线性代数
学习辅导与习题全解

◎ 主编 高玉斌

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

线性代数
学习辅导与习题全解

Xianxing Daishu

Xuexi Fudao yu Xiti Quanjie

主　编　高玉斌

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是与高玉斌主编的《线性代数》相配套的学习辅导书，其章节顺序与教材一致。每章分别由内容提要、典型例题(A)、习题全解、典型例题(B)四部分组成，内容提要部分指出了每章所涉及的基本概念、基本结论、基本方法，习题全解部分给出了教材中全部习题的详细解答，典型例题(A)与(B)部分共精选了110道例题，全部例题均有分析、解答、点评，部分例题提供了多种解法。

本书相对于教材有一定的独立性，可为学习线性代数的工科和其他非数学类专业学生以及复习线性代数准备报考硕士研究生的人员提供解题指导，也可供讲授线性代数的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导与习题全解/高玉斌主编. --北京：高等教育出版社，2012.12
ISBN 978-7-04-036395-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①高… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第262209号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	李　茜	封面设计	张申申
版式设计	余　杨	责任校对	刘丽娴	责任印制	田　甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司印刷	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×960 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.25	版　　次	2012年12月第1版
字　　数	240千字	印　　次	2012年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	20.90元

物 料 号　36395-00

前　言

线性代数是理工科大学生一门重要的数学基础课程，其理论严密，概念繁多，内容抽象，给初学者带来一定的困难。为了给正在学习该课程的学生，或已经学过该课程但又想在线性代数方面有所提高的读者提供一些帮助，我们特编写本书。

本书以我们编写的《线性代数》(高等教育出版社出版)为基础，按照教材章节顺序编写，每一章分别由内容提要、典型例题(A)、习题全解、典型例题(B)四部分组成。内容提要部分指出了每章所涉及的基本概念、基本结论、基本方法，是读者需要熟练掌握的内容。典型例题(A)部分选择了一些较为典型的例题进行讲解，这些例题中有介绍基本概念和基本方法的计算题或证明题，也有读者在学习过程中容易出错或不易理解的问题，通过每道例题的分析、解答、点评，希望能让读者更好地理解该题所涉及的基本概念及基本结论，能更好地掌握一些常用的解题方法与技巧。习题全解部分给出了教材中全部习题的详细解答，解答过程力求详细，给读者以示范作用。典型例题(B)部分主要选择了一些比较综合、典型及概念性强的题目，既有适应考研的开阔思路题，也有较灵活的综合题，通过这些题目的练习，可使读者加深对线性代数的基本概念、基本结论、基本方法的理解，掌握各章节内容及知识点的相互联系，开拓解题思路，做到真正理解、掌握内容。

我们相信，只要认真练习这些题目，每一位读者都会从中受益，都会有所提高。

本书由高玉斌教授主编，参与编写的有邵燕灵教授、梅银珍副教授及朱志峰讲师。在编写过程中，得到了中北大学线性代数课程组的大力支持，部分例题取自历年的线性代数课程考试题，在此一并表示感谢。

由于编者能力所限，不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2012 年 6 月

目　　录

第一章　行　列　式

尽管行列式理论并不是线性代数的主体，但它无疑是处理各类线性代数问题不可缺少的工具. 本章的重点是有关行列式的性质及如何具体计算行列式.

学习本章时应注意以下几个方面：

1. 行列式性质是计算和研究行列式的依据，应熟悉行列式的有关性质.

2. 熟悉特殊类型行列式(上三角形、下三角形、对角、反对角、范德蒙德行列式)的结果.

3. 计算 n 阶行列式常用的方法有：化为特殊类型行列式，化零降阶，递推法等. 在具体计算时，应善于观察、分析行列式中元素的规律性，从而选择适当的方法.

4. 行列式的计算不是孤立的问题，应注意贯穿运用于其它章节.

内容提要

一、基本概念

1. 余子式与代数余子式

设有 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，划去行列式 D 的第 i 行与第 j 列后剩余的 $n-1$ 阶行列式记为 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. n 阶行列式的定义

一阶行列式定义为

$$|a_{11}|=a_{11}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

***3. k 阶子式与 k 阶子式的代数余子式**

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列($1\leqslant k<n$)，位于这些行和列的交叉点上的 k^2 个元素按照原来相应的位置组成的一个 k 阶行列式 N，称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来相应的位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M，称为 k 阶子式 N 的余子式. 若设 D 的 k 阶子式 N 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$ 为 N 的代数余子式.

二、基本结论

1. 几类特殊类型的行列式

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(4) 反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

（5）范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

2. 行列式的性质

（1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

（2）若行列式的某行(列)各元素有公因数 λ，则 λ 可提到行列式的记号之外与之相乘.

（3）若行列式的某行(列)元素全为零，则该行列式的值为零.

（4）若行列式的某一行(列)元素全为两数之和，则可将该行列式按这行(列)分为两个行列式之和. 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（5）把行列式的某两行(列)互换，行列式的值仅改变符号.

（6）若行列式的某两行(列)相同，则行列式的值为零.

（7）若行列式的某两行(列)成比例，则行列式的值为零.

（8）把行列式的某一行(列)乘以一个常数后加到另一行(列)上去，则行列式的值不变.

（9）行列式可按它的任意一行(列)展开：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n);$$
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

（10）行列式某行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,n;\ i \neq j);$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,n;\ i \neq j).$$

***3. 行列式的拉普拉斯展开定理**

设在 n 阶行列式 D 中任意取定 k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行(列). 由这 k 行(列)元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

4. 克拉默法则

若 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则该线性方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 的第 i 列各元素分别换成相应的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式，即

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

三、基本方法

计算行列式常用方法：

1. 化为特殊类型行列式

利用行列式性质，将所给行列式化为特殊类型行列式(如:上三角形行列式,下三角形行列式,范德蒙德行列式等)，进而利用特殊类型行列式的结果进行计算.

2. 化零降阶

利用行列式性质，将所给行列式的某一行或某一列中的一些非零元化为零(使该行或列中零元尽可能多)，然后将行列式按该行或列展开，化为低一阶行列式．依次逐步加以计算.

3. 递推法

将所给行列式按一行(或列)展开，得到一个递推公式，然后按照递推公式逐步递推加以计算.

递推法主要用于行列式中零元素比较多且非零元素很有规律的高阶行列式的计算.

典型例题(A)

例 1.1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\-3&3&-7&9&-5\\2&0&4&-2&1\\3&-5&7&-14&6\\4&-4&10&-10&2\end{vmatrix}.$$

分析　计算低阶行列式的基本方法是化为三角形行列式或化零降阶.

解法一　(化为三角形行列式)

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&0&-1&0&-2\\0&2&0&4&-1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&2&0&4&-1\\0&0&-1&0&-2\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&-1&0&-2\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&4&-6\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-6\end{vmatrix}=-(-2)(-1)(-6)=12.$$

解法二　(化零降阶)

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&0&-1&0&-2\\2&0&4&-2&1\\-2&0&-3&1&1\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}0&-1&0&-2\\2&4&-2&1\\-2&-3&1&1\\0&2&2&-2\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -7 \\ -2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -13 \\ -2 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+2}2\begin{vmatrix} 2 & -13 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}=12.
$$

点评 本题两种解法是计算低阶行列式的基本方法. 一般来说，化零降阶法较化为三角形行列式方法要简单.

例 1.2 计算 n 阶行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}, \text{其中 } a_i \neq 0 \ (i=1,2,\cdots,n-1).
$$

分析 该行列式中元素的规律是：除第 1 行、第 1 列及对角线元素外，其余元素全为零. 这种行列式称为箭形行列式. 该行列式可采取化为三角形行列式方法进行计算.

解法一 分别从第 $2,3,\cdots,n$ 列提取公因子 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$，然后将第 $2,3,\cdots,n$列的(-1)倍加到第 1 列，得

$$
D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=a_1a_2\cdots a_{n-1}\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\left(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right).$$

解法二　分别将第 2,3,⋯,n 列的 $-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \cdots, -\frac{1}{a_{n-1}}$倍加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\left(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right).$$

点评　(1) 两种解法的基本思路都是化为三角形行列式.

(2) 本题的计算方法具有普遍性. 一般来说，箭形行列式的计算均可用此方法.

例 1.3　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

分析　本题行列式除对角元之外全为 2，且第二行元素全为 2，故将第二行的(-1)倍分别加到其余各行，然后按第一行展开，得到一个三角形行列式.

解　$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2\cdot(n-2)!.$$

点评　化零降阶和化为三角形行列式是计算行列式最常采用的方法. 二者有时单独使用，有时结合使用. 具体应用时应视题目而定.

例 1.4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ x & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

分析　该行列式中元素的规律是：每行中除了对角元 a 外，其余元素均为 x，即每行(列)元素之和相等. 故可将第 2,3,…,n 列(行)均加到第 1 列(行)，从第 1 列(行)提取公因子，然后将其化为三角形行列式.

解　$$D_n=[a+(n-1)x]\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & a & x & \cdots & x \\ 1 & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)x]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-x \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)x](a-x)^{n-1}.$$

点评　本题的计算方法具有普遍性. 凡行列式每行(列)元素之和相等时，均可用此方法.

例 1.5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

分析　该题中行列式元素的规律是：每行元素之和相等. 应从这种规律性上考虑选用什么样的计算方法.

解法一　将第 2,3,…,n 列都加到第 1 列，从第 1 列提取公因子，然后将第 1 列的 $-a_2,-a_3,\cdots,-a_n$ 倍分别加到第 2,3,…,n 列，将其化为三角形行列式.

$$D_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i .$$

***解法二** 将 D_n 升阶为 $n+1$ 阶行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

将第 1 行的 (-1) 倍分别加到其余各行，然后将第 $2,3,\cdots,n+1$ 列都加到第 1 列，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i .$$

点评 （1）计算 n 阶行列式时，要善于观察行列式中元素的规律性，进而寻找一种较为方便的计算方法.

（2）本题解法一是采用了化为三角形行列式的方法；解法二是采用给 D_n 添加一行、一列，使其变为 $n+1$ 阶行列式的方法（这种方法称为升阶法或加边法）. 由行列式的性质知，升阶后的行列式与原行列式相等.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

分析 本题是一个三对角线行列式的计算问题. 可考虑用递推法计算，这里主要是如何寻找一个便于计算的递推公式.

解法一 利用行列式的性质，将 D_n 按第一行拆开：

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha\end{vmatrix}+\beta D_{n-1}=\alpha^n+\beta D_{n-1},$$

得递推公式 $D_n=\alpha^n+\beta D_{n-1}$.

以此递推，得

$$\begin{aligned}D_n&=\alpha^n+\beta D_{n-1}\\ &=\alpha^n+\beta(\alpha^{n-1}+\beta D_{n-2})\\ &=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\beta^2 D_{n-2}\\ &=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\beta^2\alpha^{n-2}+\beta^3 D_{n-3}\\ &=\cdots\\ &=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\beta^2\alpha^{n-2}+\cdots+\beta^{n-3}\alpha^3+\beta^{n-2}D_2,\end{aligned}$$

因 $D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\\ \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$，故

$$D_n=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\beta^2\alpha^{n-2}+\cdots+\beta^{n-3}\alpha^3+\beta^{n-2}\alpha^2+\beta^{n-1}\alpha+\beta^n.$$

解法二 将 D_n 按第一行展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$-\alpha\begin{vmatrix}\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix},$$

再将右边第二个行列式按第一列展开得递推公式

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

移项后递推，得

$$\begin{aligned}D_n-\beta D_{n-1}&=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}),\\&=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})\\&=\cdots\\&=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1),\end{aligned}$$

而

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\\ \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2,\ D_1=\alpha+\beta,$$

故

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n.$$

以此进一步递推，得

$$\begin{aligned}D_n&=\beta D_{n-1}+\alpha^n\\&=\beta(\beta D_{n-2}+\alpha^{n-1})+\alpha^n\\&=\beta^2D_{n-2}+\beta\alpha^{n-1}+\alpha^n\\&=\cdots\\&=\beta^{n-2}D_2+\beta^{n-3}\alpha^3+\beta^{n-4}\alpha^4+\cdots+\beta\alpha^{n-1}+\alpha^n\\&=\beta^n+\beta^{n-1}\alpha+\beta^{n-2}\alpha^2+\beta^{n-3}\alpha^3+\beta^{n-4}\alpha^4+\cdots+\beta\alpha^{n-1}+\alpha^n.\end{aligned}$$

点评 （1）若一个 n 阶行列式中零元素比较多，且非零元素很有规律性，一般可用递推法计算. 用递推法计算行列式的一般做法是：将行列式按一行（或列）展开，找到一个递推公式后进行递推.

（2）本题的两种解法都是采用递推法，方法一得到的递推公式中仅含有 D_n 和 D_{n-1}，但方法二得到的递推公式中含有 D_n，D_{n-1}，D_{n-2}. 由于递推公式不同，故在用递推公式进行计算时的繁简程度也不同.

例 1.7 问 λ，μ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\mu x_2+x_3=0,\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

分析 该方程组为 3 个方程 3 个未知量的齐次线性方程组，故可用克拉默法则.

解 该方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \mu & 1\\1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=\mu-\mu\lambda.$$