求平面曲线  $F(y, z) = 0$  绕  $z$  轴旋转的旋转曲面方程, 只需将  $F(y, z) = 0$  中的  $y$  换成  $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ , 而  $z$  保持不变, 即得所求旋转曲面方程.

一般地, 当坐标面上的曲线  $C$  绕着该坐标面上的一条坐标轴旋转时, 为了求出这个旋转曲面的方程, 只要将曲线  $C$  的方程中保留和旋转轴同名的坐标, 而用其他两个坐标平方和的平方根来代替方程中的另一坐标即可.

例如,  $yz$  坐标面上的直线  $y = az (a \neq 0)$  绕  $z$  轴旋转或  $zx$  坐标面上的直线  $x = az (a \neq 0)$  绕  $z$  轴旋转而成的旋转曲面方程都为

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2,$$

称其为**圆锥面**(circular cone),如图 7.1.18 所示,点  $O$  称为圆锥的**顶点**.

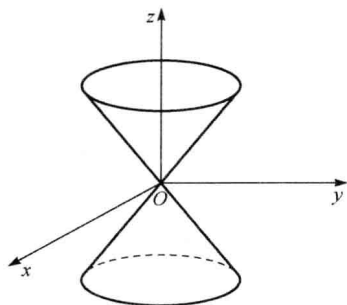


图 7.1.18

而  $yz$  坐标面上的抛物线  $y^2 = 2pz (p > 0)$  绕着  $z$  轴旋转或者  $zx$  坐标面上的抛物线  $x^2 = 2pz (p > 0)$  绕着  $z$  轴旋转而成的旋转曲面方程都为

$$x^2 + y^2 = 2pz, \quad (7.1.10)$$

称其为**旋转抛物面**(paraboloid of revolution),如图 7.1.19 所示.

关于一般三元二次方程所表示的二次曲面形状,很难用描点的方法得到,但是,我们可以通过观察用坐标面以及平行于坐标面的平面去截割曲面而得到的截痕曲线形状,去想象随着平面平行移动时曲面的大致形状,从而大概了解曲面的全貌.这种方法称为**截割法(截痕法)**.

例如,旋转抛物面(7.1.19)的特征是:以平行于  $xy$  坐标面的平面  $z=h (h > 0)$  去截曲面而得到的截痕曲线是圆,而用  $zx$  坐标面、 $yz$  坐标面或平行于  $zx$  坐标面、 $yz$  坐标面的平面去截曲面而得到的截痕都是抛物线,如图 7.1.19 所示.当  $p < 0$  时,旋转抛物面(7.1.10)的开口向下.

类似地,方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$  表示  $xy$  坐标面上的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转或  $zx$  坐标面上的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  绕  $x$  轴旋转所得的**旋转椭球面**(ellipsoid of revolution),如图 7.1.20 所示.其特征是以平面  $x=h (-a < h < a)$  截该曲面得到的截痕曲线是圆,而分别以平面  $y=h (-b < h < b)$  截曲面所得的截痕曲线都是椭圆.

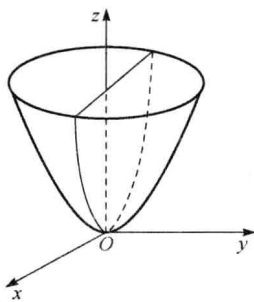


图 7.1.19

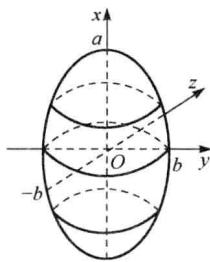


图 7.1.20

#### 例 4 用截割法作椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a, b, c > 0) \quad (7.1.11)$$

的图形.

**解** 当  $a=b=c$  时,方程(7.1.11)表示球面;当  $a, b, c$  中有两个半轴相等时,方程(7.1.11)表示旋转椭球面.

由方程(7.1.11)可知

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

从而有

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$



说明椭球面上的所有点都在以平面  $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$  为界限的长方体内.

下面考察椭球面与坐标面以及平行于坐标面的平面的截痕.

方程(7.1.11)中令  $z=0$ , 得到椭球面与  $xy$  面的截痕线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

同理, 与  $yz, zx$  面的截痕线分别为

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

用平行于  $xy$  面的平面  $z=h (0 \leq h < c)$  与椭球面相截, 截痕线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

这是以  $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$  与  $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$  为半轴的椭圆, 且在与  $xy$  面平行的平面  $z=h$  上; 当  $h=0$  时, 截痕线在  $xy$  面上, 且所截得的椭圆最大; 当  $|h|$  由零逐渐增大时, 两个半轴逐渐减小, 椭圆逐渐收缩; 当  $|h|=c$  时, 椭圆收缩为两个点  $(0, 0, \pm c)$ ; 当  $|h|>c$  时, 无截痕.

同理, 用分别平行于  $yz$  面和  $zx$  面的平面截椭球面, 也有同样的结果. 因此, 椭球面的图形如图 7.1.21 所示.

类似地, 可以利用截痕法讨论其他二次曲面的图形.

单叶双曲面 (hyperboloid of one sheet)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 (a, b, c > 0)$ .

特别地,  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  表示将  $yz$  坐标面上的双曲线  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  绕其虚轴即  $z$  轴旋转所得的曲面, 称为旋转单叶双曲面, 如图 7.1.22 所示.

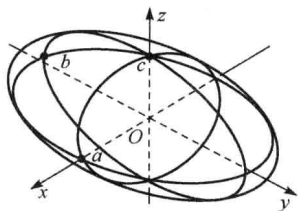


图 7.1.21

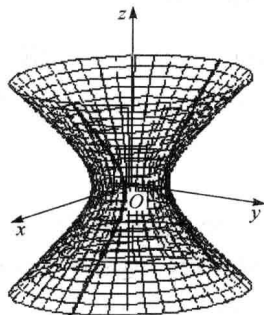


图 7.1.22

双叶双曲面(hyperboloid of two sheets)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 (a, b, c > 0)$ .

特别地,  $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  表示将  $yz$  坐标面上的双曲线  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  绕其实轴即  $y$  轴旋转所得的曲面,称为旋转双叶双曲面,如图 7.1.23 所示.

椭圆锥面(elliptic cone)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 (a, b > 0)$ ,如图 7.1.24 所示.

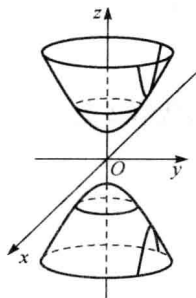


图 7.1.23

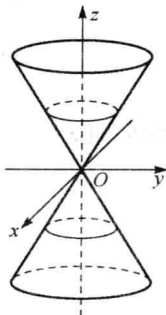


图 7.1.24

椭圆抛物面(elliptic paraboloid)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz (a, b > 0, p \neq 0)$ ,如图 7.1.25 所示.

双曲抛物(或马鞍面)(hyperbolic paraboloid)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz (a, b > 0, p \neq 0)$ ,如图 7.1.26 所示.

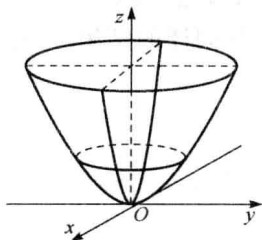


图 7.1.25

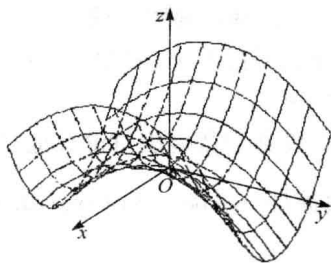


图 7.1.26

### 7.1.4 空间曲线及其方程

空间直线可以看成两个平面的交线;同样地,空间曲线  $\Gamma$  也可以看成两个曲面的交线. 若两个曲面的方程为  $F_1(x, y, z) = 0$  和  $F_2(x, y, z) = 0$ , 则其交线  $\Gamma$  的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (7.1.12)$$

称方程(7.1.12)为空间曲线的一般方程.

例 5 下列方程组表示什么曲线?

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 0. \end{cases}$$