普通高等教育
软件工程“十二五”规划教材

12th Five-Year Plan Textbooks
of Software Engineering

离散数学

陈志奎 ◎ 主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

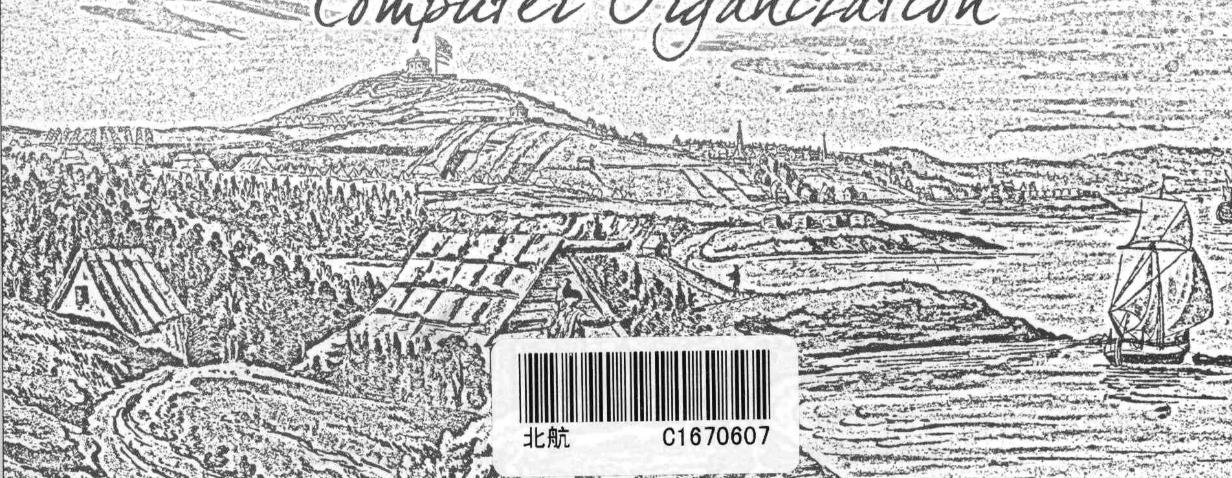
普通高等教育
软件工程“十二五”规划教材

12th Five-Year Plan Textbooks
of Software Engineering

离散数学

陈志奎 ◎ 主编

Principles of Computer Organization



人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 陈志奎主编. -- 北京 ：人民邮电出版社, 2013.9
普通高等教育软件工程“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-32166-4

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第156368号

内 容 提 要

本书分为数理逻辑、集合论、代数结构和图论 4 个部分。其中数理逻辑部分描述一个符号化体系，这个体系可以描述集合论中的所有概念；集合论中有 3 个小模块，即集合、关系、函数，关系是集合中笛卡儿乘积的子集，函数是关系的子集；代数系统是定义函数的运算；图论是一类特殊的代数系统。

本书适合作为高等院校软件工程专业和计算机专业离散数学课程的本科生教材，也可作为软件工程与计算机等相关专业的自学参考书。

◆ 主　　编　陈志奎
责任编辑　李海涛
责任印制　彭志环　杨林杰
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京中新伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
印张：15.25　2013 年 9 月第 1 版
字数：398 千字　2013 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：35.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

软件工程作为一个人才培养的独立专业，并单独成立全国示范性软件学院，已经有 10 多年了。经过 10 多年的发展，软件工程专业已经成为与计算机科学与技术专业并列的一级学科。但目前，软件工程专业所使用的教材大多来自于计算机科学与技术专业。离散数学是计算机科学与技术和软件工程专业培养体系中的核心基础课程。大多数《离散数学》教材都是针对计算机科学与技术专业的，数学性比较强，着重于数学理论的建立与推导，相对而言工程应用比较薄弱，软件工程专业的学生自学阅读时比较困难。有些国外的教材逻辑性强但实例较少，不太适合自学；有些教材实例较多，但逻辑性较差，中国学生难以接受。

基于我们在软件工程专业教授离散数学多年经验的基础上，经过广泛的调研以及和人民邮电出版社组织“软件学院教材”编写专家会议讨论后，一致认为很有必要编写一本实例较多，逻辑性合理，浅显易懂，便于软件学院学生学习的离散数学课程教材。

离散数学在本科软件工程专业的授课内容一般分为四大部分：数理逻辑、集合论、代数系统、图论，这 4 个部分紧密连接。数理逻辑描述了一个符号化体系，这个体系可以描述集合论中的所有概念。集合论中又有 3 个小模块：集合、关系、函数。关系是集合中笛卡儿乘积的子集，函数是关系的子集。代数系统是定义函数的运算。图论是一类特殊的代数系统。本书针对软件工程专业，强调系统逻辑性，前后内容的衔接，在内容安排上点出这种联系并将章节高度的模块化，另外，整本书使用统一的符号化体系描述和解题。因此本教材具有以下一些特点。

首先，本教材着重体现理论与应用的结合。离散数学是软件工程专业的核心课程之一，与高等数学、线性代数等其他公共数学课程不同。但是，对于学生而言，往往误把它作为同高等数学一样的公共数学课，仅仅认识到离散数学的理论公式部分，看不到其在实际中的应用价值以及同软件工程专业之间的关系和在软件工程专业中所处的位置。本书的一个着眼点就是在章节结构清晰的基础上，每一个部分都与具体的应用相结合，比如布尔逻辑与信息检索、图的遍历与网络爬虫、图的最短路径与地图导航等。每一个定义、定理都由软件工程的实例加以解释和说明，增强可读性。对软件学院的学生来说，看到这些应用与实例能够激发学生的学习热情，并培养建立离散模型解题的认识和能力，不断增强对软件工程的认识和理解。为此，在本教材中，我们为这些定义和定理准备了大量的范例，将抽象的内容具体化，来降低理解的难度。

其次，实例同软件工程的相关性强。对知识点的解释方式同被教授对象的知识体系的吻合度越高，其被理解和吸收的效率就越高。为了使教材中的知识点可以更好地被软件工程专业的学生所掌握，我们在教材中应用了许多同计算机科学相关的实例。

最后，离散数学是很多软件工程专业课程的先修课，比如说操作系统、数据

结构、编译原理等。本书将相关理论与后续专业课联系，真正实现先修课的价值和无缝衔接，帮助学生构建自己的知识架构。将软件工程的基本原理贯穿到离散数学的知识点，贯穿到后续课程的体系中。

在本书的编写过程中，得到了许多教师的帮助，特别是曹晓东教授和史哲文老师对书稿进行了认真的审阅，并提出了宝贵的修改意见，对此我们表示衷心的感谢。本书的第 3 章至第 5 章由周勇完成，其他部分由陈志奎完成。作者还要感谢人民邮电出版社的编辑，在他们的支持下，本书才能很快出版发行。另外，本书在编写过程中参考和引用了有关方面的书籍，作者在此对参考文献中所有的作者表示衷心的感谢。

本书可作为软件工程专业的教材，也可作为计算机科学与技术专业的教材。

由于作者的学识水平有限，书中如出现不准确、不适宜或者疏漏的内容，希望读者给予批评指正，在此表示感谢。

编　者

2013 年春于大连理工大学

目录

第 1 章 命题逻辑

逻辑为确定一个给出的论证是否有效提供各种方法和技巧，而根据研究对象和方法的不同可以分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。其中数理逻辑就是用数学方法研究人的思维形式和规律，通过建立一套表意符号体系对事物进行抽象并推理，从而研究前提和结论间的形式关系的科学。其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统。

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程，这种想法早在 17 世纪就有人提出过。莱布尼茨就曾经设想过能不能创造一种“通用的科学语言”，可以把推理过程像数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。由于当时的社会条件，他的想法并没有实现。但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽，从这个意义上讲，莱布尼茨可以说是数理逻辑的先驱。

一般认为，旧逻辑学的创始人是公元前 4 世纪的希腊思想家亚里士多德（Aristotle）；新逻辑学的创始人是 17 世纪的德国哲学家莱布尼兹（Leibniz）和 19 世纪中叶的英国数学家乔治·布尔（George Boole）。1847 年，布尔发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，并创造一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。

19 世纪末 20 世纪初，数理逻辑有了比较大的发展，1884 年，德国数学家弗雷格出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备。对建立这门学科做出贡献的还有美国人皮尔斯，他也在著作中引入了逻辑符号，从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。之后英国数学家德·摩根（A. De Morgan）和罗素（B.A.W.Russell）等人丰富和完善了数理逻辑。

命题逻辑和谓词逻辑是计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识。在本章中，将对命题逻辑进行介绍和讨论。

1.1 命题和联结词

1.1.1 命题的概念

定义 1.1 命题是或者为真，或者为假而不是两者同时成立的陈述句。

作为命题的陈述句所表达的判断结果称作命题的真值，真值只能取两个值：真或假。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。注意：任何命题的真值都是唯一的。

如果一个命题的真值是真，则用 1 或 T(Ture)来表示；如果一个命题的真值是假，则用 0 或 F（False）来表示。

命题用大写的英文字母，如 P，Q，R…来表示。

判断给定句子是否为命题分为两步：首先判断该句子是否为陈述句，其次判断它是否有唯一的一个真值。

例 1.1 判断下面句子是否是命题。

（1）2013 年是闰年。

（2）2×2=5。

（3）小明晚上去看电影。

（4）这朵花真漂亮啊！

（5）请不要在此处吸烟！

（6）你下午会出去吗？

（7）2 既是素数又是偶数。

（8）本句话是错的。

以上句子中（1）、（2）、（3）和（7）都是命题。注意：一个陈述句能否判断真假与现实能否判断真假是两件事。（4）、（5）是感叹句，（6）是疑问句，不是命题。对于（8），如果本句话确实是错的，那么“本句话是错的”便是真；另一方面，如果“本句话是错的”是真，那么本句话便是假。从以上分析我们只能得出这样的结论：本句话既不是对的又不是错的，这显然是矛盾的，也就是说对于该陈述句无法指定它的真值。这样的陈述句称为悖论，不是命题。

在上面的命题中，（1）、（2）、（3）都不能再被分割成为更小的命题，它们是基本的、原始的，这样的命题被称为原子命题。而命题（7）则不是最基本的，它还可以被分解为更小的命题：可由“2 是素数”和“2 是偶数”这两个命题由“与”联结词组合而成。像这种由更小的命题组合而成的命题称为复合命题。

1.1.2 联结词

联结词是逻辑联结词或者命题联结词的简称，它是自然语言中连词的逻辑抽象。有了联结词，就可以通过它和原子命题构成复合命题。常用的逻辑联结词主要包括以下 6 种。

（1）联结词“非”，记为“$\neg P$”，表示“否定”的意思。

（2）联结词“合取”，记为“$\wedge$”，表示“且”的意思。

（3）联结词“析取”，记为“$\vee$”，表示“或”的意思。

（4）联结词“蕴涵”，记为“$\rightarrow$”，表示“如果…，则…”的意思。

（5）联结词“等价”，记为“$\leftrightarrow$”，表示“当且仅当”的意思。

（6）联结词“异或”，记为“∇”，表示“要么…，要么…”的意思。

下面给出这 6 种联结词的详细定义。

（1）逻辑联结词否定——“$\neg$”

设 P 是一个命题，则联结词$\neg$和命题 P 构成$\neg P$，$\neg P$ 为命题 P 的否定式复合命题，读作“非 P”。联结词$\neg$是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象。

其真值是这样定义的，若 P 的真值是 T，那么$\neg P$ 的真值是 F；若 P 的真值是 F，则$\neg P$ 的真值是 T。命题 P 与其否定$\neg P$ 的如表 1.1 所示。

表 1.1 逻辑联结词“$\neg$”的定义

P	$\neg P$
F	T
T	F

或

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.2 给出下列命题的否定。

（1）令 P 表示：大连是北方香港。

于是$\neg P$表示：大连不是北方香港。

注意：逻辑联结词否定是个一元运算符。

（2）令Q表示：所有的素数都是奇数。

于是$\neg Q$表示：并非所有的素数都是奇数。

注意：翻译成“所有的素数都不是奇数”是错误的。因为否定是对整个命题进行的。

（2）逻辑联结词合取——“∧”

设P是一个命题，Q是一个命题，由联结词∧把P和Q连接成$P \wedge Q$，称$P \wedge Q$为P和Q的合取式复合命题，$P \wedge Q$读作“P与Q”或者“P合取Q”。联结词∧是“并且”的逻辑抽象。

它的真值是这样定义的：当且仅当P和Q的真值都为T时，$P \wedge Q$的真值才为T，否则$P \wedge Q$的真值为F。逻辑联结词“∧”的定义如表1.2所示。

表 1.2　　逻辑联结词“∧”的定义

P	Q	$P \wedge Q$		P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.3　令P表示：外面正在下雪。

令Q表示：3小于5。

于是$P \wedge Q$表示 ：外面正在下雪并且3小于5。

从自然语言看，上述命题是不合理的、没有意义的，因为P和Q毫不相关。但是，在数理逻辑中是被允许的，也是正确的。P和Q再合取$P \wedge Q$仍可成为一个新的命题。只要P和Q的真值给定，$P \wedge Q$的真值即可确定。

逻辑联结词“∧”是个二元运算符，且具有对称性，即$P \wedge Q$和$Q \wedge P$具有相同真值。

（3）逻辑联结词析取——“∨”

设P是一个命题，Q是一个命题，由联结词∨把P、Q连接成$P \vee Q$，称$P \vee Q$为P、Q的析取式复合命题，读作“P或Q”，或“P析取Q”。

其真值是这样的定义的：当且仅当P和Q的真值均为F时，$P \vee Q$的真值为F，其余情况均为T。逻辑联结词“∨”的定义如表1.3所示。

表 1.3　　逻辑联结词“∨”的定义

P	Q	$P \vee Q$		P	Q	$P \vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

联结词∨是自然语言中“或”“或者”的逻辑抽象，而在自然语言中，“或”是多义的。从析取的定义不难看出，逻辑联结词“∨”和自然汉语中的“或”的意义并不完全相同。因为汉语中的“或”可表示“排斥或”，亦可表示“可兼或”，而逻辑联结词“析取”指的仅仅是“可兼或”，并不表示其他意义的“或”。

例 1.4　令P表示：小明现在正在睡觉。

令 Q 表示：小明现在正在打球。

于是命题，小明现在正在睡觉或者正在打球不能用 $P \vee Q$ 来表示。因为这里自然语言陈述的或是排斥或，这种意义的或我们用另一个逻辑联结词“异或”“∇”来表示，后面我们将给出它的定义。

例 1.5 将句子“他昨晚做了 20 或者 30 道作业题”表示为复合命题。

在此例中，该句子不能被表示成复合命题，因为这里的“或”表示的是近似或者猜测的意思。

例 1.6 令 P 表示：张亮是跳高运动员。

令 Q 表示：张亮是跳远运动员。

于是命题，张亮可能是跳高或跳远运动员就可以用 $P \vee Q$ 来表示，因为这里的或是可兼或。

逻辑联结词析取也是个二元运算符。

（4）逻辑联结词单条件——“→”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，由联结词→把 P、Q 连接成 $P \to Q$，称 $P \to Q$ 为 P、Q 的条件式复合命题，把 P 和 Q 分别称为 $P \to Q$ 的前件和后件，或者前提和结论。$P \to Q$ 读作“如果 P 则 Q”或“如果 P 那么 Q”。其中 P 被称为前件，Q 被称为为后件。很多时候联结词→也被称为蕴涵。

$P \to Q$ 的真值是这样定义的，当且仅当 $P \to Q$ 的前件 P 的真值为 T，后件 Q 的真值为 F 时，$P \to Q$ 的真值为 F，否则，$P \to Q$ 的真值为 T。单条件逻辑联结词“→”的定义如表 1.4 所示。

表 1.4　　逻辑联结词“→”的定义

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.7

（1）令 P 表示：天不下雨

令 Q 表示：植物枯萎

于是 $P \to Q$ 表示：如果天不下雨，则植物枯萎。

（2）令 R 表示：我有时间。

令 S 表示：我一定去学画画。

于是，$R \to S$ 表示：如果我有时间，那我一定去学画画。

（3）令 U 表示：大海的颜色是蓝色的。

令 V 表示：雪的颜色是白色的。

于是，$U \to V$ 表示：如果大海的颜色是蓝色的，那么雪的颜色是白色的。

此例中（1）和（2）是有因果关系的，而（3）在自然科学中是毫无道理。在自然语言中，条件式的前提和结论之间必含有某种因果关系，但是在命题演算中，一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到它的后件，它给出的是一种实质性的因果关系，而不单单是形式上的因果关系。也就是说只要前件 P 和后件 Q 的真值确定下来，命题 $P \to Q$ 的真值就可以确定。

逻辑联结词单条件是个二元运算符。

（5）逻辑联结词双条件——“↔”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是联结词↔把 P、Q 连接成 $P \leftrightarrow Q$，称 $P \leftrightarrow Q$ 为 P 和 Q 的双条件式复合命题，读作“P 当且仅当 Q”或“P 等值于 Q”。

$P \leftrightarrow Q$ 的真值是这样定义的，当且仅当 P 和 Q 有相同的真值时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F。$P \leftrightarrow Q$ 的运算表如表 1.5 所示。

表 1.5　　逻辑联结词“↔”的定义

P	Q	$P \leftrightarrow Q$		P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.8　使用联结词翻译以下命题。

（1）三角形是等边的，当且仅当它的 3 个内角相等。

（2）电灯不亮，当且仅当灯泡发生故障或开关发生故障。

（3）$2+2=4$，当且仅当今天天晴。

解：令 P：三角形是等边的。

　　Q：三角形 3 个内角相等。

于是（1）可表示为：$P \leftrightarrow Q$

令 R：电灯不亮。

　S：灯泡发生故障。

　T：开关发生故障。

于是（2）可表示成：$R \leftrightarrow (S \vee T)$。

令 A：$2+2=4$。

　B：今天天晴。

于是（3）可表示为：$A \leftrightarrow B$

注意：从上面的例子中可以看出，等值式也和前面的逻辑联结词∧、∨、→一样可以毫无因果关系，而其真值仅仅从等值的定义而确定。

双条件逻辑联结词也是个二元运算符。

（6）逻辑联结词异或——“∇”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是“P 异或 Q”是一个新的命题，记作“$P \nabla Q$”，读作“P 异或 Q”。其真值是这样定义的，当且仅当 P 和 Q 有不同的真值时，$P \nabla Q$ 的真值为 T，否则 $P \nabla Q$ 的真值为 F。

$P \nabla Q$ 的运算表如表 1.6 所示。

例 1.9　令 P 表示：大连电视台三套节目今晚八点播放电视剧。

　　　　令 Q 表示：大连电视台三套节目今晚八点播放女排比赛。

于是 $P \nabla Q$ 表示大连电视台三套节目今晚八时播放电视剧或播放女排比赛。

表 1.6　　逻辑联结词“∇”的定义

P	Q	$P \nabla Q$		P	Q	$P \nabla Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	F		1	1	0

从逻辑联结词“∇”的定义和逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义不难得出，它们之间有如下的关系。

$P\nabla Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$。也就是说逻辑联结词异或可以用双条件逻辑联结词的否定来代替。

以上我们介绍了五个基本的逻辑联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ ，它们运算的优先级为：$\neg$ 优先级最高，其次是$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。如果有括号，则括号优先，在括号里从左往右依然遵守这个顺序。

1.2 合式公式与真值表

1.2.1 合式公式

在上一节中我们曾指出，不可再分的命题称为原子命题。换句话说，不包含任何逻辑联结词的命题称为原子命题。应该指出的是，这里所说的原子命题，是指其中的原子是有了确定的真值的；否则，原子没有确定的真值指派其原子的取值而是在{T,F}这个域上的，则称此原子为命题变元。由命题变元，逻辑联结词及圆括号可以构成合式的公式。下面给出命题演算中合式公式的递归定义。

定义 1.2 合式公式。

（1）真值 T 和 F 是合式公式。

（2）原子命题公式是一个合式公式。

（3）如果 A 是合式的公式，那么$\neg A$ 是合式的公式。

（4）如果 A 和 B 均是合式的公式，那么$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$都是合式的公式。

（5）当且仅当有限次地应用（1）至（4）条规则由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式的公式。

以上定义方法称为递归定义法。其中（1）称为递归定义的基础，（2）、（3）和（4）称为递归定义的归纳，（5）称为递归定义的界限。

今后我们还会经常使用这种递归定义的方法。

按照上面的定义，下面的字符串都是合式的公式。

（1）$\neg(P\wedge Q)$

（2）$\neg(P\rightarrow Q)$

（3）$(P\rightarrow(P\wedge\neg Q))$

（4）$(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(S\leftrightarrow T))$

下面的字符串则不是合式的公式。

（1）$(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$

（2）$(P\rightarrow Q$

（3）$(P\wedge Q)\rightarrow Q)$

今后，我们把合式的公式简称为命题公式。一般一个命题公式的真值是不确定的，只有用确定的命题去取代命题公式中的命题变元，或对其中的命题变元进行真值指派时，命题公式才成为具有确定真值的命题。

给定两个命题公式，若对其中变元的所有可能的真值指派两个命题公式具有相同的真值，则称它们是相互等价的。可以利用真值表技术来判定两个命题公式的等价性。

1.2.2 真值表

定义 1.3 设 A 为一命题公式，对其中出现的命题变元做所有可能的每一组真值指派 S，连同

公式A相应$S(A)$的取值汇列成表，称为A的真值表。一个真值表由两部分构成。

（1）表的左半部分列出公式的每一种解释。

（2）表的右半部分给出相应每种解释公式得到的真值。

为构造的真值表方便和一致，有如下约定。

（1）命题变元按字典序排列。

（2）对公式的每种解释，以二进制数从小到大或者从大到小顺序排列。

（3）若公式复杂，可先列出各子公式的真值（若有括号从里层向外展开），最后列出所给公式的真值。

例 1.10

（1）给出命题公式$\neg((P\vee Q)\wedge P)$的真值表。

（2）使用真值表技术证明命题公式$P\leftrightarrow Q$与$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$是相互等价的。

解：构造（1）的真值表如下。

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

对于（2）构造真值表如下。

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

从真值表可以清楚地看出，命题公式$P\leftrightarrow Q$与$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$对于变元$P$和$Q$的各种真值指派，他们的真值表完全一致。所以它们是相互等价的。

1.3 永真式和等价式

1.3.1 永真式

通过对命题公式真值表的讨论，可以清楚地看出对于命题公式$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)(n\geq 1)$，命题变元的真值有$2^n$种不同的组合。每一种组合叫做一种真值指派，以就是说，命题公式含有n个变元时有2^n种真值指派。而对应于每一组真值指派，命题公式将有一个确定的值，从而使命题公式成为具有确定真值的命题。

例 1.11 对命题公式$P\vee\neg P,P\wedge\neg P,P\rightarrow Q$做出真值表。

解：3个命题公式的真值表如下。

P	$P\vee\neg P$	$P\wedge\neg P$
0	1	0
1	1	0

续表

P	Q	$P\to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.11 中，命题公式 $P\vee\neg P$，和 $P\wedge\neg P$，虽然都仅含一个命题变元，都有两组真值指派，但是对应于每一组真值指派，命题公式 $P\vee\neg P$ 均取值为 T(即 1),而命题公式 $P\wedge\neg P$ 却取值为 F(即 0)。之所以有这样的结果是因为这些命题公式的真值与其变元的真值指派无关，而根本问题在于它们的自身结构。命题公式 $P\to Q$ 含有两个命题变元，有四组真值指派。对于第 1，第 2 和第 4 这 3 组真值指派，公式取值为 1（即 T）；而对于第 3 组真值指派，公式却取值为 0（即 F）。

通过上面对有关公式真值表的讨论，我们总结出如下的定义。

定义 1.4　永真式、永假式与可满足式。

（1）不依赖于命题变元的真值指派，而总是取值为 T（即 1）的命题公式，称为永真式或称作重言式。

（2）不依赖于命题变元的真值指派，而总是取值为 F（即 0）的命题公式，称为永假式或矛盾式。

（3）至少存在一组真值指派使命题公式取值为 T 的命题公式，称为可满足的。

1.3.2　等价式

在有限步内判定一个命题公式是永真式，永假式或是可满足式的问题被称为命题公式的判定问题。我们的着眼点放在对重言式的研究上，因为它最有用，重言式有以下特点。

（1）重言式的否定是一个矛盾式，一个矛盾式的否定是重言式，所以只研究其中之一就可以了。

（2）重言式的析取，合取，单条件，双条件都是重言式。于是可由简单的重言式推出复杂的重言式。

（3）由重言式可以产生许多有用的恒等式。

设　$A{:}A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

　　$B{:}B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

是两个命题公式，这里 P_i（i=1，2，…，n）不一定在两个公式中同时出现。

由此我们也可以归纳出等价式的定义。

定义 1.5　设 A 和 B 是两个命题公式，如果 A、B 在其任意解释下，其真值都是相同的，即 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 和 B 是等价的，或逻辑相等，记作 $A\Leftrightarrow B$，读作 A 恒等于 B，或 A 等价于 B。

注意符号“$\Leftrightarrow$”与符号“$\leftrightarrow$”的意义是有区别的。符号“$\leftrightarrow$”是逻辑联结词，是个运算符；而符号“$\Leftrightarrow$”是关系符，$A\Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 有逻辑等价关系。

常用的逻辑恒等式如表 1.7 所示。

表中符号 P、Q、R 代表任意命题，符号 T 代表真命题，符号 F 代表假命题。表中所有公式是进行等价变换和逻辑推理的重要依据。表中所有公式均可使用真值表技术得到证明，读者可作为练习。

表 1.7　　常用逻辑恒等式

E_1	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$	交换律
E_2	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$	
E_3	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow Q\leftrightarrow P$	
E_4	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	结合律
E_5	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	
E_6	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R\Leftrightarrow P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$	
E_7	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	分配律
E_8	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	
E_9	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$	
E_{10}	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$	双重否定律
E_{11}	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$	德·摩根律
E_{12}	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$	
E_{13}	$\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\nabla Q$	
E_{14}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$	逆反律
E_{15}	$\neg P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$	
E_{16}	$P\wedge P\Leftrightarrow P$	等幂律
E_{17}	$P\vee P\Leftrightarrow P$	
E_{18}	$P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$	
E_{19}	$P\vee\neg P\Leftrightarrow T$	
E_{20}	$P\wedge T\Leftrightarrow P$	
E_{21}	$P\wedge F\Leftrightarrow F$	
E_{22}	$P\vee T\Leftrightarrow T$	
E_{23}	$P\vee F\Leftrightarrow P$	
E_{24}	$P\leftrightarrow T\Leftrightarrow P$	
E_{25}	$P\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg P$	
E_{26}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$	
E_{27}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$	
E_{28}	$(P\wedge Q)\rightarrow R\Leftrightarrow(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$	输出律
E_{29}	$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$	吸收律
E_{30}	$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$	

1.3.3　代入规则和替换规则

（1）代入规则

在一个重言式中，某个命题变元出现的每一处均代以同一个公式后，所得到的新的公式仍是重言式，这条规则称之为代入规则。

这条规则之所以正确，是因为永真式对任何解释，其值都是真，与所给的某个变元指派的真值是真还是假无关，因此，用一个命题公式代入到原子命题变元 R 出现的每一处后，所得命题公式的真值还是真。例如：

$P\wedge\neg P\leftrightarrow F$ 令以 $R\wedge Q$ 代 P 得，

（$R\wedge Q$）$\wedge\neg(R\wedge Q)\leftrightarrow F$ 仍是重言式。

（2）替换规则

设有恒等式 $A\Leftrightarrow B$ 若在公式 C 中出现 A 的地方替换以 B（不一定是每一处都进行）而得到公式 D,则 $C\Leftrightarrow D$，这条规则称之为替换规则。

如果 A 是公式 C 中完整的部分，且 A 是合式的公式，则称 A 是 C 的子公式。规则中"公式 C 中出现 A"意即"A 是 C 的子公式"。

这条规则之所以正确，是因为在公式 C 和 D 中替换部分以外均相同，所以 C 和 D 的真值也相同，故 $C\Leftrightarrow D$。

应用代入规则和替换规则及已有的重言式可以证明新的重言式。

例如对公式 E_{12}：$\neg$（$P\wedge Q$）$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，我们以 $A\wedge B$ 代 E_{12} 中的 P，而以$\neg A\wedge\neg B$ 代 E_{12} 中的 Q 就得出公式$\neg((A\wedge B)\wedge(\neg A\wedge\neg B))\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)\vee\neg(\neg A\wedge\neg B)$

对公式 E_{20}：$P\wedge T\Leftrightarrow P$，我们利用公式 $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$，对其中的 T 作替换（对命题常元不能做代换）得公式 $P\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow P$

…

因此，我们可以说表 1.7 和表 1.9 中的字符 P、Q 和 R 不仅代表命题变元，而且可以代表命题公式；T 和 F 不仅代表真命题和假命题，而且可以代表重言式和永假式。用这样的观点看待表中的公式，应用就显得更方便。

例 1.12

（1）试证 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow Q\to(P\to R)\Leftrightarrow\neg R\to(Q\to\neg P)$

证：$P\to(Q\to R)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)$　　两次替换

$\Leftrightarrow\neg Q\vee(\neg P\vee R)$　　结合、交换、结合

$\Leftrightarrow Q\to(P\to R)$　　两次替换

类似可证 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow\neg R\to(Q\to\neg P)$。

（2）试证（$P\to Q$）$\to(Q\vee R)\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$

证：$(P\to Q)\to(Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\vee R)$　　E_{27} 和替换规则

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\vee R)$　　E_{12} 和替换规则

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee Q)\vee R$　　E_4

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(Q\vee\neg Q))\vee R$

$\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$　　例 1.12 的（1）和替换规则

（3）试将语句"情况并非如此，如果他不来，那么我也不去"化简。

解：设 P 表示：他来。Q 表示：我去。于是上述语句可符号化为：

$\neg(\neg P\to\neg Q)$ 对此式化简得

$\neg(\neg P\to\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg\neg P\vee\neg Q)$ E_{27} 和替换规则

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$

化简后的语句是"我去了，而他没来"。

从定理及例题可以看到，代入和替换有两点区别：

（1）代入是对原子命题变元而言，替换通常是可对命题公式实行；

（2）代入必须是处处代入，替换则可部分替换或全部替换。