21世纪独立本科院校规划教材

大学数学教程

微积分（下册）

南京大学金陵学院　陈　仲　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

大学数学教程

微积分(下册)

陈　仲　编著

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校"独立学院"本科理工类专业"大学数学"课程的教材. 全书有三册:《微积分(上册)》,包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章;《微积分(下册)》,包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数等四章;《微分方程与线性代数》,包含常微分方程、行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值问题与二次型、线性空间与线性变换等五章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的高等工科院校"高等数学课程教学基本要求",并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围. 编写的立足点是基础与应用并重,注重数学的思想和方法,注重几何背景和实际意义,部分内容有更新与优化,并适当地渗透现代数学思想,适合独立学院培养高素质应用型人才的目标.

本书结构严谨,难易适度,语言简洁,可作为独立学院、二级学院"大学数学"课程的教材,也可作为科技工作者自学"大学数学"的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册) / 陈仲编著. —南京:东南大学出版社,2013.6

ISBN 978-7-5641-4272-8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 107105 号

微积分(下册)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话:025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	14
字　　数	274 千字
版　　次	2013 年 6 月第 1 版
印　　次	2013 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-4272-8
定　　价	28.00 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

前　言

在高等教育办学体制深化改革的大好形势下，高等教育的新模式“独立学院”应运而生. 一流大学搞科研，培养研究型人才；高职高专学技术，培养技能型人才. 依托一流名校的独立学院的培养目标是培养高素质的具有创新精神的应用型人才. 高素质的应用型人才，是既要动手又能动脑，既能实践又能设计，既会应用又懂原理的高素质的、深受社会和大企业欢迎的人才. 认清这个培养目标，对我们编写独立学院理工类“大学数学”课程的教材具有指导意义.

可以说，数学是科学的“语言”，是学习一切自然科学的“钥匙”，数学素养已成为衡量一个国家科技水平的重要标志. 独立学院理工类“大学数学”课程，是培养应用型人才的重要的必修课，它不同于综合性大学理工类的“大学数学”，也不同于一般高职高专院校理工类的“大学数学”. 我们编写“大学数学教程”的立足点是基础与应用并重，以提高数学素养为总目标.

编者在南京大学从事理一类“大学数学”课程教学与教材建设 20 多年；2004 年至今在南京大学金陵学院（独立学院）讲授理一类“大学数学”课程，同时进行该课程的教材建设.

在基础与应用并重的思想指导下，我们对原有“大学数学”课程的教学内容进行全面筛选和优化，带着问题开展教学研究，编写教材与教学实践密切结合，在实践中编写，编写后再请教学团队实践，广泛征求意见，多次修改，期待完善. 在编写过程中，努力做到：

(1) 在深度和广度上符合国家教育部审定的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”，并参照国家教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围. 在独立学院中，有大约 20% 的优等生，他们因为高考失手，没有考上理想的高校，进入独立学院后，他们发奋努力，力志考研. 我们编写教材时在深度上不可能为他们考虑太多，但在广度上我们应尽可能达到考研的知识范围.

(2) 注重数学的思想和方法，适当地渗透现代数学思想，运用部分近代数学的术语与符号，以求符合独立学院培养高素质应用型人才的目标. 我们的教学对象是独立学院中对“大学数学”要求相对较高的理工科专业，其教学任务除使学生获得“大学数学”的基本概念、基本理论和基本方法外，还要使学生受到一定的科学训

练，学到数学思想方法，提高逻辑推理能力，为学生学习后继课程提供必要的数学基础，为学生大学毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力．本书将极限作为微积分学的理论基础，注重极限概念和将它作为微积分基本方法的应用．又如，本书将定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等所有积分的定义规范化，统一使用“分割取近似，求和取极限”的语言叙述，让学生充分认识数学逼近的思想，了解各种类型积分的内在联系．

(3) 通过教学研究，将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化，既改革了教学内容，又丰富了微积分学的内涵．例如定积分中值定理的结论，大部分教材都写为“$\exists\xi\in[a,b]$，使得……”．这个结论是不完美的，本书将其结论改进为“$\exists\xi\in(a,b)$，使得……”，这一改进加深了学生对连续函数的保号性和介值定理的理解，同时使得许多有关中值定理的应用题的证明大为简化．又如反常积分的计算，我们依据著名的“牛顿-莱布尼茨公式”，提出“广义牛顿-莱布尼茨公式”、“广义分部积分公式”等计算方法，并对定积分与反常积分这两种含义完全不同的积分作深入研究，指出它们之间还可以相互转化．再如著名的“泰勒公式”，一般教材都采用逐次应用柯西中值定理去证明，本书采用构造辅助函数的方法，应用罗尔定理证明，技术含量大为增加，有助于对学生数学思维的训练．又如二元函数极值的充分判别法，所有教材只讲授利用二阶偏导数判别的法则，本书很有特色地增加了利用一阶偏导数判别的法则，使得一些用原有法则不能判别的问题得到了解决．

(4) 对于基本概念和重要定理注重几何背景和实际意义的介绍；对重要的、比较难理解的命题尽量给出几何解释；选编和设计了一些具有启发性和应用性的例题和习题，让学生对“大学数学”的内容能有较好的理解，提高综合应用所学知识分析问题和解决问题的能力．例如，在函数极限的 ε-δ 定义中，本书除介绍一般教材使用的放缩法外，重点介绍了运用几何图形寻求 δ 的方法，比较简单和直观，让学生从几何上理解函数极限的定义．又如用几何方法定义凹凸性，并对凹凸性深入讨论，证明传统定义与几何定义的等价性，证明凹凸性的几种几何特性．

我们的目标是结构严谨、难易适度、语言简洁、适合培养目标、贴近教学实际、便于教与学．

本书分三册，即《微积分(上册)》、《微积分(下册)》和《微分方程与线性代数》．《微积分(上册)》包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章；《微积分(下册)》包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数等四章；《微分方程与线性代数》包含常微分方程、行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值问题与二次型、线性空间与线性变换等五章．对“大学数学”要求较高的系科、专业，如通信、电子科学、机械电子、计算机、软件、网络等，本书可分三个学期讲授(参照全国考研大纲中数学一的知识范围)，第一学期每周 6 学时，共 84 学时，讲授《微积分(上册)》；第二学期每周 6 学时，共 90

学时，讲授《微积分(下册)》；第三学期每周 4 学时，共 64 学时，讲授《微分方程与线性代数》. 对"大学数学"要求次高，学时安排不多的系科、专业，如信息管理、城资、国土、旅游、土木、地质、地信、城规、化学、环科、生物、医学等，本书可分两个学期讲授(参照全国考研大纲中数学二的知识范围)，第一学期每周 6 学时，共 84 学时，讲授《微积分(上册)》；第二学期每周 6 学时，共 90 学时，讲授《微积分(下册)》和《微分方程与线性代数》的部分内容.

注意到学生的实际水平，本书在预备知识中增加了排列与组合、数学归纳法、不等式、极坐标系和函数的初等性质等知识的介绍. 书中四周加框的内容是重要公式、重要方法、重要定义，是要求学生熟记的主要知识点(由于加框条件的限制，这不是要求学生熟记的全部知识点). 书中用 * 标出的段落为较难内容，供任课教师选用，一般留给有兴趣的学生课外阅读或查阅. 书中习题分 A，B 两组，A 组为基本要求，B 组为较高要求(供优秀学生和准备考研的学生选用)，书末有习题答案与提示.

感谢南京大学金陵学院将本课程建设项目立项进行"我国高校应用型人才培养模式研究". 感谢南京大学金陵学院院长王殿祥，老院长姚天扬，副院长邵进，教务处处长王均义，信工院院长李元，城资院院长彭补拙，化生院院长方惠群，基础教学部主任钱钟，督导组秘书方一亭等诸位教授对编者的关心和支持. 感谢姜东平、曹祥炎、顾其钧、黄卫华、孔敏、周国飞、邓建平、张玉莲、林小围、王夕予、王培等教授和老师使用本书第一稿在金陵学院面向数千学生讲授"大学数学"课程，并给编者提供了许多宝贵的修改建议. 感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编审，使本书质量大有提高，并顺利出版.

书中不足与错误难免，敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2013 年 2 月于南京大学

目　　录

5 多元函数微分学

在本书的前三章中，我们研究的函数是依赖于一个变元（自变量）的一元函数，而在现实世界中，常常要研究某个变量依赖于两个或两个以上的变元，表现为某客观对象的变化规律受两个或两个以上的因素的制约. 为了定量地刻画某客观对象的变化规律，需要作多元分析，而多元函数微分学是进行多元分析的基础.

5.1 多元函数的极限与连续性

5.1.1 预备知识

1) 点集

下面介绍二维 $\mathbf{R}^2$ 空间中点集基本概念，这些概念也适用于 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 3)$.

定义 5.1.1(邻域) 设 $P_0 \in \mathbf{R}^2$，$\delta > 0$.

(1) $U_\delta(P_0) \xlongequal{\text{def}} \{P \mid P \in \mathbf{R}^2, \mid P_0P \mid < \delta\}$，称 $U_\delta(P_0)$ 为**点 P_0 的 δ 邻域**，并称点 P_0 为**邻域的中心**，称 δ 为**邻域的半径**.

(2) $\mathring{U}_\delta(P_0) \xlongequal{\text{def}} \{P \mid P \in \mathbf{R}^2, 0 < \mid P_0P \mid < \delta\}$，称 $\mathring{U}_\delta(P_0)$ 为**点 P_0 的去心 δ 邻域.**

定义 5.1.2(内点、边界点、开域、闭域) 设 $D \subseteq \mathbf{R}^2$.

(1) 若 $P_0 \in D$，且 $\exists \delta > 0$，使得 $U_\delta(P_0) \subset D$，则称 P_0 是 D 的**内点.**

(2) 若 $P_1 \in \mathbf{R}^2$，且 $\forall \delta > 0$，使得 $U_\delta(P_1)$ 中既有点属于 D，又有点不属于 D，则称 P_1 是 D 的**边界点.** D 的边界点的集合称为 D 的**边界**，记为 ∂D.

(3) $\forall P \in D$，P 总是 D 的内点，又 $\forall P, Q \in D$，总存在连接 P, Q 的曲线 $\overset{\frown}{PQ}$，使得 $\overset{\frown}{PQ} \subset D$，则称 D 是**开域.**

(4) 若存在开域 D_1，使得 $D = D_1 \cup \partial D_1$，则称 D 是**闭域.** 开域与闭域统称为**区域.**

例如，下列点集

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \left| \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1\right.\right\}$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$\vdots$$

都是开域(见图 5.1).

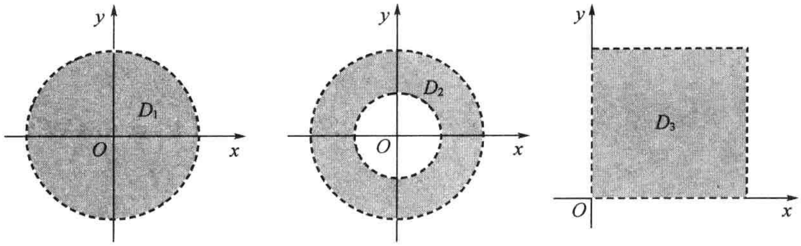

图 5.1

下列点集

$$D_4 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
$$D_5 = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{4} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$
$$D_6 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$
$$\vdots$$

都是闭域(见图 5.2).

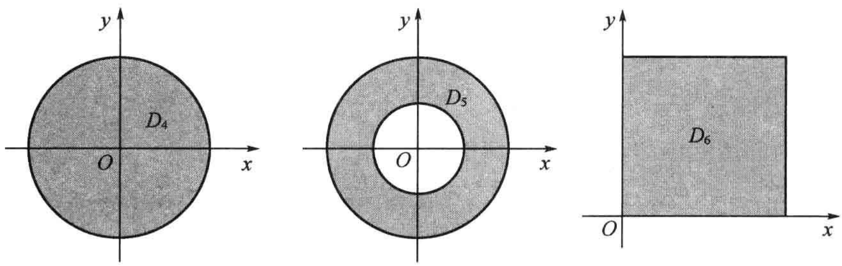

图 5.2

上面列举的区域有一共同特征,即它们总能包含在某个足够大的圆

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < K, K \in \mathbf{R}^+\}$$

中,所以又称为**有界区域**.此外还有**无界区域**的概念,例如

$$D_7 = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$
$$D_8 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < +\infty\}$$
$$\vdots$$

都是无界区域.

定义 5.1.3(直径) 设 $D \subset \mathbf{R}^2$,且 D 为有界区域(或点集),称

$$d(D) \xlongequal{\text{def}} \max\left\{ |P_1P_2| \,\middle|\, P_1, P_2 \in D \cup \partial D \right\}$$

为区域 D(或点集)的直径.

例如上述区域 D_1,D_2,D_4,D_5 的直径都是 2,区域 D_3,D_6 的直径都是$\sqrt{2}$;又如闭区间$[0,1]$与开区间$(0,1)$的直径都是 1.

2) 多元函数基本概念

在第1章中,我们称特殊的映射 $f:A\to\mathbf{R}(A\subseteq\mathbf{R})$ 为一元函数. 与此类似的,我们来引进多元函数概念.

定义 5.1.4(多元函数) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$,我们称映射

$$f:D\to\mathbf{R}$$

为定义在 D 上的 **n 元函数**. n 元函数常常记为

$$z=f(P)\quad(P\in D)$$

或

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D)$$

称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为**自变量**,称 z 为**因变量**,称 D 为 f 的**定义域**.

对于 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$,对应的函数值记为

$$z_0=f(P_0)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$$

$\forall P\in D$,全体函数值的集合

$$f(D)\xlongequal{\text{def}}\{f(P)\mid P\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

二元函数和 n 元函数($n\geqslant 3$)统称为**多元函数**.

在记号上,常常将二元函数 $f:D\to\mathbf{R}(D\subseteq\mathbf{R}^2)$ 记为

$$z=f(x,y)\quad((x,y)\in D)$$

将三元函数 $f:D\to\mathbf{R}(D\subseteq\mathbf{R}^3)$ 记为

$$u=f(x,y,z)\quad((x,y,z)\in D)$$

多元函数常常用解析表达式给出,并不明确标明定义域,此时**定义域**可理解为使这个解析表达式中因变量有确定的实数值而自变量所容许变化的范围.

例 1 二元函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为开域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

其值域为

$$f(D)=\{z \mid 1\leqslant z<+\infty\}$$

例 2 三元函数 $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$ 的定义域为开域

$$D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<1\}$$

其值域为

$$f(D)=\{u \mid -\infty<u\leqslant 0\}$$

例 3 二元分段函数

$$z=\begin{cases}1, & x^2+y^2\leqslant 1;\\ \sqrt{x^2+y^2}, & 1<x^2+y^2\leqslant 2\end{cases}$$

的定义域为闭域

$$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 2\}$$

其值域为

$$f(D)=\{z \mid 1\leqslant z\leqslant\sqrt{2}\}$$

多元函数是多元微积分研究的主要对象. 在这一章中我们重点研究二元函数，但研究的方法和结论原则上适用于其他多元函数. 值得注意的是，一元函数的许多研究方法和性质在二元函数中得到了继承，但是又有若干结论与二元函数有着本质的区别(如可微性等)，在学习多元函数的过程中要注意比较与对照.

在第 4.5 节中，我们曾介绍了各种二次曲面. 例如旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，这个空间曲面的方程是一个二元函数. 一般说来，二元函数

$$f:D\rightarrow\mathbf{R}\quad(D\subseteq\mathbf{R}^2)\tag{1}$$

的图形是一空间曲面. 当 (x_0,y_0) 在其定义域上取定后，由二元函数(1)式可确定 $z_0=f(x_0,y_0)$，从而得到空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 当 (x,y) 取遍定义域 D 时，点 $P(x,y,z)$ 的集合构成一空间曲面 Σ，这一空间曲面 Σ 就是二元函数(1)式的图形(见图 5.3).

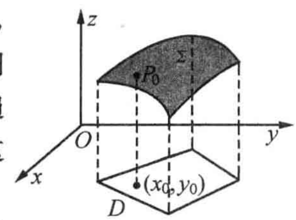

图 5.3

与一元复合函数与一元初等函数概念相对应，这里也有**多元复合函数**与**多元初等函数**的概念. 例如，$z=f(u,v)$，其中 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$；$z=f(u)$，其中 $u=\varphi(x,y)$ 等等是多元复合函数. 又如

$$z=x^2y+\frac{\sin(x+y)}{1+\sqrt{xy}},\quad u=\ln(1+xyz)+\frac{\tan(x+z)}{e^{xyz}},\quad\cdots$$

是多元初等函数.

与一元函数可用隐函数表示一样,多元函数也可用隐函数表示. 例如球面方程

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{2}$$

可确定两个二元函数

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \qquad z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2} \tag{3}$$

它们的图形分别是上半球面与下半球面. 值得注意的是,与一元隐函数一样,由隐函数方程确定的多元隐函数常常不能写成显函数形式. 例如,由方程式

$$\mathrm{e}^{x+z}+z=\sin(y+z)$$

能确定 $z=z(x,y)$(参见第 5.4 节),但不能解出用初等函数表示的显函数形式.

最后介绍二元与三元向量函数概念.

定义 5.1.5(向量函数) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,$\Omega\in\mathbf{R}^3$.

(1) 设 $\varphi(u,v)$,$\psi(u,v)$,$\omega(u,v)$ 皆在 D 上有定义,称

$$\boldsymbol{r}(u,v)\xlongequal{\text{def}}(\varphi(u,v),\psi(u,v),\omega(u,v))$$

为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的**二元向量函数.**

(2) 设 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 皆在 Ω 上有定义,称

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)\xlongequal{\text{def}}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的**三元向量函数.**

3) 多元函数的初等性质

这里介绍多元函数的有界性与奇偶性概念,我们就二元函数叙述,对于三元及三元以上的多元函数可类似地定义.

定义 5.1.6(有界性) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,$f:D\to\mathbf{R}$. 若$\exists\, m,M\in\mathbf{R}$,使得 $\forall\,(x,y)\in D$,有

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M$$

则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上有界,记为 $f\in B(D)$,并称 m 与 M 分别为**函数 f 的下界和上界.**

定义 5.1.7(奇偶性) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,$f:D\to\mathbf{R}$.

(1) 若$(x,y)\in D$,有$(-x,y)\in D$,且

$$f(-x,y)=-f(x,y) \quad (f(-x,y)=f(x,y))$$

则称区域 D 关于 $x=0$ 对称,并称**函数 f 关于 x 为奇函数(关于 x 为偶函数);**

(2) 若$(x,y)\in D$,有$(x,-y)\in D$,且

$$f(x,-y)=-f(x,y)\quad (f(x,-y)=f(x,y))$$

则称**区域 D 关于 $y=0$ 对称**,并称**函数 f 关于 y 为奇函数(关于 y 为偶函数)**;

(3) 若$(x,y)\in D$,有$(-x,-y)\in D$,且

$$f(-x,-y)=-f(x,y)\quad (f(-x,-y)=f(x,y))$$

则称**区域 D 关于原点 $O(0,0)$** 中心对称,并称**函数 f 关于 x,y 为奇函数(关于 x,y 为偶函数)**.

例如二元函数 $f(x,y)=x\cos y$,关于 x 为奇函数,关于 y 为偶函数,关于 x,y 为奇函数.

5.1.2 多元函数的极限

多元函数的极限概念是刻画函数性态、变化趋势以及研究多元函数微积分的重要基础. 下面我们就二元函数进行叙述,其方法和结论完全适合三元及三元以上的多元函数. 二元函数比一元函数表面上看只多了一个自变量,但极限问题要复杂得多.

定义 5.1.8(二元函数的极限) 设$D\subseteq\mathbf{R}^2$,$f(x,y)$在D上有定义,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的内点或边界上一点. 若$\exists A\in\mathbf{R}$,使得

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 } P(x,y)\in\mathring{U}_\delta(P_0)\cap D \text{ 时,有 } |f(x,y)-A|<\varepsilon}$$

则称**函数 $f(x,y)$ 在 $P\to P_0$ 时有极限** A,记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\quad 或\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$$

二元函数极限的复杂性在于动点 P 趋向于点 P_0 的方式具有很大的自由度,它可以是直线方式,还可以是任意曲线方式,不像一元函数只有左、右极限两种方式. 正因为这些,二元函数求极限的问题要困难得多. 下面介绍几个常用的方法.

1) 运用"$\varepsilon-\delta$"定义证明

此方法与一元函数基本相同. $\forall\varepsilon>0$,利用放缩法找$\delta>0$.

例 4 试用"$\varepsilon-\delta$"定义证明:$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+2y)=7$.

证 设$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$,因

$$\begin{aligned}|3x+2y-7|&=|3(x-1)+2(y-2)|\\&\leqslant 3|x-1|+2|y-2|\leqslant 3\rho+2\rho=5\rho\end{aligned}$$

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$,当 $0<\rho<\delta$ 时,有 $|3x+2y-7|<\varepsilon$. □

2）运用极坐标变换求极限

令

$$x=x_0+\rho\cos\theta,\quad y=y_0+\rho\sin\theta$$

则

$$(x,y)\to(x_0,y_0)\Leftrightarrow\rho\to0$$

例 5 试求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0}\rho\sin\theta\cos\theta=0$$

注 这是因为无穷小量与有界变量的乘积值是无穷小量.

3）运用等价无穷小替换法则求极限

例 6 试求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin x^2y}{1-\cos(xy)}$.

解 因 $x\to0,y\to2$ 时,$x^2y\to0,xy\to0$,运用 $\square\to0$ 时 $\sin\square\sim\square,1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^2$,则

$$原式=\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{x^2y}{\frac{1}{2}(xy)^2}=\lim_{y\to2}\frac{2}{y}=1$$

4）运用一元函数的关于 e 的重要极限求二元函数的极限

例 7 试求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}(1-xy)^{\frac{y}{x}}$.

解 因 $\square\to0$ 时 $(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\to e$,所以

$$原式=\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}(1-xy)^{\frac{1}{-xy}(-y^2)}=e^{-4}$$

在讨论二元函数极限时,若能取到两个不同的方式,使动点 P 趋向于定点 P_0 时极限值不同,则可以断言:该函数在 $P\to P_0$ 时极限不存在.

例 8 试证 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$ 不存在.

证 当点 P 沿直线 $y=x$ 趋向于点 P_0 时,有