整数入门

魏万迪 编

近代数学知识丛书 JINDASHUXUEZHISHICONGSHU

四 川 教 育 出 版 社

近代数学知识丛书

整 数 入 门

魏 万 迪

四 川 教 育 出 版 社
一九八八年·成都

责任编辑：赵　健
封面设计：邱云松
版面设计：王　凌

近代数学知识丛书　　整数入门

四川教育出版社出版　　成都盐道街三号(　)
四川省新华书店发行　　培风印刷厂印刷
开本787×960毫米　1/32　　印数8.875字数158千
1988年月3第1版　　1988年3月第1次印刷
印数：1—1920册

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入门后便“不过如此”了.

这套知识小丛书将是你入门的向导. 它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力. 许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感. 当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了.

这套丛书所收书目大多为中学教学所涉及，故特别适合中学师生阅读；少数关系不甚密者有助于

开拓视野，亦颇有一读的必要.

愿这套丛书能对读者有所裨益. 果如此，我们当引为慰藉.

由于我们水平所限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

1987年2月

目　录

一　表示法

让我们从最简单、最基本的问题，即如何表示一个整数的问题说起，介绍一般的g进制法，并用来解决与整数有关的问题（包括智力游戏）；然后介绍与g进制法不同的阶乘表示法和k组合表示法.

1·1 g进制

在本书中，若无特殊说明，拉丁字母a、b……总代表整数.

在十进制中，一个整数，例如8065，是下面形状的和式的简写：

$$8065=8\cdot 10^3+0\cdot 10^2+6\cdot 10^1+5\cdot 10^0$$
$$=8\cdot 10^3+6\cdot 10+5.$$

10^0的系数 5 叫做8065的个位数，10^1的系数 6 叫做8065的十位数，10^2的系数0叫做8065的百位数，10^3的系数 8 叫做8065的千位数，这是由于10^0是一，10^1是十，10^2是一百，10^3是一千的缘故. 一般地把，

$$a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_1\cdot 10^1$$
$$+a_0\cdot 10^0$$

$$=a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

$$0\leqslant a_i\leqslant 9\ (0\leqslant i\leqslant n-1),\ a_{n-1}\neq 0$$

$$n\geqslant 1 \qquad (1\cdot 1\cdot 1)$$

简记为

$$(\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0})_{10}, \qquad (1\cdot 1\cdot 2)$$

或更简记为

$$(\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}). \qquad (1\cdot 1\cdot 3)$$

10^i的系数a_i叫做第（$n-i$）位数，即a_{n-1}是第一位数，a_{n-2}是第二位数……，a_0是第n位数．（1·1·2）中的数是一个n位数，表达式上的横线用来与连乘积$a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$相区别（当不致混淆时即略去），而括号右下角的10则用以表示十进制，以别于后面即将介绍的g进制．正如（1·1·3）中的表示方法那样，这个10常被省略．就是说，当括号的右下角无标志数或根本无括号时，就理解为十进制．同样的，当谈到一个数而略去进位制不提时，也指十进制数．这一约定只是为了符号上的简化，因为十进制在一般情况下用得最多．（1·1·1）和(1·1·2)是正整数的十进制表示法．要想得到负整数的十进制表示法，只需在（1·1·1）和（1·1·2）的整个表示式的最前面加一个负号“－”即可：

$$-(a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0)$$

$$=-(\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0})_{10}$$

$$=-\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0},$$

$$0\leqslant a_i\leqslant 9\ (0\leqslant i\leqslant n-1),\ a_{n-1}\neq 0,\ n\geqslant 1. \qquad (1\cdot 1\cdot 4)$$

须注意，数零不能用（1·1·1）～（1·1·4）表出，这是因为有条件$a_{n-1}\neq 0$．今规定零是一个零位数，

记为0.

小数的十进制表示法与整数的十进制表示法十分类似. 把

$$b_1\cdot 10^{-1}+b_2\cdot 10^{-2}+\cdots+b_m\cdot 10^{-m}$$

$$0\leqslant b_i\leqslant 9,\ (1\leqslant i\leqslant m),\ b_m\neq 0,\ m\geqslant 1 \qquad (1\cdot 1\cdot 5)$$

简记为

$$\overline{(0\cdot b_1b_2\cdots b_m)_{10}} \quad 或 \quad \overline{0\cdot b_1b_2\cdots b_m};$$

把

$$a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0+b_1\cdot 10^{-1}+\cdots+b_m\cdot 10^{-m}$$

$$0\leqslant a_i\leqslant 9\ (0\leqslant i\leqslant n-1),\ a_{n-1}\neq 0,\ b_m\neq 0$$

$$0\leqslant b_i\leqslant 9\ (1\leqslant i\leqslant m),\ n\geqslant 1,\ m\geqslant 1$$

简记为

$$\overline{(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0\cdot b_1\cdots b_m)_{10}}$$

或 $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0\cdot b_1\cdots b_m}$

这样就得到有限小数的十进制表示法.

所谓"十进", 就是"逢十进一"之意. 数10叫做十进制表示法的底.

在生产和生活中, 常常还用到其它进位制. 例如, 在数字电子计算机系统里常用二进制, 即逢二进一; 在日常生活中计时, 60秒为一分, 60分为一小时, 就是六十进位制的例子. 因此, 有必要对一般g进制进行讨论. 这里$g>1$, 是一个十进制正整数. 把

$$\pm(a_{n-1}g^{n-1}+a_{n-2}g^{n-2}+\cdots+a_1g^1+a_0g^0)$$

$$=\pm(a_{n-1}g^{n-1}+a_{n-2}g^{n-2}+\cdots+a_1g+a_0)$$

$$0 \leqslant a_i \leqslant g-1\ (0 \leqslant i \leqslant n-1),\ a_{n-1} \neq 0,\quad n \geqslant 1 \tag{1·1·6}$$

简记为

$$\pm\overline{(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)}_g, \tag{1·1·7}$$

并称（1·1·7）是数（1·1·6）的g进制表示. 这里约定，今后凡写出（1·1·7）而无其它说明时，都暗含$a_{n-1} \neq 0$. 有时为了强调这一点，也明白写出.

要想利用g进制数来为生产、科学研究和生活服务，有两个问题必须首先弄清：（1）是否一切非零整数都能表成（1·1·6）的形状？（2）对任一固定的非零整数，形如（1·1·6）的表法是否唯一？这里，唯一性可以理解为：如果对整数a，有

$$a=\overline{(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)}_g=\overline{(b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1b_0)}_g,$$

则必有

$m=n$和$a_{n-1}=b_{m-1}$，$a_{n-2}=b_{m-2}$，$\cdots$，$a_1=b_1$

$a_0=b_0$.

前一个问题叫做可表性问题，后一个问题叫做表法的唯一性问题.

与十进制的情形类似，说（1·1·7）是一个n位g进制数，把a_i叫做它的第（$n-i$）位数（$0 \leqslant i \leqslant n-1$）.

数零被约定为一个零位数，记为 0 . 为统一起见，把0也视为零的g进位制表示.

下面将使用一些直观的符号（称为整区间）：

对整数$x \geqslant y$,

〔x, y〕表示从x到y的整数全体;

〔x, y)表示从x到$y-1$的整数全体;

(x, y〕表示从$x+1$到y的整数全体;

(x, y)表示从$x+1$到$y-1$的整数全体;

〔x, ∞)表示大于等于x的整数全体;

($-\infty$, x〕表示小于等于x的整数全体;

(x, ∞)表示大于x的整数全体;

($-\infty$, x)表示小于x的整数全体;

($-\infty$, ∞)表示全体整数.

下面就来讨论上面提出的两个问题.

定理1·1·1 对任一大于1的正整数g,任一整数a都有唯一的一个g进制表示.

证明:首先证明可表性.很明显,只需对正整数a加以证明就够了,对a用数学归纳法.当$a=1$时,有

$$a=1=1\cdot g^0.$$

这就是(1·1·6)当$n=1$、$a_0=1$的情形.假设对一切小于a(>1)的正整数可表性是成立的,从而证明对a可表性也成立.

全体正整数〔1, ∞)可以分成下面一些互相衔接的段:

〔1, 2),〔2, 3),…〔$g-1$, g);

〔g, $2g$),〔$2g$, $3g$),…〔$(g-1)g$, g^2);

……

〔g^i, $2g^i$),〔$2g^i$, $3g^i$),…〔kg^i,

$(k+1)g^i)$，… $[(g-1)g^i, g^{i+1})$；

……

正整数a必落入某一段中，记该段为 $[kg^i, (k+1)g^i)$．即

$$kg^i \leqslant a < (k+1)g^i,\ 1 \leqslant k \leqslant g-1. \tag{1·1·8}$$

如果$a=kg^i$，$1 \leqslant k \leqslant g-1$，则这本身就是形如(1·1·6)的表示式．如果$a>kg^i$ 则

$$a > a-kg^i > 0.$$

由归纳法假设，$a-kg^i$可以有形如（1·1·6）的表示式：

$$a-kg^i = a_j a^j + a_{j-1}g^{j-1} + \cdots + a_1 g + a_0,$$
$$a_j \geqslant 1. \tag{1·1·9}$$

由（1·1·8）和（1·1·9）分别得出

$$a-kg^i < (k+1)g^i - kg^i = g^i,$$
$$a-kg^i \geqslant g^j.$$

因此$i>j$，从而（1·1·9）给出a的形如（1·1·6）的表示式：

$$a = kg^i + a_j g^j + a_{j-1}g^{j-1} + \cdots + a_1 g + a_0$$
$$= kg^i + 0 \cdot g^{i-1} + \cdots + 0 \cdot g^{j+1} + a_j g^j + \cdots + a_1 g + a_0,\qquad k \geqslant 1.$$

这就证明了可表性。

现在用反证法来证明表法的唯一性．设a有两种不同的表示法，一个是（1·1·6），另一个是

$$a = b_{m-1}g^{m-1} + \cdots + b_1 g + b_0, \tag{1·1·10}$$
$$0 \leqslant b_i < g\ (0 \leqslant i \leqslant m-1),\ b_{m-1} > 0,\ m \geqslant 1.$$

由（1·1·6）和（1·1·10），得

$$a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_1g+a_0$$
$$=b_{m-1}g^{m-1}+\cdots+b_1g+b_0. \qquad (1\cdot1\cdot11)$$

如果$n>m$，则

$$a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_1g+a_0$$
$$\geqslant g^{n-1}\geqslant g^m>(g-1)g^{m-1}+(g-1)g^{m-2}+\cdots+(g-1)g+(g-1)$$
$$\geqslant b_{m-1}g^{m-1}+b_{m-2}g^{m-2}+\cdots+b_1g+b_0.$$

这与（1·1·11）矛盾，因此$n\leqslant m$. 同理可得$m\leqslant n$. 这就是说必有$m=n$，从而（1·1·11）可化为

$$a_{n-1}g^{n-1}+\cdots+a_1g+a_0$$
$$=b_{n-1}g^{n-1}+\cdots+b_1g+b_0. \qquad (1\cdot1\cdot12)$$

如果有足标i使得$a_i\neq b_i$，设j是这样的i中的最大者；不失一般性，还可设$a_j>b_j$. 在这些条件下，（1·1·12）化为

$$(a_j-b_j)g^j+\cdots+(a_1-b_1)g+(a_0-b_0)$$
$$\geqslant g^j-(g-1)g^{j-1}-\cdots-(g-1)g-(g-1)$$
$$=1.$$

这与（1·1·12）矛盾. 因此，对一切i（$0\leqslant i\leqslant n-1$），都有$a_i=b_i$. 这就是说，（1·1·6）和（1·1·10）是两种不同表法的假设不能成立，从而表法的唯一性得证。证毕.

下面应用这个定理来解决一些方程的求解问题.

例1·1·1　求方程

$$3^w+2\cdot 3^x+3^y+2\cdot 3^z=308 \qquad (1\cdot1\cdot13)$$

满足条件$w>x>y>z\geqslant 0$的全部整数解w、x、y、z。

解：由于（1·1·13）是（1·1·6）当$g=3$时的特殊情况，故若（1·1·13）有合于要求的解，则（1·1·13）的左节必定为308的3进制表示：

$$(308)_{10}=(\underbrace{1 0\cdots 0 \underbrace{2 0\cdots 0 \underbrace{1 0 \cdots 0 \underbrace{2 0\cdots 0}_{z+1\text{个数码}}}_{y+1\text{个数码}}}_{x+1\text{个数码}}}_{w+1\text{个数码}})_3,$$

因为

$3^6=729$，$3^5=243$，$3^4=81$，$3^3=27$，

$3^2=9$，$3^1=3$，$3^0=1$，

故

$$(308)_{10}=3^5+2\cdot 3^3+3^2+2\cdot 3^0 \qquad (1\cdot1\cdot14)$$
$$=(102102)_3.$$

由定理1·1·1知（1·1·14）中的表示式是唯一的，从而方程（1·1·13）合于要求的解只有：

$w=5$，$x=3$，$y=1$，$z=0$． 解毕．

例1·1·2 讨论方程

$$3^w+2\cdot 3^x+2\cdot 3^y+3^z=306 \qquad (1\cdot1\cdot15)$$

满足条件$w>x>y>z\geqslant 0$的整数解w、x、y、z．

解：与例1·1·1类似，如果w、x、y、z是方程（1·1·15）合于要求的解，则（1·1·15）的左节

必为306的3进制表示．因

$$306=3^5+2\cdot 3^3+3^2,$$

故

$$(306)_{10}=(1020100)_3.$$

这与（1·1·15）左节的3进制表示

$$(\underbrace{10\cdots\underbrace{020\cdots\underbrace{020\cdots\underbrace{010\cdots0}_{z+1\text{个数码}}}_{y+1\text{个数码}}}_{x+1\text{个数码}}}_{w+1\text{个数码}})_3$$

不合，因为在前一表示中，从第一位数码开始，非零数码依次为1，2，1；而后一表示中则是1，2，2，1．由定理1·1·1中的唯一性知，306绝不能表成（1·1·15）左节的形式，因此方程（1·1·15）无解．解毕．

如果一个整数 a 等于另一个整数 b 的平方（$a=b^2$），则说a是一个**完全平方数**，简称**平方数**．

例1·1·3　求证：(1) 当$g>2$时，

$$\overline{(1\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}2\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}1)_g}\text{ 是一个平方数；}$$

（2）

$$\overline{(1\underbrace{0\cdots0}_{n-1\text{个}}1\underbrace{0\cdots0}_{n+1\text{个}}1)_2}\text{是一个平方数}$$

证明：因为

$$\overline{(10\cdots020\cdots01)}_g=g^{2n+2}+2g^{n+1}+1$$

$$=(g^{n+1}+1)^2,$$

故题中(1)的结论成立.

又因为

$$\overline{(\underbrace{10\cdots0}_{n-1\text{个}}\underbrace{10\cdots0}_{n+1\text{个}}1)}_2=2^{2n+2}+2^{n+2}+1$$

$$=2^{2n+2}+2\cdot2^{n+1}+1$$

$$=(2^{n+1}+1)^2,$$

故题中(2)的结论成立. 证毕.

例1·1·4 设a、b、n是正整数且$a>b>1$. 又设

$A_{n-1}=\overline{(c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_0)}_a$,

$A_n=\overline{(c_nc_{n-1}\cdots c_0)}_a$

$B_{n-1}=\overline{(c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_0)}_b$,

$B_n=\overline{(c_nc_{n-1}\cdots c_0)}_b$, $c_nc_{n-1}\neq0$, 求证

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}. \qquad (1\cdot1\cdot16)$$

证明: (1·1·16)即

$$\frac{c_{n-1}a^{n-1}+c_{n-2}a^{n-2}+\cdots+c_0}{c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\cdots+c_0}$$

$$<\frac{c_{n-1}b^{n-1}+c_{n-2}b^{n-2}+\cdots+c_0}{c_nb^n+c_{n-1}b^{n-1}+\cdots+c_0},$$

亦即

$$1-\frac{c_na^n}{c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\cdots+c_0}$$