新中學教科書

解析幾何學

全一冊

編者

江都余恒

校者

松江雷瑮

中華書局印行

算術

新中學教科書 算術 布面精裝一冊 一元二角 紙面平裝 八角

新中學教科書 算術習題詳解 布面精裝一冊 一元四角

審定 新制算術教本 二冊 各八角

新制算術教本答數 二冊 各一角

中華中學 算術教科書 二冊 各六角

講習適用 算術教科書 一冊 五角

算術講義 一冊 六角

中華書局發行

自六(14)

有著作權不准翻印

民國十四年四月發行

民國十四年七月再版

新中學教科書 解析幾何學（全一冊）

◉【定價銀九角】

（外埠酌加郵匯費）

編者 江都余恒

校者 松江雷瑮

發行者 中華書局

印刷者 中華書局

印刷所 上海靜安寺路二七七號 中華書局

總發行所 上海棋盤街 中華書局

分發行所 中華書局 北京 天津 保定 張家口 濟南 青島 太原 開封 鄭州 西安 蘭州 南京 徐州 杭州 蘭溪 安慶 蕪湖 南昌 九江 漢口 武昌 沙市 長沙 衡州 常德 成都 重慶 福州 廈門 廣州 潮州 汕頭 雲南 貴陽 奉天 吉林 哈爾濱 新加坡

解析幾何學編輯大意

一. 本書按照新學制編纂,供高級中學校,後期師範學校,及同等學校教學之用.

一. 本書共分十編:前九編屬平面,於點線之坐標,方程式之軌跡,重要之定理,及應用之公式,詳加討論;末一編屬立體,述空間之坐標法,使學者略知立體解析幾何學之大意.

一. 解析幾何學與代數幾何三角諸科相銜接,本書處處互相引證,互相聯絡,俾學者易於領悟.

一. 本書對於選擇教材,排列順序,尤加注意,每講一理,先述公式之求法以立其基,次舉算例之解答以明其用,務使學者一一澈底,不留絲毫懷疑之點.

一. 本書各節有各節之習題,各編有各編之習題,由分而合,由淺而深,使學者循序漸進,就定理及公式之應用,熟習馭題之方法.

一. 本書術語悉用最通行者,並附有英名,以便學者中英對照.

一. 本書編纂,本著者多年教授之經驗,採歐美各家名著之精華,措辭淺顯,立術簡捷,於學者事半功倍之效,差敢自信;惟科學改進,日就月將,及時指正,尚有望於海內之數學家.

新中學教科書

解析幾何學

目次

新中學教科書

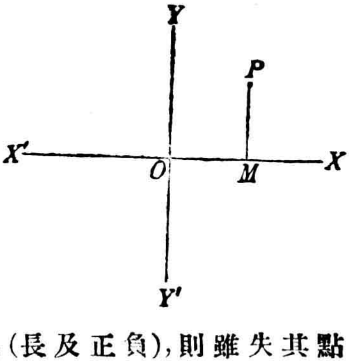
解析幾何學

第一編

點

1. 於平面上,過一點O作XOX′及YOY′二直線,其交角可任何大,但通常恒用直角. 此O點曰**原點**(Origin),XOX′曰X**軸**(X-axis),YOY′曰Y**軸**(Y-axis).

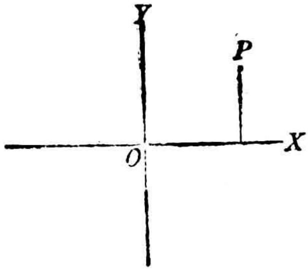
設於此平面上有任一點P,即可從P點作與y軸平行之直線,交x軸於M,則PM曰P點之**縱線**(Ordinate),OM曰P點之**橫線**(Abscissa). 而M在O之右方者橫線爲正,在O之左方者橫線爲負;又P點在x軸之上方者縱線爲正,而在下方者縱線爲負,橫線恒以x表之,縱線恒以y表之.



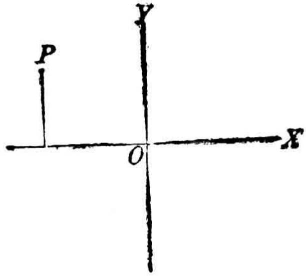
假令知一點之縱線及橫線(長及正負),則雖失其點之痕跡,仍可再尋出其所在. 故知橫線及縱線,則可決定其點之位置.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

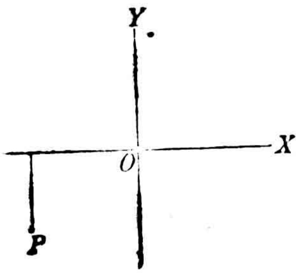
例如以分爲單位,若 $x=3$, $y=2$, 則其點之位置如甲圖;



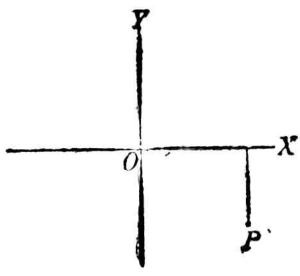
甲圖



乙圖



丙圖



丁圖

若 $x=-3$, $y=2$, 則如乙圖;若 $x=-3$, $y=-2$, 則如丙圖;若 $x=3$, $y=-2$, 則如丁圖.

凡決定點之位置除此法外,尚有他法(見第三編),皆謂之**坐標法** (Coördinates System), 其 x 軸與 y 軸曰**坐標軸**(Axes of Coördinates), 橫線與縱線曰**坐標**(Coördinates).

凡稱「點(a, b)」者,即橫線爲 a, 縱線爲 b 之點也;又如云「坐標(a, b)」者,亦橫線爲 a, 縱線爲 b 之意.

此外用其他字母如(x,y), (x_1,y_1), (x',y'), (h,k)等,或記以數字如(2,3)者,其意亦準之. 凡以代數上所用之字母表坐標者,其字母爲表縱橫線之長,而符號有正有負,如云點(a,b), 若$a=3$, $b=-2$, 則如前丁圖.

坐標軸之交角本可任意,但通例恒用直交軸,取其簡便也,故本書以直交軸爲主,遇斜交軸者,隨時明言之.故不云軸之交角者,即指直交軸也. 凡斜交軸之交角,恒以ω記之.

例題

1. 以$\frac{1}{5}$寸,即二分爲單位,求下諸點之位置:
(3,2), (4,4), (1,5), (4,−1), (−1,3), (−4,−1), (0,1), (10,0), (0,−5), (−2,0), (0,0).

2. 設$a=\frac{1}{4}$寸, $b=\frac{3}{5}$寸, 求下記諸點之位置:
(a,b), $(4a,2b)$, $(\frac{1}{2}a,-b)$, $(b,2a)$, $(-3a,-b)$, $(0,3a)$, $(-b,3b)$.

3. 設$a=\frac{3}{5}$寸, $b=-\frac{1}{2}$寸,求上題之各點.

4. 試作(2,−3), (−2,−2)二點之聯線,其單位爲$\frac{1}{2}$寸.

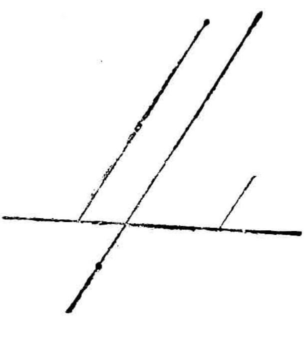
5. 試以(2,3), (−1,4), (−3,0)爲角點,作三角形.

(下列各題均用$\frac{1}{5}$寸爲單位).

6. 作以(−2,5)爲中心,3爲半徑之圓.

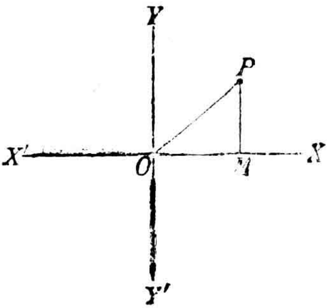
7. 從六十度交角之兩軸,求$(2,\frac{3}{2})$, (−1,4), (0,−1)諸點之位置.

8. 若上題兩軸之交角爲30°,則如何?



9. 設有 $120°$ 交角之軸,求作以(0,0), (−2,5), (3,−1), (4,2)爲頂點之四邊形.

2. 知任一點之坐標,求其與原點之距離.

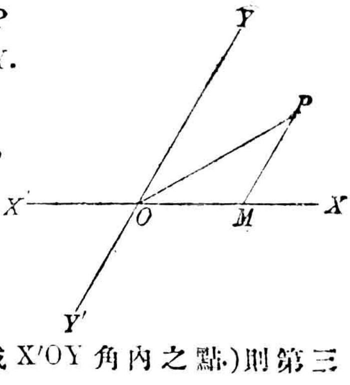


設 P 點之橫線 OM 以 x 代之,縱線 PM 以 y 代之,設爲直交軸,則

$$OP^2=OM^2+PM^2=x^2+y^2.$$

$$\therefore\quad OP^2=\sqrt{x^2+y^2}.$$

若爲斜交軸則如下圖,從 OPM 三角形,得



$$OP^2=OM^2+PM^2-2\cdot OM\cdot PM\cos OMP$$
$$=OM^2+PM^2+2\cdot OM\cdot PM\cos XOY.$$

$$\therefore\quad OP=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega}.$$

【注意】 於直交軸式中,但含 x 及 y 之平方,故 x, y 之正負無關係;於斜交軸則不然,於 ω 爲銳角者,若 x,y 同符號,(即 XOY 或 X′OY′ 角內之點.) 則第三項 $2xy\cos\omega$ 爲正;若異符號,(即 XOY′ 或 X′OY 角內之點.)則第三項爲負,又 ω 爲鈍角者,則反是.

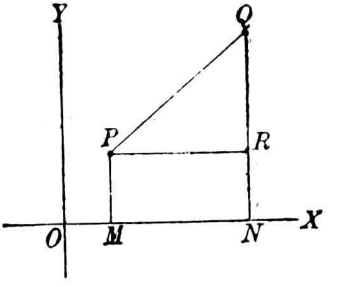
例　　題

1. 問從原點至(3,4), (−4,3), (−2,−5), (2a,−3a), (3a,4b)

之距離(直交軸).

2. 於前題若軸之交角爲60°則如何？又若爲120°則如何？

3. 求二點之距離.



設二點P, Q, 其坐標爲(x_1, y_1), (x_2, y_2).試與x軸平行作PR,交Q之縱線於R,若爲直交軸,則

$$PQ^2=PR^2+QR^2,$$

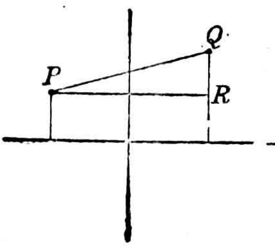
而 $PR=ON-OM=x_2-x_1$,

$QR=QN-PM=y_2-y_1$.

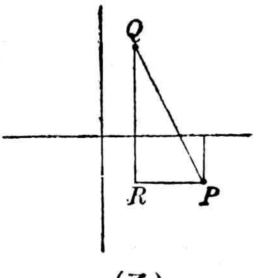
$\therefore\ PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$.

$\therefore\ PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

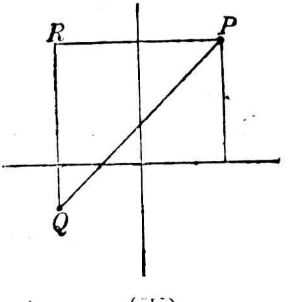
【注意】 上式中坐標若爲負數者,亦合於理,例如x_1爲負,x_2爲正,則x_2-x_1爲其絕對值之和,如下甲圖,可知其恰合也;又如$x_2<x_1$,則x_2-x_1爲負,然其平方仍爲正,從下乙圖可知其仍無矛盾之處;其他如丙圖,其x_2, y_2爲負者,亦無不合.



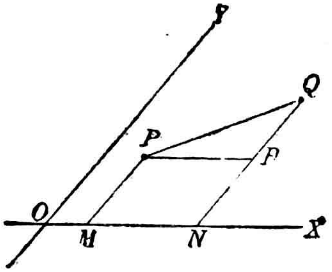
(甲)



(乙)



(丙)



若爲斜交軸,則

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 - 2PR.QR\cos PRQ,$$

而 $\angle PRQ = \angle ONQ = \pi - \omega.$

$\therefore\quad PQ^2 = PR^2 + QR^2 + 2PR.QR\cos\omega$

$\therefore PQ = \sqrt{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega\}}.$

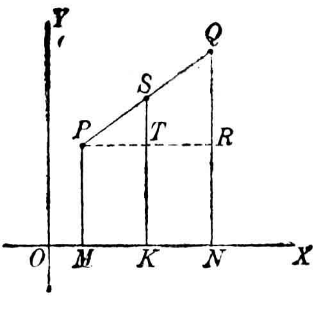
例　　題

1. 於直交軸,求$(5,2)$, $(-1,4)$之距離.

2. 於上題若爲斜交軸,而$\omega = 60°$,則如何?

4.　求二點聯線之中點之坐標.

P, Q二點之坐標爲(x_1, y_1), (x_2, y_2), 而S爲PQ之中點;作各縱線PM, SK, QN;又與x軸平行作PR直線,交SK於T,則



$$
\begin{aligned}
OK &= OM + MK \\
&= OM + PT \\
&= OM + \tfrac{1}{2}PR \\
&= x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{x_1 + x_2}{2}.
\end{aligned}
$$

同樣得　$SK=\frac{y_1+y_2}{2}$.

【注意】本題之式,與軸之交角無關係.

例題

1. 求(2,3)與(6,8)之中點.
2. 求(−3,1)與(4,−5)之中點.

5. 求分二點聯線等於所設比之點之坐標.

若所設之比爲$m:n$,則仍如前圖,

其　$PS:SQ=m:n$,　　∴　$PT:TR=m:n$.

∴　$PT:PR=m:m+n$.　　∴　$PT=\frac{m}{m+n}PR=\frac{m}{m+n}(x_2-x_1)$,

而　$OK=x_1+\frac{m}{m+n}(x_2-x_1)=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$.

同樣知　$SK=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$.

【注意】本題之式,亦與軸之交角無關.

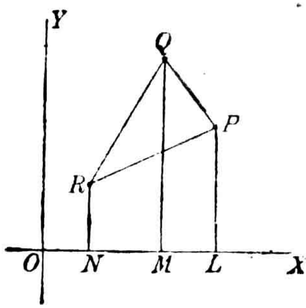
例題

分(3,2),(−7,4)聯線爲2:3之點,求其坐標.

6. 用三角形之三個角點之坐標,求其面積.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

三角形之三頂點爲P, Q, R, 其坐標爲(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3).



面積 PQR=PQML+QRNM−PRNL.

依梯形求面積法得

$$PQML=\tfrac{1}{2}\times ML\times(PL+QM)$$
$$=\tfrac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2).$$

同樣得 $QRNM=\frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_2+y_3)$,

$PRNL=\frac{1}{2}(x_1-x_3)(y_1+y_3)$.

∴面積PQR

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)-(x_1-x_3)(y_1+y_3)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3\}.$$

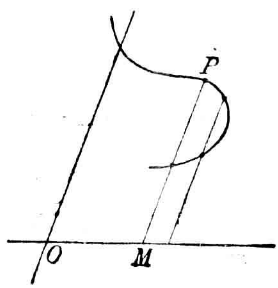
【注意】 若爲斜交軸,則以$\sin\omega$乘此式,卽得.

例題

有三角形,其三個角點之坐標爲(6,7), (4,9), (3,2), 求其面積若干?

7. 線之方程式;方程式之軌跡.

從含二未知數 x, y 之一個方程式不能決定 x, y 之値,然於此兩未知數中,設其一爲某値,必可得其他一數之値,蓋 x 與 y 之關係爲已定故也.

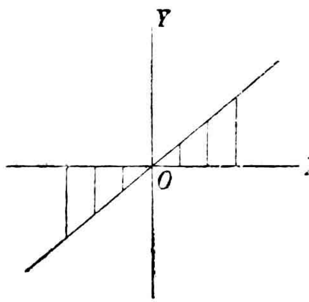


於如是之方程式,假令以其 x, y 爲表横線,縱線,則其方程式卽能表線,何也? 設 x 之値爲OM,則從其方程式必能得 y 之對應値爲MP,

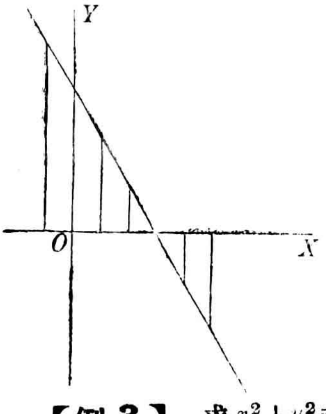
(但 y 之值不必限於一個,或爲多個.)因得 P 點(若 y 之值有數個,卽得數 P 點);如是令 x 之值順次遞增遞減,必遞得 y 之各對應值,卽遞得各 P 點;此諸 P 點之軌跡,卽其方程式所表之線也.

茲示數例如下:——

【例 1】 $x=y$, 求其軌跡.



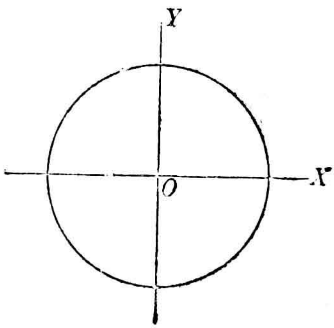
設 x 爲 $-2, -1, 0, 1, 2$ 等,則 y 亦爲 $-2, -1, 0, 1, 2$ 等;卽 y 之值恒與 x 同,故此方程式所表之軌跡,爲 XOY 角之二等分直線明矣.



【例 2】 求 $2x+y=6$ 之軌跡.

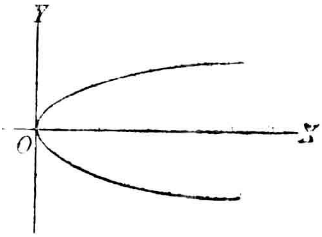
設 x 爲 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 等數,則 y 爲 $8, 6, 4, 2, 0, -2, -4$ 等數,故得如圖之直線(此諸點之軌跡所以爲直線之故見後).

【例 3】 求 $x^2+y^2=16$ 之軌跡.



因 x^2+y^2 爲自原點至 (x, y) 點距離之平方,而爲 16,故其距離爲 4,是所求軌跡中諸點,與原點之距離爲常數 4 也;故其軌跡爲半徑爲 4 之圓(以原點爲心).

【例 4】 求 $y^2=ax$ 之軌跡.



設 x 順次爲 $0, a, 4a, 9a, 16a$,等,則 y 之值爲 $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \pm 4a$,等,故其軌跡如圖之曲線形(此曲線詳後).

於方程式軌跡中任一點之坐標卽 x, y 曰**流通坐標**(Current Coördinates),其 x, y 又謂之**變數**(Variables),其坐標爲數字或無變化之數者(如例4之 a)曰**常數** (Constant).

例題

1. 試設 x 爲從 -4 至 $+4$ 各值,而作下列諸方程式之軌跡:

$$y=3x, \qquad 2y+7x=0, \qquad x-y=5, \qquad \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=2,$$

$$x^2+y^2=9, \qquad xy=1, \qquad y^2=\frac{x}{6}, \qquad \frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

2. 試設 y 爲從 0 至 6 之各值,而畫下列諸式之軌跡:

$$2y+5x=12, \qquad x+2y=0, \qquad xy+8=0, \qquad x^2-y^2=9.$$

8. 於本書(平面之部)所論者,爲 x, y 之一次方程式

$$Ax+By+C=0$$

及二次方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

之軌迹及其簡易之性質.

第一編之問題

(1) 設三角形各角點之坐標爲$(0,0)$, $(2,-7)$, $(-6,0)$, 試作其形. 又其各邊中點之坐標如何?

(2) 求半徑爲a之圓內接正八邊形其各角點之坐標. (中心爲原點,過角點之二直交直徑爲坐標軸.)

(3) 於前問之各角點作切線,卽成外接正八邊形,問此各角點之坐標.

(4) A 爲在x軸正之部分(卽原點右方),而距原點爲 4 之點, B 爲在y軸負之部分(卽原點下方),而距原點爲 3 之點,問 AB 之距離. 又分 AB 爲 3:1,其分點之坐標如何?

(5) 有二點$(7,8)$, $(4,2)$,若爲直交軸,其距離如何? 又於交角$60°$之斜交軸則距離如何?

(6) 求$(-2,0)$, $(5,-3)$二點之距離.

(7) 有正六邊形,各邊之長爲a,以隣接二邊爲坐標軸,求各角點之坐標.

(8) 三角形之各角點如下求其面積:

(i) $(0,3)$, $(-2,0)$, $(1,-1)$.

(ii) $(0,a)$, $(4a,-a)$, $(-a,3a)$.

(iii) $(0,0)$, (x,y) (x',y').

(9) $x=4y$, $x-y=1$, $x^2-2y+1=0$, $x^3+y=0$, 試作其各軌跡.

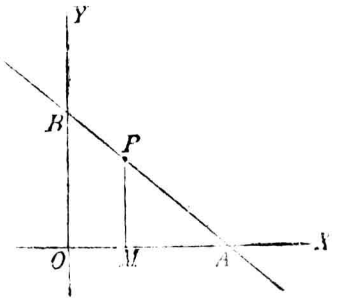
(10) 於前題爲$60°$交角之斜交軸,作其軌跡.

第二編

直線

9. 定義. 設一直線交 x 軸於A點,交 y 軸於B點,則OA及OB謂之 x 軸及 y 軸上之截部(Intercepts),截部亦如第一款所述有符號,卽原點之右方或上方者爲正,而左方或下方者爲負.

10. 有一直線,知其兩軸上之截部,卽可求其直線之方程式.



(直交軸與斜交軸同解).

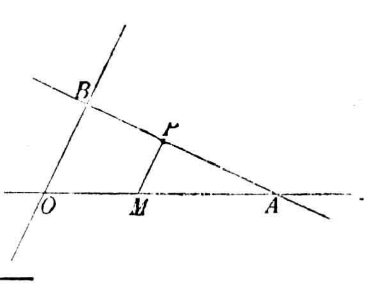
設此直線上任意點P之坐標爲 x, y, 而截部OA, OB爲 a, b.

因MP平行於OB,故

$$\frac{MP}{OB}=\frac{MA}{OA}=\frac{OA-OM}{OA},$$

卽 $\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}=1-\frac{x}{a}$

$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 爲所求之式.



於第3款曾論及凡式中 x, y 之值,不論正負均適合,此亦坐標軸便利之一要點也.今將本款之式更詳論之如次:——

上圖設P在AOB角內,而截部爲正者.然P卽在任何

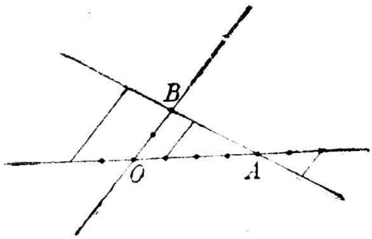
位置,截部卽爲負,亦無不合,今就種種情形,一一作圖以明之.

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1,\ \text{卽}\ y=2\times\frac{4-x}{4}.$$

$x_1=1,\ y_1=2\times\frac{4-1}{4}=1.5;$

$x_2=-2,\ y_2=2\times\frac{4-(-2)}{4}=3;$

$x_3=6,\ y_3=2\times\frac{4-6}{4}=-1.$

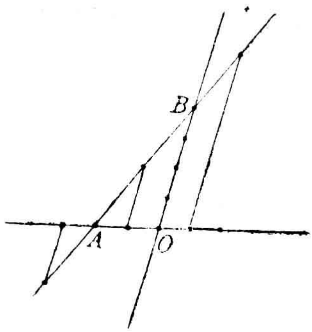


$$-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,\ \text{卽}\ y=3\times\frac{2+x}{2}.$$

$x_1=1,\ y_1=3\times\frac{2+1}{2}=4.5;$

$x_2=-1,\ y_2=3\times\frac{2+(-1)}{2}=1.5;$

$x_3=-3,\ y_3=3\times\frac{2+(-3)}{2}=-1.5.$

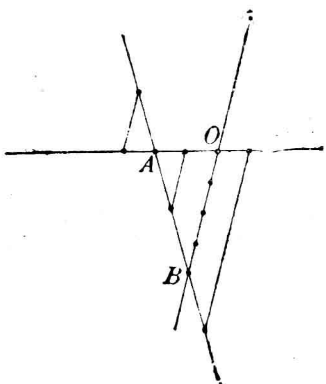


$$-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1,\ \text{卽}\ y=-2(2+x).$$

$x_1=1,\ y_1=-2(2+1)=-6;$

$x_2=-1,\ y_2=-2(2-1)=-2;$

$x_2=-3,\ y_3=-2(2-3)=+2.$



$$\frac{2x}{5}-\frac{3y}{4}=1,\ \text{卽}\ y=\frac{4}{3}\times\frac{2x-5}{5}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com