高級中學課本

代 數

第三冊

高級中学课本 代数 第三册 書号：2858

編譯者：前东北人民政府教育部
北京市書刊出版業營業許可証出字第二号
校訂者
原出版者：人民教育出版社
北京景山東街
重印者：湖北人民出版社
發行者：新華書店
印刷者：(見正文最後頁)

开本：787×1092 1/32
印張：5 5/8
字數：117千
定价：(2) 三角

1952年1月东北人民出版社原版
1954年5月新一版
1956年1月新二版
1956年7月新二版第三次印刷
武漢52,001—98,700册

出版者的話

初、高級中學代數和高級中學三角的課本，舊的有許多缺點，新的又沒有編好，經中央人民政府教育部指定暫以前東北人民政府教育部根據蘇聯中學教科書編譯的課本，供一九五三年秋季開始學習這三科的班次採用．

蘇聯教科書的優點是內容精簡，理論與實際結合，教材的排列能兼顧科學的系統和教學的原則．東北各地試用這一套編譯的課本以後，凡能體會這些優點的教師，教學上都有很好的成績（參看教育資料叢刊社編：‘中學數學教學的改進’）．用慣了舊課本的教師倘能虛心體會新課本的優點，學習新的教學方法，當然可以得到同樣的成績．

這套編譯的課本也還有某些缺點，如‘編譯者聲明’中所說的理論與實際結合不如原書，就是最顯著的．原書是給蘇聯學生讀的，必然要結合蘇聯社會主義社會的實際，這就和我國當前的情況有若干距離．因此，怎樣根據這套課本的理論體系，遵照國家在過渡時期總路線的精神來結合我國的實際，是教師們應該在教育實踐中仔細研究的問題．希望大家積累經驗，爲編好一套我國的數學科新課本作準備．

我社這次供應的東北編譯並經我社稍加修訂的這幾種課本，一九五三年曾請吳品三、惠仰淑、程廷熙、傅種孫諸先生根據原書校譯過高中三角，請蔣鐸、薛宗慈，魏庚人諸先生校譯過初中代數，請蔣鐸、郝錡新、嚴士健、魏庚人諸先生校譯過高中代

數；高初中代數後面所附習題係請楊邁、蔣鐸二位先生根據蘇聯M. A. 拉尼切夫：代數習題彙編 I、II 兩卷譯出，並曾請趙慈庚、傅種孫二位先生校譯過高中代數所附習題，請趙慈庚先生校譯過初中代數所附習題。一九五五年秋季供應的，除了三角是全冊外，初中代數有上下冊，高中代數有第一、二、三冊，各供一學年用，請教師們注意。

這套編譯的課本，每種都附有習題一冊。為了發行的便利，把習題附釘在課本的後面，不再另釘成冊。

人民教育出版社　一九五五年二月

編譯者聲明

這一套中學自然科學教科書，包括算術、代數、平面幾何、物理、化學、動物、植物、人體解剖生理學等，是根據蘇聯十年制中學的教科書翻譯的。爲了適合我國的情況，在校閱時作了必要的修改，所以說是編譯。

這套教科書的初中用部分於一九四九年下半年匆匆編譯，一九五〇年起在東北各地中學試用。由於時間和人力的不足，發生了不少錯誤與不妥之處。一九五〇年下半年，我們一面修改了初中用書，一面又編譯出版了高中用的一部分。時間和人力仍然很受限制，在校閱時仍然感到很多地方不能趕上原書的精彩，特別是在理論與實際結合一方面。

我們希望，各地教師同志和別的同志們，指正我們的錯誤，提供我們進一步修改的要點，幫助我們來把這套教科書修訂得更好。

東北人民政府教育部

一九五〇年十二月

本書是根據蘇聯七年制中學及十年制中學8—10年級代數教科書編譯的。原書爲蘇聯吉西略夫(А. П. КИСЕЛЁВ)所著，1949年，莫斯科出版。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

高級中學課本代數第三冊目錄

第八章　方程的討論……1
Ⅰ　一元一次方程的討論……1
123. 討論方程的意義是什麼……1
124. 一元一次方程的一般形式……1
125. 正　解……1
126. 負　解……2
127. 零　解……3
128. 方程無根的情形……3
129. $\frac{m}{0}=\pm\infty$的意義……4
130. §128的補充……5
131. 不定解……5
132. 方程 $ax=b$ 的解的圖象……6
Ⅱ　二元一次聯立方程的討論……8
133. 一般公式……8
134. 討　論……8
Ⅲ　二次方程的討論……10
135. 公式的討論……10
136. 關於兩個光源的問題……11
第九章　虛數及複數……15
137. 虛　數……15
138. 複　數……15
139. 複數的運算……16
140. 複數的幾何表示法……20
140a. 複數的三角函數式……21
140b. 表示成三角函數式的複數運算……27

第十章　關於代數方程的某些知識 ……36

I　多項式的可整除性 ……36

141.　用差 $x-a$ 可除盡的關於 x 的整多項式 ……36

142.　二項式 $x^m \mp a^m$ 能被 $x \mp a$ 整除的條件 ……38

143.　$x^m \mp a^m$ 除以 $x \mp a$ 時的商數 ……39

144.　代數方程的一般形式 ……40

145.　代數方程的幾個性質 ……41

第十一章　聯合與牛頓二項式 ……43

I　聯　合 ……43

146.　定　義 ……43

147.　選排列 ……44

148.　問　題 ……46

149.　全排列 ……46

150.　例　題 ……47

151.　組　合 ……47

152.　組合數公式的另一形式 ……49

153.　組合的性質 ……49

II　牛頓二項式定理 ……50

154.　僅第二項不同的二項式之連乘積 ……50

155.　牛頓二項式定理公式 ……53

156.　牛頓二項式公式的性質 ……54

157.　二項式公式對多項式的應用 ……57

補　充

I　極　限 ……58

158.　定　義 ……58

159.　無限小的幾個性質 ……60

160.　極限的性質 ……62

II　二次三項式的討論、二次不等式 ……67

161.　問　題 ……67

162.　有相異實根的二次三項式 ……69

163. 有等根的二次三項式……………………………………76
164. 有虛根的二次三項式……………………………………79
165. 一般結論……………………………………………………83
166. 二次不等式…………………………………………………86

習題目錄

第十一章　聯合與牛頓二項式……………………………………94
§42. 聯　合……………………………………………………94
§43. 牛頓二項式定理………………………………………101
第十二章　複　數…………………………………………………106
§44. 複數的幾何表示法……………………………………106
§45. 複數的加減……………………………………………108
§46. 複數的三角函數式……………………………………109
§47. 復習題…………………………………………………115
第十三章　不等式與方程討論……………………………………117
§48. 一元一次不等式………………………………………117
§49. 一元一次方程討論……………………………………123
§50. 二元一次方程組討論…………………………………125
§51. 二次不等式……………………………………………129
§52. 二次方程討論…………………………………………132
第十四章　多項式除法……………………………………………137
第十五章　總復習題………………………………………………142
習題答案…………………………………………………………163

第八章　方程的討論

I　一元一次方程的討論

123. 討論方程的意義是什麼　討論方程是研究解方程時所有可能出現的特殊情形，並且解釋這些情形在組成這方程的問題裏具有的意義.

124. 一元一次方程的一般形式　我們在初中代數的§88中已經學過，所有一元一次方程經過一切可能的整理（脫括號，去分母，移項，併項等）後，可寫成如下的簡單形式：

$$ax=b,$$

式中文字 a 和 b 的值，可為正數、負數或等於零.

現在我們來討論，在 a 和 b 的各種數值下，這方程將有多少種解.

125. 正解　正解只有當 a 和 b 皆為正數或皆為負數時才能得到，例如：$3x=6$ 或 $-3x=-6$. 由這兩式可得

$$x=\frac{6}{3}=2, \text{或}\ x=\frac{-6}{-3}=2.$$

若方程能將問題的一切條件都包含在內，則適合於這方程的正解必能滿足於問題；但若問題的全部條件沒有完全包含在方程內，那麼由此所求得的正解，就可能不適合於該問題. 關於這點我們舉個例子來說明：

〔問題〕　由20個人（成年人和未成年人）組成的一個小組大家湊錢為圖書館買書. 成年人每人拿出3元，未成年人每人拿

出1元,若共湊了35元,則這個小組裏,有多少個成年人和多少個未成年人?

設成年的人數爲 x, 則未成年的人數爲 $20-x$, 而成年人共湊了 $3x$ 元,未成年人共湊 $(20-x)$ 元;因而得出下面的方程:

$$3x+(20-x)=35, \qquad 由此得\ x=7\frac{1}{2}.$$

這個正解,雖適合於方程,但不適合於問題. 因爲按照問題的性質,未知數 x 應該是整數,但這個方程裏沒有含未知數應該是整數的條件,而得一分數解. 因此這個問題沒有解.

126. 負解 在方程 $ax=b$ 裏,只有當 a 與 b 符號相反時才能得負解,例如:

$$5x=-15, \quad 或 \quad -5x=15;$$

於是 $$x=\frac{-15}{5}=-3, \quad 或 \quad x=\frac{15}{-5}=-3.$$

對於負解 $x=-m$, 我們應作如下的理解: 假設 $-m$ 適合於方程 $ax=b$, 於是將 $-m$ 代入方程後, 便得等式 $-am=b$. 由這等式看出,正解 m 能適合另一方程 $-ax=b$; 而此方程可看做是將上面方程中的 x 換成 $-x$ 而得到的. 由此可知, 若根據某問題而作成一個具有負解 $x=-m$ 的方程,則可把 x 換成 $-x$ 而得一新方程,這新方程應有正解 $x=m$.

但是這個新方程不能由原問題直接得出,故若想得到正解 $x=m$, 必須將原問題加以適當的改變. 舉一簡單的例題來說明:

父親40歲, 兒子10歲, 幾年後父親的歲數是兒子的7倍?

設以x爲未知數．很明顯，x年後父親的歲數爲$40+x$，而兒子的歲數爲$10+x$，由題設的條件列出方程：

$$40+x=7(10+x), \quad \text{由此得} \quad x=-5.$$

在方程裏，若將x變爲$-x$，則可得出新方程：

$$40-x=7(10-x),$$

這個方程的解是正數．但是產生這個方程的問題是已經變了，它是問多少年以前父親的歲數是兒子的7倍．

由這個例子可以看到，負解應該理解爲與正解有恰相反的意義．若正解表示某事件後的時間，則負解表示這事件前的時間；若正解表示收入，則負解表示支出等等．若按問題的意思，未知數x不能有兩個相反的意義時，則負解將表明那個問題沒有解．

127. 零解 假設在方程$ax=b$中，$b=0$而係數$a\neq 0$，例如方程$4x=0$，就是乘積$4x$等於零．但我們知道，只有乘積中的某乘數等於零時，乘積才等於零，所以x應爲零．或由式子的運算上也可得出$x=\frac{0}{4}$，即$x=0$．

問題．於分數$\frac{13}{26}$的分子及分母同加上什麼數，這分數方能成爲$\frac{1}{2}$？

用x代表加數，我們得方程：

$$\frac{13+x}{26+x}=\frac{1}{2},$$

由此得 $26+2x=26+x$，即$x=0$．

此即分數本身就等於$\frac{1}{2}$．

128. 方程無根的情形 於方程$ax=b$中，a爲零而b不等於

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

零時，例如：$0\cdot x=10$，像這樣的等式是不能成立的，因為 x 不論是什麼數，乘積 $0\cdot x$ 都必等於零，而不能等於 10。又例如方程：

$$\frac{x}{2}-4+\frac{x}{3}=7+\frac{5x}{6}.$$

用一般的方法即可解此方程，去分母（公分母為 6）得

$$3x-24+2x=42+5x,$$

即 $\qquad 5x=66+5x \quad$ 或 $\quad 5x-5x=66$。

無論 x 是什麼值，$5x-5x$ 恆為零，而不是 66。即此方程無根。

若最初不知係數 $a=0$，用它除方程 $ax=b$ 的兩邊，則得 $x=\frac{b}{a}$。及至知道 $a=0$ 時，那末上式就變為 $x=\frac{b}{0}$。但以零為除數是不可能的，所以從最後的式子裏可以得出結論：若 $a=0$，則方程 $ax=b$ 無根（即問題無解）。但僅限於這一種結論還是不足的，我們更應該指出另一個重要的情況，為了解釋這個情況，應預先觀察當分數分子不變、分母無限縮小時，分數值的變化。

129. $\frac{m}{0}=\pm\infty$ 的意義 設在分數 $\frac{m}{n}$ 中，其分母 n 的絕對值無限縮小，而趨近於零，但分子不變。例如分母 n 按以下各值逐漸縮小：

$$n=0.1;\ n=0.01;\ n=0.001;\ n=0.0001,\ \text{等等。}$$

由此，分數可得到一些逐漸擴大的數值：

$$\frac{m}{0.1}=10m;\ \frac{m}{0.01}=100m;\ \frac{m}{0.001}=1000m;$$

$$\frac{m}{0.0001}=10000m,\ \text{等等。}$$

很明顯，當分子不變而分母無限趨近於零，則分數 $\frac{m}{n}$（分子或分母均可為負數）的絕對值將無限增大。這種情形用式子簡

單地表示則爲：

$$\frac{m}{0}=\pm\infty,$$

式中符號∞是表示'無限大'．但不要把它了解爲一個數，因爲用零作除數本來是不可能的，在這裏只簡單地表示這分數的絕對值無限增大(或如一般所說的趨近無限大)的意思．若分母趨近於零，而分子不變，則分數變爲正無限大或負無限大（應視趨近於零的分母與分子的符號是相同或相異而定)．

130. §128 的補充 現在我們可以補充 §128 的討論如下：

當 $a=0$ 時，方程 $ax=b$ 無根；但假如 a 不等於零而是趨近於零時，則根的絕對值無限增大．

131. 不定解 設在方程 $ax=b$ 中，二數 a 和 b 都是零，則方程變爲恆等式：$0\cdot x=0$，對於 x 的一切值都正確．即在這種情形，方程成爲不定的，也就是它有無數的任意解．

若不知 a 等於零，以 a 除方程的兩邊，則 x 等於分數 $\frac{b}{a}$．當 $b=a=0$ 時，這分數成爲 $\frac{0}{0}$．這種式子沒有任何一定的數值．

我們來研究下面的問題：

問題．應在分數 $\frac{a}{b}$ 的分母及分子加上什麽數，才使這分數能等於 m？

設所求的數爲 x，則得下列方程：

$$\frac{a+x}{b+x}=m.$$

由此，$a+x=bm+mx$；$x-mx=bm-a$；$(1-m)x=bm-a$．

若 $m\neq1$，則 $x=\dfrac{bm-a}{1-m}$．

若　$m=1$，而差 $b-a$ 爲零以外的任意數(正或負)，則得

$$0 \cdot x=b-a.$$

由此我們可以知道，當 $m=1$ 及 $b \neq a$ 時，沒有任何的 x 值能適合這個問題；但假如 m 不等於 1 而只是趨近於 1，則 x 的絕對值無限增大。

若　$m=1$ 及 $b=a$ 時，則得

$$0 \cdot x=0.$$

從此式可以知道，x 的任何數值都適合題意(實際是分數 $\frac{a+x}{a+x}$ 對於 x 的一切值都等於 1)。

132. 方程 $ax=b$ 的解的圖象　方程的左邊用 y_1、右邊用 y_2 表示，在同一坐標系中作兩個表示函數 $y_1=ax$ 和 $y_2=b$ 的圖象。

第一函數的圖象是過原點和點 $(1, a)$ 的直線；

第二函數的圖象是平行於 x 軸且 y 軸截距爲 b 的直線(如圖 31，這是表示 $a>0$ 和 $b>0$ 的情形；學者可自作以下幾種情形的圖象：1) $a>0$，但 $b<0$；2) $a<0$ 但 $b>0$；3) $a<0$ 和 $b<0$)。這兩條直線相交於 M 點，這點的橫坐標 OA 就是方程 $ax=b$ 的根，因爲當橫坐標等於 OA 時，則直線 $y_1=ax$ 的縱坐標等於直線 $y_2=b$ 的縱坐標，因此 $ax=b$。

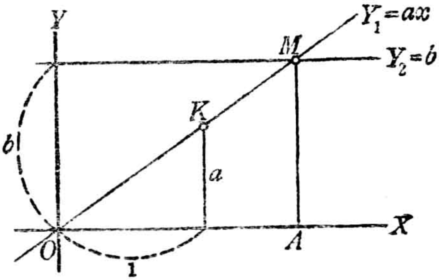

圖　31

用這類圖形表示法我們能够直觀地解釋方程 $ax=b$ 的解的

所有情形．現在只就圖來說明下面兩種情形：

1）方程無解；2）方程有不定解．

1）方程無解（圖 32）．係數 a 的值愈減小，則直線 $y=ax$ 愈接近 x 軸，於是直線 $y=b$ 與直線 $y=ax$ 的交點 M 隨之而向右移至 M_1、M_2、M_3，等等．這時橫坐標 OA 也逐漸增大，而變為

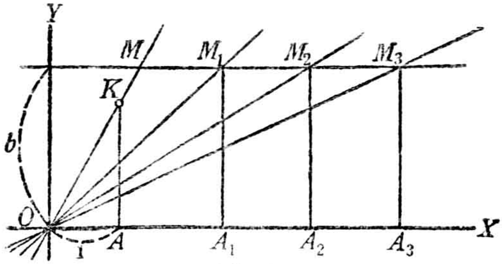

圖 32

OA_1、OA_2、OA_3 等等．這就是說，當 a 無限縮小趨近於零時，則方程 $ax=b$ 的根，便無限增大（可以這樣表示：$x=\frac{b}{0}=\infty$）．

2）方程有不定解．我們在 §131 中已看到，當 $a=b=0$ 時，便產生不定解，為說明這種情形，可看 32 圖．當 b 值趨近於 0 時，直線 $y_2=b$ 仍然平行於 x 軸而趨近於它，當 $b=0$ 時便與 x 軸相重合．另一方面，當 $a=0$ 時，則直線 $y_1=ax$ 也變為 x 軸，此時兩條直線 $y_2=b$，$y_1=ax$ 皆與 x 軸重合，所以在 x 軸上的一切點都可看作二直線的交點，即根的值為不定．

練　習

試驗證下列方程無解（使變成不能成立的等式）：

233. $\frac{5x+1}{6}+\frac{x+3}{4}=x+1+\frac{x-3}{12}$.

234. $(x+2)^2+(x-2)^2=(x+3)^2+(x-3)^2$.

試驗證下列方程有無窮多解(變爲恆等式)：

235. $8x+3=(x+2)^2-x^2+4x-1$.

236. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$.

237. 二圓的半徑爲 r 及 r_1，二圓心的距離爲 d，試在連心線上找一點，由這點作二圓的外公切線．並檢查這問題中的各種可能情形．

238. 如上題，但作內公切線．

II 二元一次聯立方程的討論

133. 一般公式 在初中代數§97中，已經看到聯立方程的一般式：

$$ax+by=c \text{ 及 } a'x+b'y=c'.$$

解這聯立方程，可得求解公式：

$$(ab'-a'b)x=(b'c-bc');$$

$$(ab'-a'b)y=(ac'-a'c). \qquad (1)$$

設 $ab'-a'b\neq 0$，則

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}; \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \qquad (2)$$

134. 討論 關於求解公式分爲兩種情形討論如下：

1) 公分母 $ab'-a'b\neq 0$．在這種情形下方程僅有一組解，這個解對於問題的意義，則與在討論一元一次方程時所作的說明相同．

2) 公分母 $ab'-a'b=0$．在這種情形下，(2)式中的分子可能不等於零，也可能等於零，若 a、a'、b、b' 都不等於零，則必屬於下列兩種情形之一．

1. 在(2)式內若 x 或 y 的一個的分子爲零則他一個的分子

亦必爲零.

比如 x 的分子爲零, 即:

$$cb'=c'b;\ \text{又原設}\ a'b=ab';$$

將這兩式, 左邊乘左邊, 右邊乘右邊, 則得

$$cb'a'b=c'bab'\ \text{即}\ cb'a'b-c'bab'=0,$$

所以
$$bb'(a'c-ac')=0.$$

因爲 b 及 b' 都不等於零, 所以此式若成立, 必須 $a'c-ac'=0$, 也就是 y 的分子等於零.

若(2)式中 y 的分子等於零, (即 $ac'=a'c$ 及 $ab'=a'b$), 則得 $ac'a'b=a'cab'$; $aa'(c'b-cb')=0$; $c'b-cb'=0$.

2. 在 (2) 式中若未知數中一個的分子不等於零, 則他一個未知數的分子也不等於零.

因在前面已證明, 若 (2) 式中的一個未知數的分子等於零, 則他一個未知數的分子也必等於零; 所以若兩分子中的一個不等於零則他一個當然也不能等於零.

若在 (2) 式中, 二未知數的分子都等於零, 則此題的解是不定的. 因爲若將第一個方程的所有項乘以 b', 第二個方程的所有項乘以 b (按假定 b、b' 都不等於零) 則得

$$ab'x+bb'y=cb'\ \text{及}\ a'bx+bb'y=c'b. \qquad (A)$$

但因 $ab'=a'b$ 及 $cb'=c'b$, 所以方程 (A), 可以看做一個含有兩個未知數的方程, 在這種情形下, 正如我們所知, 未知數可能有無限多個數值.

若在(2)式中分子不等於零, 而分母 $ab'-a'b=0$, 則方程相矛盾, 因爲若 $ab'=a'b$, 而 $cb'\neq c'b$, 則聯立方程 (A) 的左邊有相

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com