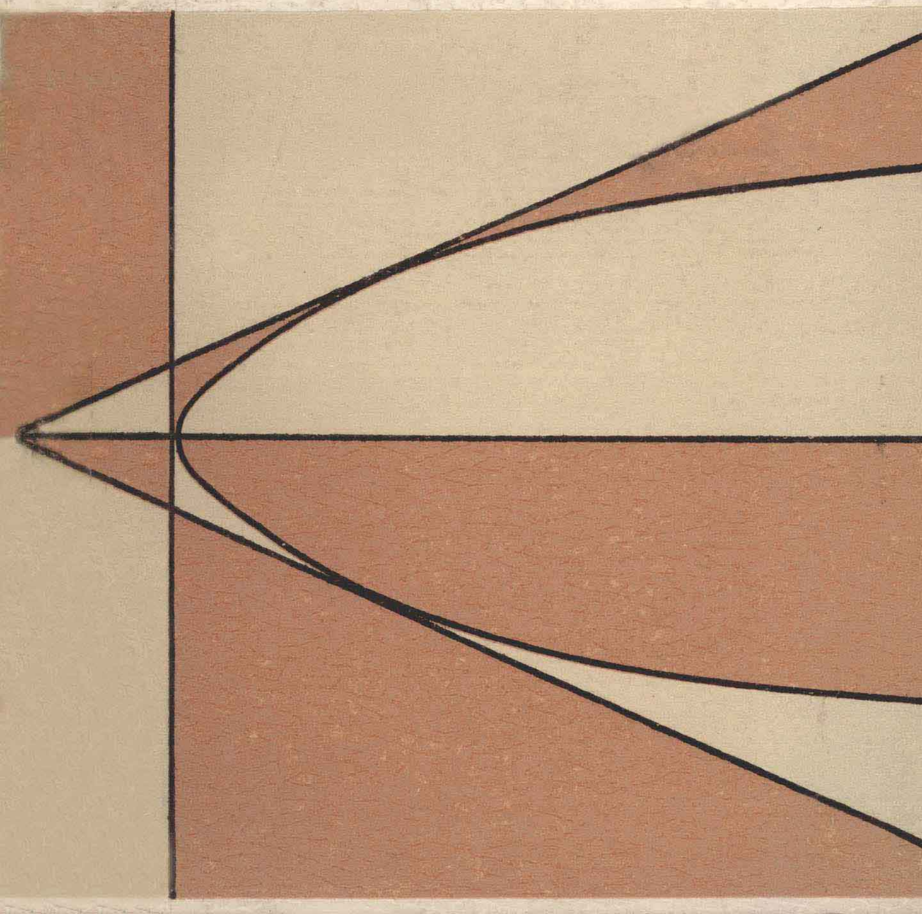
初中教师进修用书

数学分析

下册

陈修平　欧鼎生
薛天森　林　玄



初中教师进修用书

数学分析 下册

陈修平 欧鼎生 薛天森 林玄

福建教育出版社

责任编辑　李南元

封面设计　妙　夫

初中教师进修用书

数　学　分　析

（下　册）

陈修平　欧鼎生　薛天森　林　玄

出版：福建教育出版社

发行：福建省新华书店

印刷：福建教育出版社印刷厂

787×1092毫米32开本　16.75印张　334千字

1985年11月第一版　1985年11月第一次印刷

印数：1——4,920

书号：7159·863　定价：2.35元

目　　录

第十章　广义积分

第十一章　数项级数

第十二章　函数项级数

第十三章　幂级数

第十四章　富里埃级数

第十五章　多元函数的极限和连续性

第十六章　多元函数微分学

第十七章　重积分

第十八章　曲线积分与曲面积分

第十章　广义积分

第八章所介绍的定积分(或称为常义积分)，其积分区间必须是有限区间，并且被积函数必须是有界函数。但是，在应用上，需要将前述的积分概念作如下的两种推广：其一是将积分区间推广到无限区间；另一是将被积函数推广为无界函数。积分区间为无限区间(被积函数仍为有界函数)的积分称为无穷积分。被积函数为无界函数(积分区间仍为有限区间)的积分称为无界函数积分。无穷积分与无界函数积分统称为广义积分以区别于前述的常义积分。

§10·1　无穷积分

一、无穷积分的概念

1．实例　如图10·1所示，把质量为 m 的物体从地面上的 A 点铅直地向上发射到与地心 O 点相距为 b 的 B 点时，地球引力对该物体所作的功(记为 $W(b)$)为若干？若要物体飞离地球引力的范围，其初速 V_0 该多大？

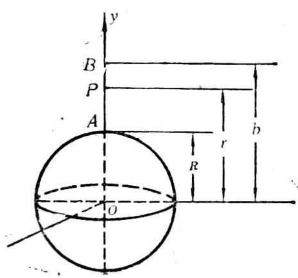


图 10·1

〔解〕 设地球的质量为 M，地球的半径为 R，铅直向上飞行的物体飞到与地心 O点相距为 r 的 P 点(图10·1)时，则地球对该物体的引力为

$$F=F(r)=k\cdot\frac{Mm}{r^2}\quad（其中\ k\ 为引力系数，r\geqslant R>0）\tag{1}$$

由于，物体在地面上的 A 点时，$r=R$，$F=mg$（g 是重力加速度），所以由(1)式得：

$$mg=k\cdot\frac{Mm}{R^2},\qquad k=\frac{R^2g}{M},$$

$$F=F(r)=\frac{R^2mg}{r^2}\quad(r\geqslant R>0).$$

于是，当物体飞到与地心相距为 b 的 B 点时，地球引力对该物体所作的功为

$$W(b)=\int_R^b(-F)dr=\int_R^b\left(-\frac{R^2mg}{r^2}\right)dr$$

$$=R^2mg\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right).\tag{2}$$

上式中的 F 前面带有“－”号是因为地球引力 F 的方向与飞行物体的运动方向相反。

显然，要物体飞离地球引力的范围，就必须克服地球引力对物体所作的功(记为 $W(+\infty)$)，也就是说，在发射物体(初速为 v_0) 时，给予物体的动能$\left(它等于\frac{1}{2}mv_0^2\right)$要足够克服地球引力对物体所作的功 $W(+\infty)$，即须

$$\frac{1}{2}mv_0^2\geqslant -W(+\infty).\tag{3}$$

因此要计算 v_0，得先计算功 $W(+\infty)$.我们理所当然地认为这个功 $W(+\infty)$就是(2)式中的功 $W(b)$ 在 $b\to+\infty$ 时的极

限，即

$$W(+\infty)=\lim_{b\to+\infty}W(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_R^b\left(-\frac{R^2mg}{r^2}\right)dr$$

$$=\lim_{b\to+\infty}R^2mg\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right)=-mgR. \qquad (4)$$

从上式容易看出，需要将积分区间推广到无限区间$[R,+\infty)$.

由(3)、(4)两式可得

$$\frac{1}{2}mv_0^2\geqslant mgR, \qquad v_0^2\geqslant 2Rg,$$

即 $\qquad v_0\geqslant\sqrt{2Rg}\approx 11.2$(公里/秒).

(其中$g=9.81$ 米/秒^2, $R=6371$ 公里.)这就是说，要物体飞离地球引力的范围，其初速度至少要达到11.2 公里/秒.通常称速度11.2 公里/秒为宇宙第二速度.

2.无穷积分定义

定义 1 设对任意的数 b $(b>a)$，函数 $f(x)$在$[a, b]$上可积(即存在常义积分，以下同此)，并且存在有限极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=I, \qquad (5)$$

则称函数 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上的无穷积分$\left(记作\int_a^{+\infty}f(x)dx\right)$收敛，并称值 I 为函数 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上的积分值，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=I, \qquad (6)$$

如果(5)式中的极限不存在，则称函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上的无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$为发散，这时记号 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也就失去意义.

类似地，可以定义 $f(x)$在$(-\infty, b]$上的无穷积分为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{7}$$

定义 2 如果对于任意的数 c，无穷积分 $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ 都收敛，则称函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分 $\left(\text{记作} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)$ 收敛，且其积分值

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx. \tag{8}$$

上式也常记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx.$ (9)

从定义 2 知道：

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则函数 $f(x)$ 在任意的有限区间 $[a, b]$ 上可积。若 $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ 与 $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ 二者中，至少有一个发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

例如，设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & (x \geqslant 0), \\ x & (x < 0). \end{cases}$ 则

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{a^2}{2}\right) = -\infty.$$

所以，按定义 1，无穷积分 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，其积分值为 $\frac{\pi}{2}$，但无穷积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 发散。按定义 2，无穷积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 也是发散的。

又如，设 $f(x)=x$.则

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xdx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^2}{2}\right)=+\infty,$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xdx=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a^2}{2}\right)=-\infty.$$

所以，无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$、$\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 都是发散的。

注：式(9)中的 a 与 b 是各自独立地按任意方式分别趋向于 $-\infty$ 和 $+\infty$，因此，不能根据

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty\\ a=-b}}\int_a^b xdx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^b xdx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{2}\right)=0,$$

错误地断定 $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ 为收敛。事实上，$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ 是发散的。

无穷积分的几何意义。在几何上，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的值是底长为无限长的"无穷型曲边梯形"(图10·2中的阴影部分)的面积(带符号的面积)。

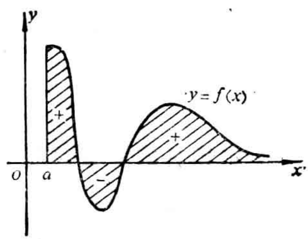


图 10·2

例 1 研究 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ （常数 $a>0$）的敛散性；如果收敛，并求其值。

〔解〕 由于 $b>a>0$ 时，

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}\cdot\dfrac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_a^b=\dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{b^{p-1}}-\dfrac{1}{a^{p-1}}\right) & (若p\neq 1),\\ \ln x\Big|_a^b=\ln\dfrac{b}{a} & (若p=1)。\end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b \dfrac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}} & (若p>1),\\ +\infty & (若p\leqslant 1),\end{cases}$

于是按定义1可知，若 $a>0$，则当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ 收敛，且其值 $\int_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}=\dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}$；而当 $p\leqslant 1$ 时，$\int_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ 发散。

例 2 计算界于曲线 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 和 x 轴之间的平面图形(图10·3中阴影部分)的面积 A。

〔解〕 $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{c}\dfrac{dx}{1+x^2}+\int_c^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c\dfrac{dx}{1+x^2}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b\dfrac{dx}{1+x^2}$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}(\mathrm{arctg}c-\mathrm{arctg}a)$

$+\lim\limits_{b\to+\infty}(\mathrm{arctg}b-\mathrm{arctg}c)$

$=\left(\mathrm{arctg}c+\dfrac{\pi}{2}\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}c\right)=\pi$。

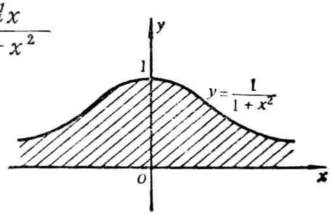


图 10·3

二、无穷积分的简单性质

根据无穷积分的定义以及定积分与极限的性质，可以推出下列无穷积分的简单性质(证明从略)：

性质1 设 $a<c$ 且函数 $f(x)$ 在 $[a,\ c]$ 上可积，那么，若无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_c^{+\infty}f(x)dx$ 二者中有一个收敛，则另

一个也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

简单地说，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 同时敛散（即或者皆收敛，或者皆发散，且二者必居其一）。

性质 2 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 k 为常数，则 $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

性质 3 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

性质 4 若对于任意的数 $b(b>a)$，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，又函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有原函数 $F(x)$，且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a).$$

或记作 $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \qquad (10)$$

即对于无穷积分，成立广义的牛顿——莱布尼茨公式(10)。

性质 5 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上都有连续的导数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$，又 $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ 收敛，且存在有限极限

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$，则$\int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx$也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx = u(x)\,v\,(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx.$$

或记作

$$\int_a^{+\infty} v(x)du(x) = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u(x)dv(x). \qquad (11)$$

即对于无穷积分，成立广义的分部积分法(11)。

对于无穷积分，也有换元法则。

无穷积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$与$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)\,dx$也都具有类似于上述的性质。

三、无穷积分收敛判别法则

1.无穷积分收敛的充要条件

根据函数极限的柯西收敛准则可以得到如下的无穷积分的收敛准则。

定理 1 （柯西收敛准则）设对于任意的数$b\ (b>a)$，函数$f(x)$在$[a,\ b]$上可积，则无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件是：对于任意给定的数$\varepsilon>0$，总存在某个数$B(\varepsilon)>a$，使得当$B<b_1<b_2$时，有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

从几何上说，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件是：对于任意给定的数$\varepsilon>0$，总存在某条纵直线$x=B(B>a)$，使得位于此纵直线右边的任意两条纵直线$x=b_1$、$x=b_2$与曲线$y=f(x)$以及x轴所围成的图形（图10·4中的阴影部分）的面积（带符

号的面积）的绝对值必小于预先给定的正数 ε。

由定理 1 容易推出：

若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则必有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

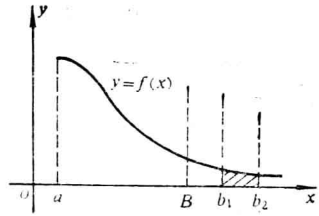


图 10・4

虽然用柯西收敛准则可以判定无穷积分的敛散性，但往往比较费事。因此，对某些特殊的函数，比如非负函数或非正函数的无穷积分的敛散性的判定，常用如下特殊的收敛判别法。

2.非负函数的无穷积分的收敛判别法

定理 2 （非负函数的无穷积分的收敛准则）设函数 $f(x)$ 是定义在$[a,+\infty)$上的非负函数(即当 $a\leqslant x<+\infty$ 时，恒有 $f(x)\geqslant 0$)，且对于任意的数 b $(b>a)$，$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是：$F(b)=\int_a^b f(x)dx$ $(a\leqslant b<+\infty)$在$[a,+\infty)$上关于 b 有上界，即存在某个正数 M，使得对于任意的 $b\in[a,+\infty)$，恒有

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx\leqslant M.$$

〔证〕 由于对任意的数 b $(b>a)$，$f(x)$在$[a,b]$上可积，且当 $a\leqslant x<+\infty$时，$f(x)\geqslant 0$，所以 $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 是定义在$[a,+\infty)$上关于 b 的单调不减函数，于是有如下的等价关系：

$F(b)$关于 b 在$[a,+\infty)$上有上界$\Longleftrightarrow$存在有限极限