高等数学
复习資料

李国全　编

广州业余大学

前　　言

为了帮助职工大学、业余大学学生及自学者复习高等数学，我们受省高教局成人教育办公室委托，编写了本复习资料。

本书是根据83年12月教育部审订的职工高等工业专科学校高等数学教学大纲要求而编写的，每章按四个部分内容编写。

第一部分是基本要求，它指出大纲对本章各部分内容应掌握的程度以及它的重点、难点、对于按大纲要求选讲或不讲的内容仍用打“*”号表示。

第二部分的内容提要，简单扼要地总结了本章的主要概念、公式、定理以及它们之间的联系。

第三部分是例题分析，它是本书的主要部分，通过例题分析解题小结以及对容易发生错误问题的分析，帮助同学们掌握各类问题的解题方法和技巧，加深对基本概念的正确理解，达到提高解决问题和分析问题的能力。

第四部分是复习作业，同学们在复习的基础上是应该能够独立完成这部分作业的，它对巩固知识很有必要。

本书附录部分编印了自1981年以来我省职大、业大高等数学统考试题七份，（主要是工科的、也包括经济类的）这些试题也能够较好地体现了教学的基本要求。

本书在编写过程中，一直得到省高教局成人教育办公室，

市成人教育局教研室和学校领导的大力支持，省高教局成人教育办公室组织了在穗部分教师进行审稿，我校数学教究室黎国良副教授审阅了全书，参加审稿的有市机电局职工大学南洋电器厂分校谭汝森老师、市城建职工大学谢永良老师和市职工业余大学张文贤老师，此外我校数学教研室何奕胜、欧阳宝丽二位老师也审阅了部分章节，谨向他们表示衷心的感谢。

由于编写水平有限，编写时间又很仓促，书中一定有缺点和错误，望广大读者批评指正。

编　者

一九八五年七月于广州业余大学

目 录

第一章　函数与极限连续

一、基本要求

1．能正确理解函数、复合函数的概念。会求函数的定义域。

2．能正确理解极限的概念，理解无穷小与无穷大的概念，理解无穷小的阶及等价无穷小的概念。

3．会利用极限四则运算的法则和两个重要极限去求函数的极限，一般不要求已知ε求N或δ。

4．掌握函数连续性定义及间断的定义。对于具体函数会求函数的连续区间，找出间断点并判断间断点的类型。

5．理解一切初等函数在其定义域内都是连续的，会利用函数的连续性求函数的极限。

6．知道闭区间上连续函数的重要性质（最大值、最小值定理，介值定理）。

二、内容提要

（一）函数

1．设在某个变化过程中，有两个变量x和y，如果对于变化范围内的每一个x值，y按一定的规则总有一个或多个确定的值与之对应，那么y是x的函数，记作$y=f(x)$。

2．在函数概念中要抓住三点：对应关系、定义域、值域。三者都相同，才叫函数相等。三者中前两者是主要的。

3．自变量变化范围叫函数的定义域。确定函数定义域常见的一般原则有：

a）在分式中分母不为0；

b）偶次根号下非负；

c）对数的真数是正数；

d）反三角函数$\arcsin x$，$\arccos x$　$|x|\leqslant 1$

4．如果y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数，$u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的函数值的全部或部分落在$f(u)$的定义域内，那末，y通过中间变量u成为x的函数，$y=f[\varphi(x)]$称为复合函数。

（二）数列的极限　当n无限变大时，若数列x_n无限地接近某一常数A，则称当$n\to\infty$时，x_n以A为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。直观上很容易看出：若$x_n$以$a$为极限，则$|x_n-a|$可以任意地小，即对任意给定的$\varepsilon>0$，对于充分大的$n$，总有$|x_n-a|<\varepsilon$，即$x_n$落在区间（$a-\varepsilon$，$a+\varepsilon$）内。

（三）函数的极限　函数$f(x)$当$x\to a$时的极限，是指自变量x无限接近a（但$x\neq a$）时，函数值$f(x)$的变化趋势。当x无限接近a时，$f(x)$的值与某一常数A无限接近，则称$x\to a$时$f(x)$以A为极限。记作$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$。若$f(x)$以$A$为极限，就是说对任意给定$\varepsilon>0$，当$x$趋向于$a$的过程中，总可以找到某一时刻，在这个时刻之后，函数值$f(x)$落入区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）内。

学习极限定义时，要注意：

1．若变量y有极限，则极限必是唯一的。而且必存在自变

量的某一范围，在此范围内，变量是有界的。即有一正数M，使$|y|\leqslant M$。但反过来，有界变量并不一定有极限。例如$y=\sin\frac{1}{x}$ 是有界的，$|\sin\frac{1}{x}|\leqslant 1$，但当$x\to 0$时$y=\sin\frac{1}{x}$的函数值总是在±1之间摆动，因而没有极限。

2．我们在研究变量的极限时，一是要注意自变量的变化过程，二是考察因变量的变化趋势。我们不能笼统地说,某函数极限存在或不存在，必须说明自变量在某个变化过程中函数极限存在（或不存在）。例如$x\to 0$过程中，$\frac{\sin x}{x}$的极限是1，即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。而当$x\to\infty$时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$（这里用到无穷小与有界函数乘积仍是无穷小）。有些同学在求$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$极限时错误地认为$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，其原因也在此，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t}=0$而不应等于1．

3．研究函数极限时，自变量有六种变化过程。

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$表明当自变量$x$无限地接近于$x_0$时，其相应的函数值$f(x)$无限地接近一常数$A$。

（2）$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$，称为$f(x)$在$x=x_0$处右极限，表明当$x$取值大于$x_0$而又无限地接近于$x_0$的过程中，其

相应的的函数值无限地接近于常数A。

（3）$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$，称$f(x)$在$x_0$处左极限。表明$x$在取值小于$x_0$而又无限地接近$x_0$过程中，其相应的函数值无限地接近于常数$A$。

函数$f(x)$在x_0处极限存在的充要条件是：其左、右极限存在且相等。

（4）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，它表明在自变量$x$的绝对值（$x$本身可取正值也可能取负值）无限地增大过程中，其相应的函数值无限地接近于常数A。

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，表明自变量取正值而又无限增大过程中，其相应的函数值无限地接近于常数A。

（6）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，表明自变量$x$在取负值而其绝对值无限地增大过程中，其相应的函数值无限地接近常数A。

4．无穷大变量是指当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时函数值$f(x)$的绝对值变得任意地大，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$。无穷小变量是指以零为极限的变量。任一个有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和。几个无穷小之和或乘积仍为无穷小。而无穷小与有界函数乘积仍为无穷小。

若在某个变化过程中，$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小，反之，若$f(x)(\neq 0)$为无穷小则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大。

5．设α、β在某个变化过程中都是无穷小变量，若

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases} 0 & 称\beta比\alpha高阶无穷小; \\ \infty & 称\beta比\alpha低阶无穷小; \\ c & (c\neq 0)称\beta与\alpha同阶无穷小,当c=1时, \end{cases}$$

称α与β等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$。在$x\to 0$过程中，$\sin x\sim x$, $\mathrm{tg}x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$等。

6、函数极限的求法：

可利用极限四则运算法则以及$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$去求极限，在求两个函数商的极限时，如果分子分母都是以0为极限（称为$\frac{0}{0}$型不定式），可利用分解因式、有理化等恒等变形的方法消去分子和分母的无穷小因子。在利用两个重要极限求函数极限时，有时要借助于一些简单变量代换使所求极限变成两个重要极限的标准形式。在导数应用一章里，我们还将介绍利用罗必塔法则求极限。有时也往往同时使用几种方法才能方便地求出函数的极限。在例题分析一节里，我们将举例说明求极限的方法，这些方法同学们必须很好地掌握。

（四）连续函数

1．若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，称函数$f(x)$在$x=x_0$处连续。若$f(x)$在某一区间$(a, b)$内每一点都连续，便说$f(x)$在$(a, b)$上连续，从函数连续定义可知：$f(x)$在$x_0$处连续必须同时具备下列三个条件：

① $f(x)$必须在x_0处有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}$（左、右极限存在且相等）；

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ （$f(x)$在x_0处极限值必须等于$f(x)$在x_0的定义值）。

2．若函数$f(x)$在x_0处不连续，称x_0为$f(x)$间断点。关于间断点分类可列表如下：

		分类原则	举例
第一类间断点	可断去点间	①$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$ 但 $f(x_0)\neq A$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ （$x_0=0$ 为间断点）
	可去间断点	②$f(x_0-o)$ $f(x_0+o)=A$ $f(x)$在x_0无定义	$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ （$x_0=o$ 为间断点）
	不可去间断点	③ $f(x_0-0)=A$ $f(x_0+0)=B$ 但 $A\neq B$	$f(x)=\begin{cases}e^x & x>0\\ x+2 & x\leqslant 0\end{cases}$ （$x=o$ 为间断点）
第二类间断点	无穷间断点	$f(x_0-o)$及$f(x_0+o)$中至少有一个趋于无穷.	$y=\dfrac{1}{x-1}$ $x=1$ 为无穷型间断点
	振荡型间断点	$f(x_0-0$ 或 $f(x_0+0)$不存在，且$x\to x_0+0$或$x\to x_0-0$时，$f(x)$永远振荡	$y=\cos\dfrac{1}{x-2}$ $x_0=2$ 为振荡型间断点

3．初等函数在定义域内是一个连续函数。分段函数不初等函数，分段函数不一定是连续函数。这时需要讨论分段点的连续性。

4．闭区间连续函数性质有最大值和最小值定理以及介值定理。

三．例题分析

例1、　求$y=\sqrt{4-x^2}+\arcsin\frac{x-1}{2}$的定义域。

解：　$y=\sqrt{4-x^2}$ 定义域为

$4-x^2\geqslant 0$　　解得$-2\leqslant x\leqslant 2$

而 $\arcsin\frac{x-1}{2}$ 定义域为

$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$　　即$-1\leqslant x\leqslant 3$

取这两部分在数轴上公共部分，应是$-1\leqslant x\leqslant 2$

故y的定义域应为〔-1，2〕。

例2．　指出下列函数分解与复合过程。

① $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\frac{1}{x}$　求$y=f(x)=?$

② 将$y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$分解成基本初等函数。

解：① 只要将$y=y(u)\to u=u(v)\to v=v(x)$逐步代入即可，

$$y=e^{u}=e^{\sin v}=e^{\sin\frac{1}{x}}$$

② $y=e^s$，$s=\arcsin t$，$t=\sqrt{x}$

正确分析一个复合函数是由怎样的基本初等函数复合而成，在微积分学习中是重要的。

复合过程由里到外，而分解过程则由外到里，这时每一步都是基本初等函数或是基本初等函数的四则运算。

例 3． 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$

解： $x=0$ 时，分式的分子分母均为零，故不能直接利用"商的极限等于极限的商"这个法则，需进行有理化。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x \sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

例 4． 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right)$

解： 由于当 $x=1$ 时，分式分母为零，故

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{1-x^3} = \infty$， $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1-x} = \infty$ ，即极限不存在，

故不能直接利用"和（差）的极限等于极限之和（差）这一法则，如果我们认为

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) = \infty - \infty = 0$$

那是错误的，因为∞不是一个数，不能参与运算。正确解法如下：

在 $x \neq 1$ 时

$$\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} = \frac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3} = \frac{2-x-x^2}{1-x^2}$$

当$x=1$时，分子分母均为零，对分子、分母进行分解因式，因为$x\to 1$而$x\neq 1$，故可约去分子、分母公因子$1-x$，得

$$\frac{2-x-x^2}{1-x^3}=\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{2+x}{1+x+x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=\frac{3}{3}=1$$

例 5　求极限

1° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5}{2x^2+3x+4}$

2° $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{x}$

解①　分子分母极限均为∞，属$\dfrac{\infty}{\infty}$里不定式，不能直接利用商的极限等于极限的商运算法则，可将分子、分母除以x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

对于有理函数当$x\to\infty$极限可直接写出结果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & \text{当 } m=n \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m>n\\ \infty & \text{当 } n<m\end{cases}$$

解　②　可将分子分母同除以x，要注意到x取负值而

趋于∞，计及算术根

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+2x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}=-\sqrt{2}$$

例 6 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{1-\cos^2 x}$ 的值

解： $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=1^2\times 0=0$$

这里利用了无穷小与有界函数乘积仍为无穷小这一性质．

例 7：

$$\text{设}f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln 2x}{x} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & -1<x<0\end{cases}$$

求 ① $\lim_{x\to 0+}f(x)$

② $\lim_{x\to 0-}f(x)$

③ $f(x)$在$x=0$处极限存在吗？

解： $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{2x}{x}=2$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1$

（这里利用了$\sin x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$的等价无穷小替换）

$f(x)$在$x=0$时左、右极限存在但不相等，$f(x)$在$x=0$

极限不存在。

本例说明求分段函数在分段点极限时，要分别求出左、右极限，而极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等。

例 8　求①　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos x\right)^{3\sec x}$

②　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

解①　利用变数替换 $t=\cos x$，当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$时，$t\to 0$。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos x\right)^{3\sec x}=\lim_{x\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{3}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{3}=e^{3}$$

解②　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{a}=e^{2a}\cdot 1=e^{2a}$$

在利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 时，不但要注意到它的函数的形式，自变量变化的趋向，而且要注意到它的特点，才

能正确运用。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 的特点是} \frac{0}{0}\text{型。}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$, $\left[\text{或}\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right]$ 的特点，它是一个幂指函数，其底是1加上一个无穷小量，指数为无穷大，而且无穷大与无穷小是互为倒数。上式中 $x\to\infty$ 中的“∞”包括“$+\infty$”和“$-\infty$”.

例9．求① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\sin 5x}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\kappa x)}{x}$

③ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}$

解：① 利用等价无穷小替换，当 $x\to 0$ 时 $\mathrm{tg}3x\sim 3x$, $\mathrm{sim}5x\sim 5x$

$$\text{故}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

② 利用 $x\to 0$ 时， $\ln(1+\kappa x)\sim\kappa x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\kappa x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\kappa x}{x}=\kappa$$

③ 令 $t=x-\frac{\pi}{3}$ 当 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时， $t\to o$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos(t+\frac{\pi}{3})}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos t\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3}\sin t}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos}{\sin t}+\sqrt{3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{t}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

这里利用了 $t\to 0$　$\sin t\sim t$，$1-\cos t\sim\frac{t^2}{2}$，等价无穷小替换.

在求函数极限时，利用无穷小等价替换可使求极限过程变得简单许多。但在含有两个函数加减运算式中，不能随便使用无穷小替换，否则得不到正确的结果。请看下面例子。

例10.　求 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$

解:　若利用 $\mathrm{tg}x\sim x$，$\sin x\sim x$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

上述求解过程是错误的，其错误在于将分子中两个无穷小之差（仍为无穷小）用了其相应等价无穷小之差代替，但是（$\mathrm{tg}x-\sin x$）与（$x-x$）不再是等价无穷小了。其正确做法如下.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\cdot x^3}$$