

初中教师进修用书

# 数学分析

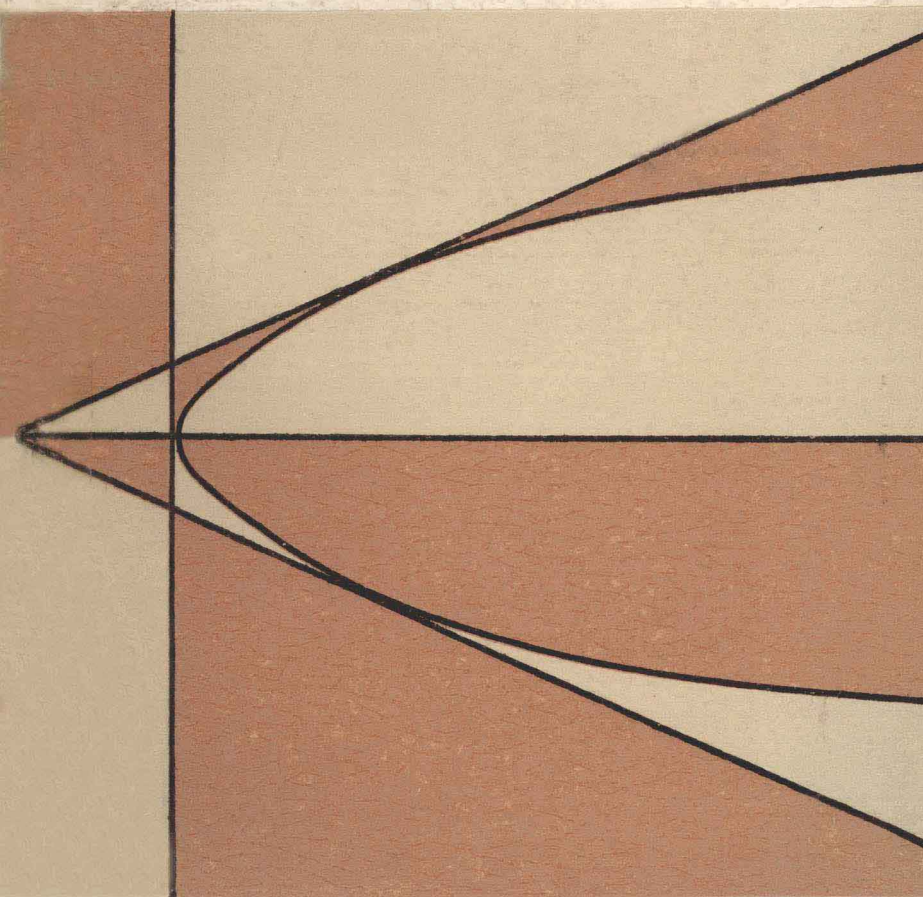
下册

陈修平

欧鼎生

薛天森

林 玄



---

初中教师进修用书

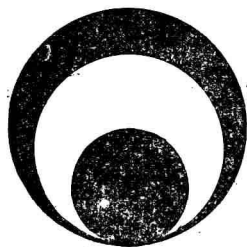
---

数 学 分 析 下册

---

陈修平 欧鼎生 薛天森 林 玄

---



---

福建教育出版社

---

责任编辑 李南元

封面设计 妙 夫

初中教师进修用书

## 数 学 分 析

(下 册)

陈修平 欧鼎生 薛天森 林玄

---

出版: 福建教育出版社

发行: 福建省新华书店

印刷: 福建教育出版社印刷厂

787×1092毫米32开本 16.75印张 334千字

1985年11月第一版 1985年11月第一次印刷

印数:1——4,920

---

书号: 7159·863

定价: 2.35元

# 目 录

## 第十章 广义积分

|                      |                          |
|----------------------|--------------------------|
| § 10.1 无穷积分.....1    | 三、无界函数积分与无穷积分间的关系.....24 |
| 一、无穷积分的概念.....1      | 四、无界函数积分收敛判别法            |
| 二、无穷积分的性质.....6      | 则.....26                 |
| 三、无穷积分收敛判别法.....8    | 五、 $\Gamma$ 函数.....33    |
| 习题10.1.....18        | 习题10.2.....35            |
| § 10.2 无界函数积分.....19 | 小结.....36                |
| 一、无界函数积分的概念.....19   |                          |
| 二、无界函数积分的性质.....23   |                          |

## 第十一章 数项级数

|                         |                     |
|-------------------------|---------------------|
| § 11.1 上极限与下极限.....39   | § 11.3 同号级数的收敛判别法57 |
| 一、上、下极限的定义.....39       | 一、正项级数收敛的充要条件...57  |
| 二、上、下极限的性质.....40       | 二、正项级数收敛判别法.....58  |
| 习题11.1.....46           | 习题11.3.....69       |
| § 11.2 无穷级数的概念与性质47     | § 11.4 任意项级数.....70 |
| 一、无穷级数的概念.....47        | 一、绝对收敛与条件收敛.....70  |
| 二、级数收敛的充分条件与必要条件.....50 | 二、交错级数.....71       |
| 三、级数的基本性质.....53        | 三、绝对收敛与条件收敛的性质74    |
| 习题11.2.....56           | 习题11.4.....82       |
|                         | 小结.....83           |

## 第十二章 函数项级数

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| § 12.1 函数项级数的概念··· 85  | 一、一致收敛概念·····92             |
| 一、函数项级数的概念·····85      | 二、一致收敛的充要条件·····97          |
| 二、函数列的收敛域及其极限函数·····88 | 三、一致收敛的充分条件·····100         |
| 三、函数项级数与函数列间的关系·····89 | 习题12.2·····104              |
| 习题12.1·····90          | § 12.3 一致收敛级数的和函数性质·····105 |
| § 12.2 一致收敛·····91     | 习题12.3·····116              |
|                        | 小结·····116                  |

## 第十三章 幂级数

|                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| § 13.1 幂级数的收敛半径···119       | 二、函数展为幂级数的方法···136          |
| 习题13.1·····124              | 习题13.3·····145              |
| § 13.2 幂级数的和函数的分析性质·····125 | § 13.4 幂级数在近似计算上的应用·····146 |
| 习题13.2·····132              | 习题13.4·····154              |
| § 13.3 泰勒级数·····132         | 小结·····154                  |
| 一、泰勒级数·····132              |                             |

## 第十四章 富里埃级数

|                        |                                    |
|------------------------|------------------------------------|
| § 14.1 富里埃级数·····157   | 习题14.2·····168                     |
| 一、三角函数系的正交性·····157    | § 14.3 以 $2l$ 为周期的函数的富里埃级数·····168 |
| 二、富里埃级数·····158        | 习题14.3·····172                     |
| 习题14.1·····164         | 小结·····172                         |
| § 14.2 正(余)弦级数·····164 |                                    |

## 第十五章 多元函数的极限和连续性

|                |     |                     |     |
|----------------|-----|---------------------|-----|
| § 15.1 平面点集    | 173 | 三、二元函数关于平面点集的极<br>限 | 203 |
| 一、距离           | 174 | 习题15.3              | 204 |
| 二、平面点集的基本概念    | 175 | § 15.4 二元函数的连续性     | 205 |
| 三、平面点集的基本定理    | 183 | 一、二元函数的连续概念         | 205 |
| 习题15.1         | 186 | 二、在某点连续的函数的性质       | 206 |
| § 15.2 多元函数概念  | 187 | 三、区域上连续的函数的性质       | 209 |
| 习题15.2         | 190 | 习题15.4              | 216 |
| § 15.3 二元函数的极限 | 190 | 小结                  | 216 |
| 一、二重极限         | 190 |                     |     |
| 二、二次极限         | 197 |                     |     |

## 第十六章 多元函数微分学

|                |     |                           |     |
|----------------|-----|---------------------------|-----|
| § 16.1 偏导数     | 218 | 习题 16.4                   | 248 |
| 一、偏导数概念        | 218 | § 16.5 高阶偏导数与高阶全微<br>分    | 249 |
| 二、偏导数与连续性间的关系  | 222 | 一、高阶偏导数                   | 249 |
| 三、偏导数与偏增量间的关系  | 224 | 二、高阶全微分                   | 259 |
| 习题 16.1        | 225 | 习题 16.5                   | 262 |
| § 16.2 全微分     | 226 | § 16.6 泰勒公式               | 264 |
| 一、全微分概念        | 226 | 习题 16.6                   | 268 |
| 二、可微性与连续性间的关系  | 228 | § 16.7 多元函数的极值与最大<br>(小)值 | 268 |
| 三、全微分与偏导数间的关系  | 228 | 一、二元函数的极值                 | 268 |
| 习题 16.2        | 233 | 二、二元函数的最大(小)值             | 277 |
| § 16.3 复合函数微分法 | 234 | 习题 16.7                   | 281 |
| 习题16.3         | 244 |                           |     |
| § 16.4 方向导数    | 245 |                           |     |

|                        |     |                   |     |
|------------------------|-----|-------------------|-----|
| § 16·8 隐函数存在定理···      | 281 | 三、曲面的切平面与法线·····  | 312 |
| 一、隐函数概念·····           | 284 | 习题 16·9·····      | 317 |
| 二、隐函数存在定理·····         | 289 | § 16·10 条件极值····· | 318 |
| 习题 16·8·····           | 302 | 一、条件极值的必要条件·····  | 322 |
| § 16·9 微分学在几何上的应用····· | 303 | 二、拉格朗日乘数法则·····   | 326 |
| 一、平面曲线的切线与法线···        | 303 | 三、条件极值的充分条件·····  | 327 |
| 二、空间曲线的切线与法平面···       | 306 | 习题 16·10·····     | 334 |
|                        |     | 小结·····           | 336 |

## 第十七章 重积分

|                          |     |                            |     |
|--------------------------|-----|----------------------------|-----|
| § 17·1 重积分的概念及其基本性质····· | 340 | 二、三重积分的计算·····             | 381 |
| 一、实例·····                | 340 | 三、三重积分的变量替换·····           | 387 |
| 二、二重积分定义·····            | 344 | 四、三重积分的柱面坐标与球面坐标的变换公式····· | 389 |
| 三、二重积分存在的条件·····         | 346 | 习题 17·4·····               | 393 |
| 四、二重积分的基本性质·····         | 348 | § 17·5 重积分的应用·····         | 394 |
| 习题 17·1·····             | 349 | 一、平面区域的面积·····             | 394 |
| § 17·2 二重积分的计算···        | 350 | 二、空间区域的体积·····             | 394 |
| 习题 17·2·····             | 366 | 三、非均匀平面薄片的质量、静力矩和重心·····   | 396 |
| § 17·3 二重积分的变量替换···      | 367 | 四、非均匀物体的质量、静力矩和重心·····     | 400 |
| 一、二重积分的一般变量替换公式·····     | 367 | 五、曲面的面积·····               | 402 |
| 二、二重积分的极坐标变换公式···        | 374 | 习题 17·5·····               | 406 |
| 习题 17·3·····             | 378 | 小结·····                    | 408 |
| § 17·4 三重积分·····         | 379 |                            |     |
| 一、三重积分的概念·····           | 379 |                            |     |

## 第十八章 曲线积分与曲面积分

|                                |     |                            |     |
|--------------------------------|-----|----------------------------|-----|
| § 18.1 第一型曲线积分…                | 410 | 习题 18.4……………               | 459 |
| 一、第一型曲线积分的概念…                  | 410 | § 18.5 第一型曲面积分…            | 460 |
| 二、第一型曲线积分的计算…                  | 413 | 一、第一型曲面积分的概念…              | 460 |
| 三、第一型曲线积分的应用…                  | 418 | 二、第一型曲面积分的计算…              | 462 |
| 习题 18.1……………                   | 421 | 习题 18.5……………               | 469 |
| § 18.2 第二型曲线积分…                | 422 | § 18.6 第二型曲面积分…            | 470 |
| 一、第二型曲线积分的概念…                  | 422 | 一、第二型曲面积分的概念…              | 470 |
| 二、第二型曲线积分的计算…                  | 426 | 二、两种类型的曲面积分间的关<br>系……………   | 477 |
| 三、两种类型曲线积分的关系                  | 433 | 三、第二型曲面积分的计算…              | 478 |
| 习题 18.2……………                   | 435 | 习题 18.6……………               | 487 |
| § 18.3 格林公式……………               | 436 | § 18.7 奥氏公式与斯氏公式…          | 488 |
| 习题 18.3……………                   | 446 | 一、奥斯特洛格拉得斯基公式              | 488 |
| § 18.4 曲线积分与积分途径无<br>关的条件…………… | 447 | 二、斯托克斯公式……………              | 492 |
| 一、曲线积分与积分途径无关的条<br>件……………      | 447 | 三、第二型曲面积分与曲面无关的<br>条件…………… | 496 |
| 二、关于定理 1、定理 2 的一些应<br>用……………   | 453 | 习题 18.7……………               | 497 |
|                                |     | 小结……………                    | 498 |

## 第十章 广义积分

第八章所介绍的定积分(或称为常义积分)，其积分区间必须是有限区间，并且被积函数必须是有界函数。但是，在应用上，需要将前述的积分概念作如下的两种推广：其一是将积分区间推广到无限区间；另一是将被积函数推广为无界函数。积分区间为无限区间(被积函数仍为有界函数)的积分称为无穷积分。被积函数为无界函数(积分区间仍为有限区间)的积分称为无界函数积分。无穷积分与无界函数积分统称为广义积分以区别于前述的常义积分。

### §10.1 无穷积分

#### 一、无穷积分的概念

1. 实例 如图10.1所示，把质量为  $m$  的物体从地面上的  $A$  点铅直地向上发射到与地心  $O$  点相距为  $b$  的  $B$  点时，地球引力对该物体所作的功(记为  $W(b)$ )为若干？若要物体飞离地球引力的范围，其初速  $V_0$  该多大？

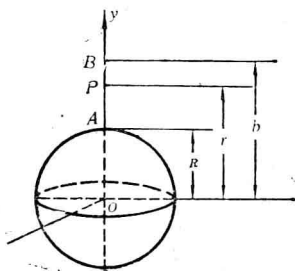


图 10.1

〔解〕 设地球的质量为  $M$ ，地球的半径为  $R$ ，铅直向上飞行的物体飞到与地心  $O$  点相距为  $r$  的  $P$  点(图10·1)时，则地球对该物体的引力为

$$F = F(r) = k \cdot \frac{Mm}{r^2} \quad (\text{其中 } k \text{ 为引力系数, } r \geq R > 0) \quad (1)$$

由于，物体在地面上的  $A$  点时， $r = R$ ， $F = mg$  ( $g$  是重力加速度)，所以由(1)式得：

$$mg = k \cdot \frac{Mm}{R^2}, \quad k = \frac{R^2 g}{M},$$

$$F = F(r) = \frac{R^2 mg}{r^2} \quad (r \geq R > 0).$$

于是，当物体飞到与地心相距为  $b$  的  $B$  点时，地球引力对该物体所作的功为

$$\begin{aligned} W(b) &= \int_R^b (-F) dr = \int_R^b \left( -\frac{R^2 mg}{r^2} \right) dr \\ &= R^2 mg \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

上式中的  $F$  前面带有“-”号是因为地球引力  $F$  的方向与飞行物体的运动方向相反。

显然，要物体飞离地球引力的范围，就必须克服地球引力对物体所作的功(记为  $W(+\infty)$ )，也就是说，在发射物体(初速为  $v_0$ ) 时，给予物体的动能(它等于  $\frac{1}{2}mv_0^2$ ) 要足够克服地球引力对物体所作的功  $W(+\infty)$ ，即须

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq -W(+\infty). \quad (3)$$

因此要计算  $v_0$ ，得先计算功  $W(+\infty)$ 。我们理所当然地认为这个功  $W(+\infty)$  就是(2)式中的功  $W(b)$  在  $b \rightarrow +\infty$  时的极

限, 即

$$\begin{aligned} W(+\infty) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} W(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_R^b \left( -\frac{R^2 mg}{r^2} \right) dr \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} R^2 mg \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{R} \right) = -mgR. \end{aligned} \quad (4)$$

从上式容易看出, 需要将积分区间推广到无限区间  $[R, +\infty)$ .

由(3)、(4)两式可得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant mgR, \quad v_0^2 \geqslant 2Rg,$$

即  $v_0 \geqslant \sqrt{2Rg} \approx 11.2$  (公里/秒).

(其中  $g = 9.81$  米/秒<sup>2</sup>,  $R = 6371$  公里.) 这就是说, 要物体飞离地球引力的范围, 其初速度至少要达到 11.2 公里/秒. 通常称速度 11.2 公里/秒为宇宙第二速度.

## 2. 无穷积分定义

**定义 1** 设对任意的数  $b$  ( $b > a$ ), 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积 (即存在常义积分, 下同此), 并且存在有限极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = I, \quad (5)$$

则称函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分 (记作  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ) 收敛, 并称值  $I$  为函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的积分值, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = I, \quad (6)$$

如果(5)式中的极限不存在, 则称函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  为发散, 这时记号  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也就失去意义.

类似地, 可以定义  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  上的无穷积分为

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (7)$$

**定义 2** 如果对于任意的数  $c$ , 无穷积分  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_{-\infty}^c f(x)dx$  都收敛, 则称函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的无穷积分 (记作  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ) 收敛, 且其积分值

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{上式也常记作 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx. \quad (9)$$

从定义 2 知道:

若  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则函数  $f(x)$  在任意的有限区间  $[a, b]$  上可积. 若  $\int_{-\infty}^c f(x)dx$  与  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  二者中, 至少有一个发散, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  发散.

例如, 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & (x \geq 0), \\ x & (x < 0). \end{cases}$  则

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -\frac{a^2}{2} \right) = -\infty.$$

所以, 按定义 1, 无穷积分  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 其积分值为  $\frac{\pi}{2}$ ; 但无穷积分  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  发散. 按定义 2, 无穷积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  也是发散的。

又如, 设  $f(x) = x$ , 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^2}{2} \right) = +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{-a^2}{2} \right) = -\infty.$$

所以, 无穷积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 、 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  和  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  都是发散的。

注: 式(9)中的  $a$  与  $b$  是各自独立地按任意方式分别趋向于  $-\infty$  和  $+\infty$ , 因此, 不能根据

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty \\ a = -b}} \int_a^b x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) = 0,$$

错误地断定  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  为收敛。事实上,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  是发散的。

无穷积分的几何意义。在几何上, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  的值是底长为无限长的“无穷型曲边梯形”(图10·2中的阴影部分)的面积(带符号的面积)。

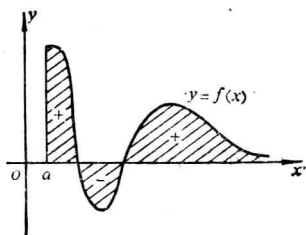


图 10·2

**例 1** 研究  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  (常

数  $a > 0$ ) 的敛散性; 如果收敛, 并求其值。

〔解〕 由于  $b > a > 0$  时,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_a^b = \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}} \right) & (\text{若 } p \neq 1), \\ \ln x \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a} & (\text{若 } p = 1). \end{cases}$$

$$\text{所以 } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} & (\text{若 } p > 1), \\ +\infty & (\text{若 } p \leq 1), \end{cases}$$

于是按定义 1 可知, 若  $a > 0$ , 则当  $p > 1$  时,  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  收敛, 且其值  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$ ; 而当  $p \leq 1$  时,  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  发散.

**例 2** 计算界于曲线  $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  和  $x$  轴之间的平面图形(图 10.3 中阴影部分)的面积  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{1+x^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg c - \arctg a) \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg c) \\ &= \left( \arctg c + \frac{\pi}{2} \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \arctg c \right) = \pi. \end{aligned}$$

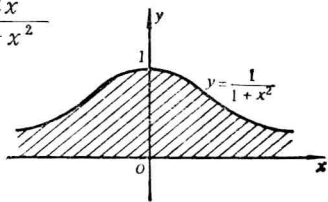


图 10.3

## 二、无穷积分的简单性质

根据无穷积分的定义以及定积分与极限的性质, 可以推出下列无穷积分的简单性质(证明从略):

**性质 1** 设  $a < c$  且函数  $f(x)$  在  $[a, c]$  上可积, 那么, 若无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_c^{+\infty} f(x) dx$  二者中有一个收敛, 则另

一个也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

简单地说,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_c^{+\infty} f(x) dx$  同时敛散 (即或者皆收敛, 或者皆发散, 且二者必居其一).

**性质 2** 若无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $k$  为常数, 则  $\int_a^{+\infty} kf(x) dx$  也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} kf(x) dx = k \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

**性质 3** 若无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  都收敛, 则  $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx$  也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \pm \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

**性质 4** 若对于任意的数  $b(b > a)$ , 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 又函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有原函数  $F(x)$ , 且存在有限极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty)$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a).$$

$$\text{或记作 } \int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \quad (10)$$

即对于无穷积分, 成立广义的牛顿——莱布尼茨公式 (10).

**性质 5** 若  $u(x)$  与  $v(x)$  在  $[a, +\infty)$  上都有连续的导数  $u'(x)$  与  $v'(x)$ , 又  $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x) dx$  收敛, 且存在有限极限

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$ , 则  $\int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx$  也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx.$$

或记作

$$\int_a^{+\infty} v(x)du(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u(x)dv(x). \quad (11)$$

即对于无穷积分, 成立广义的分部积分法(11)。

对于无穷积分, 也有换元法则。

无穷积分  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  与  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  也都具有类似于上述的性质。

### 三、无穷积分收敛判别法则

#### 1. 无穷积分收敛的充要条件

根据函数极限的柯西收敛准则可以得到如下的无穷积分的收敛准则。

**定理 1** (柯西收敛准则) 设对于任意的数  $b$  ( $b > a$ ), 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充要条件是: 对于任意给定的数  $\epsilon > 0$ , 总存在某个数  $B(\epsilon) > a$ , 使得当  $B < b_1 < b_2$  时, 有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

从几何上说,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充要条件是: 对于任意给定的数  $\epsilon > 0$ , 总存在某条纵直线  $x = B$  ( $B > a$ ), 使得位于此纵直线右边的任意两条纵直线  $x = b_1$ 、 $x = b_2$  与曲线  $y = f(x)$  以及  $x$  轴所围成的图形 (图10.4中的阴影部分) 的面积 (带符

号的面积) 的绝对值必小于预先给定的正数  $\varepsilon$ .

由定理 1 容易推出:

若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则必有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

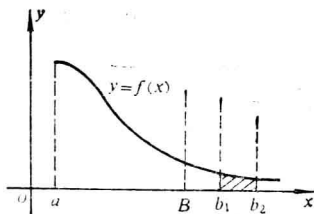


图 10·4

虽然用柯西收敛准则可以判定无穷积分的敛散性, 但往往比较费事. 因此, 对某些特殊的函数, 比如非负函数或非正函数的无穷积分的敛散性的判定, 常用如下特殊的收敛判别法.

## 2. 非负函数的无穷积分的收敛判别法

**定理 2** (非负函数的无穷积分的收敛准则) 设函数  $f(x)$  是定义在  $[a, +\infty)$  上的非负函数 (即当  $a \leq x < +\infty$  时, 恒有  $f(x) \geq 0$ ), 且对于任意的数  $b (b > a)$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充要条件是:  $F(b) = \int_a^b f(x)dx (a \leq b < +\infty)$  在  $[a, +\infty)$  上关于  $b$  有上界, 即存在某个正数  $M$ , 使得对于任意的  $b \in [a, +\infty)$ , 恒有

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

[证] 由于对任意的数  $b (b > a)$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且当  $a \leq x < +\infty$  时,  $f(x) \geq 0$ , 所以  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$  是定义在  $[a, +\infty)$  上关于  $b$  的单调不减函数, 于是有如下的等价关系:

$F(b)$  关于  $b$  在  $[a, +\infty)$  上有上界  $\iff$  存在有限极限