新世纪高等学校教材

北京市高等教育精品教材

数学与应用数学基础课系列教材

DAISHU XUE JICHU

代数学基础（上册）

北京师范大学数学科学学院 主 编

张英伯 王恺顺 编 著

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材
北京市高等教育精品教材

数学与应用数学基础课系列教材

代数学基础

(上册)

DAISHU XUE JICHU

北京师范大学数学科学学院 主 编
张英伯 王恺顺 编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数学基础（上册）/张英伯，王恺胰编著.—北京：北京师范大学出版社，2012.9

（新世纪高等学校教材.数学与应用数学基础课系列教材）

ISBN 978-7-303-14978-0

Ⅰ.①代… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.高等代数－高等学校－教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第163621号

营 销 中 心 电 话　010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电 子 信 箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　刷：北京东方圣雅印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：18
字　数：325千字
版　次：2012年9月第1版
印　次：2012年9月第1次印刷
定　价：29.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　胡　维
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳　刘松弢
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系。2004 年成立北京师范大学数学科学学院。经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机。北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版。除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有 5 种版本。第 1 种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 1985 年，由我校出版社编写出版的 1 套 (17 部) 数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材。在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要。第 2 种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材。第 3 种是面向 21 世纪课程教材。第 4 种是北京师范大学现代数学课程教材。第 5 种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书。在这些教材中，除再次印刷外，已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版。

2005 年 5 月，李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授与北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编 (李仲来教授负责)，准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写。计划用几年时间，出版数学与应用数学基础课系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士研究生系列教材，共 4 个系列的主要课程教材。我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善。

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授 (数学专业) 和在职中学教师等使用和参考。(李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

2012-07-02

序言

北京师范大学老一辈代数学家张禾瑞与郝钢新先生 20 世纪 50 年代合写的"高等代数" 是我国师范院校的首选教材，发行了 100 余万册。现在编写的代数学基础上册："高等代数"，试图保持原教材脉络清晰、深入浅出的传统，在整体结构、部分章节、例题和习题等方面承袭了原教材，在此表示深切地感谢。

历经百年演变的高等代数已经是一门很成熟的课程。但是随着社会进入了信息化时代，数学科学日趋重要，目前国外一些大学的数学系已大大加强了代数课程的教学。笔者曾翻译过莫斯科大学的代数学引论第一卷，受到这本书和欧美一些大学代数教材的启发，我们试图将这门课程与国际接轨，将数学学科现代发展所需的基础知识融会贯通。

教材的编排是这样的，首先介绍了矩阵、行列式的概念和运算，给出群、环、域的定义和例子，介绍多项式环，然后讲述向量空间和线性变换，二次型和度量空间。我们对教材体系进行了局部调整，比如矩阵一章从解线性方程组到秩的引入自成系统；将抽象代数的内容适当地融入，通过大量实例引入了群环域的定义；作为选修介绍了线性变换的根子空间等。

这本教材已经在北京师范大学使用了五年，在首都师范大学使用了一年，在这期间，老师和同学们对教材提出了宝贵的修改意见，因而是一部集体劳动的结晶。我们特别感谢邓邦明、胡永建、王志玺教授、李建华、刘玉明、徐竞、曾紫婷、胡维副教授，他们提出的修改意见无论在数学内容上还是文字叙述上都是非常关键的。

编者

2012-07-02

读读代数

——致同学们

大约距今 5000 年，人类历史上先后出现了一些不同的书写记数的方法，如古埃及的象形数字、古巴比伦的楔形数字、中国的甲骨文数字，逐步形成了各种较为成熟的记数系统，并产生了自然数以及正有理数的加、减、乘、除四则运算.

从先秦至西汉中期，中国古代众多学者编纂修改而成《九章算术》一书. 其中的“方程术”讨论了线性方程组的解法；书中还提出了负数的概念，以及开平方、开立方的算法.

公元 3 世纪，古希腊出现了丢番图 (A. Diophantus, 约 246—330) 的《算术》一书，书中创造和使用了一套特殊的记号，形成了后世代数符号的雏形. 在《算术》中，丢番图还研究了不定方程的整数解，其中有一个问题是将一个已知的平方数分为两个平方数之和，引出了现代数学中著名的“费马大定理”.

代数这一名词正式出现在公元 820 年左右《还原与对消的科学》一书中. 阿拉伯数学家花拉子米 (M. Khowārizmī, 约 780—850) 在本书中探讨了线性方程和二次方程的一般解法. 全书被译成拉丁文，作为标准的数学课本在欧洲使用了数百年. 花拉子米的这一著作通常也被称为代数学. 阿拉伯书名中“al-jabr”的原意为还原，即移项，现代数学的术语“代数”(algebra) 由此演变而来.

我国南宋数学家秦九韶 (约 1202—1261) 所著《数书九章》发现了“大衍求一术”, 即同余方程组的解法，现在被称为中国剩余定理.

在公元 16 世纪文艺复兴时期，意大利数学家费罗 (S. Ferro, 1465—1526)、塔尔塔利亚 (N. Tartaglia, 1499—1557)、卡尔达诺 (G. Cardano, 1501—1576) 和费拉里 (L. Ferrari, 1522—1565) 等给出了三次和四次方程的求解公式. 法国数学家韦达 (F. Viete, 1540—1603) 探讨了用多项式的因式分解求解代数方程的方法，并引入了系统化的数学符号体系，这种符号体系使代数有可能成为一门独立的学科.

解析几何的建立归功于两位法国数学家笛卡儿 (R. Descartes,1596—1650) 和费马 (P. Fermat, 1601—1665). 1637 年笛卡儿发表了著名的哲学著作《正确思维 和发现科学真理的方法论》，作为该书三个附录之一的“几何学”建立了几何学与代数学之间的坚实桥梁.

直到 19 世纪初，人们仍沿用古代阿拉伯数学家的观点，将代数学看做是解代数方程的学问. 在 17 至 19 世纪约 200 年间，数学家们把注意力集中在求五次和五次以上代数方程的公式解上，但求解的努力均以失败告终. 法国数学家拉格朗日 (J. Lagrange, 1736—1813) 猜想"不可能用根式解四次以上的方程". 1824 年，挪威数学家阿贝尔 (N. Abel,1802—1829) 证明了这一猜想，并引进了"域"这一重要的近代数学概念. 那么什么样的方程能够用根式求解呢？法国数学家伽罗瓦 (E. Galois, 1811—1832) 于 1829 年 ~1831 年完成的几篇论文对此作出了解答. 伽罗瓦引进了方程根的置换群，证明了方程是根式可解的当且仅当方程的群是"可解群". 群的概念的引进导致了代数学在对象、内容和方法上的深刻变革，成为近代代数学的发端.

随后，爱尔兰数学家哈密尔顿 (W. Hamilton, 1805—1865) 发现了四元数. 自从数学家们于 19 世纪初接受了复数之后，就一直在寻求复数的推广. 哈密尔顿发现，可以把复数处理成实数的有序对，那么放弃乘法的交换性，由四个实数构成的四元数组可以看做是复数的推广. 这一做法启示了数学家们，他们从此可以通过减弱、放弃或替代普通代数学中不同的定律和公理，更加自由地构造新的数系. 比如德国数学家格拉斯曼 (H. Grassmann,1809—1877) 与哈密尔顿同时建立了有 n 个分量的"扩张的量"，实际上涉及了 n 维向量空间，也就是我们即将学习的线性代数的主要对象.

到 20 世纪上半叶，整个数学大厦得到根本性的改造. 代数不再单纯是关于解多项式方程的学科，而转变为对各种代数结构及其性质的研究，开始坚定地沿着公理化和抽象化的道路发展. 在《代数学基础》一书中，我们将向同学们介绍直到 20 世纪初，代数学最基本的理论框架. 在本书的学习完成之后，同学们将会接触到现代代数学丰富多彩的研究领域.

目　录

第一章　线性方程组与矩阵

我们在本章介绍线性方程组的一种解法 —— 消元法，并由此引出矩阵的概念. 然后讨论矩阵的运算、矩阵的分块、矩阵的初等变换、矩阵的秩、可逆矩阵及其求逆的方法，并利用矩阵的秩给出线性方程组有解的判定.

§1.1　线性方程组

我们在中学学习过解一元一次方程 $ax=b$ 和二元一次方程组

$$\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1, \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2, \end{array}$$

其中 $a,b,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2$ 都是实数. 将实数的集合记作 $\mathbb{R}$, 现在我们来解 $\mathbb{R}$ 上具有 n 个 **变元** (variable), m 个一次方程的更一般的方程组，称为 n 元 **线性方程组** (system of linear equations):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & & & \cdots\cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{1}$$

其中 $a_{ij},b_i\in\mathbb{R}$, $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$. 方程组 (1) 中变元的 **系数** (coefficient) 使用了简明方便的符号 a_{ij}, 它表示在第 i 个方程中第 j 个变元 x_j 的系数， b_i 叫作第 i 个方程的 **常数项** (constant).

如果用实数 c_i 代替变元 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，方程组 (1) 中的每个方程都变成了恒等式，那么就称方程组 (1) **有解** (solvable), 这 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的有序组叫作方程组 (1) 的一个 **解** (solution). 如果这样的有序组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 不存在，那么就称方程组 (1) **无解** (unsolvable).

在实际解方程组时，比较简单的方法是消元法. 我们在中学已经会用加减消元法和代入消元法来解含有两个变元的线性方程组. 现在给出一个解三元线性方程组的例子.

例 1 解线性方程组

$$\begin{array}{rcrcrcr}\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & x_3 & = & 1,\\ x_1 & + & \frac{5}{3}x_2 & + & 3x_3 & = & 3,\\ 2x_1 & + & \frac{4}{3}x_2 & + & 5x_3 & = & 2.\end{array}$$

解 将第一个方程和第二个方程交换位置，得到

$$\begin{array}{rcrcrcr}x_1 & + & \frac{5}{3}x_2 & + & 3x_3 & = & 3,\\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & x_3 & = & 1,\\ 2x_1 & + & \frac{4}{3}x_2 & + & 5x_3 & = & 2.\end{array}$$

分别将第二个方程减去第一个方程的 $\frac{1}{2}$ 倍，第三个方程减去第一个方程的 2 倍，得到

$$\begin{array}{rcrcrcr}x_1 & + & \frac{5}{3}x_2 & + & 3x_3 & = & 3,\\ & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2},\\ & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -4.\end{array}$$

将第二个方程乘以 -2 得到

$$\begin{array}{rcrcrcr}x_1 & + & \frac{5}{3}x_2 & + & 3x_3 & = & 3,\\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1,\\ & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -4.\end{array}$$

将第二个方程的 2 倍加到第三个方程，得到

$$\begin{array}{rcrcrcr}x_1 & + & \frac{5}{3}x_2 & + & 3x_3 & = & 3,\\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1,\\ & & & & x_3 & = & -2.\end{array}$$

再将第二个方程减去第三个方程，第一个方程减去第三个方程的 3 倍，得到

$$\begin{array}{rcrcrcr}x_1 & + & \frac{5}{3}x_2 & & & = & 9,\\ & & x_2 & & & = & 3,\\ & & & & x_3 & = & -2.\end{array}$$

最后从第一个方程减去第二个方程的 $\frac{5}{3}$ 倍，得到

$$\begin{aligned}x_1 &= 4,\\ x_2 &= 3,\\ x_3 &= -2\end{aligned}$$

就是原方程组的解. □

为什么用上述方法可以得到原方程组的解呢? 我们将在引理 1.1.3 中给出严格的证明. 分析上述解法, 我们对方程组施行了如下三种变换:

I. 交换两个方程的位置;

II. 用一个非零常数乘以某个方程;

III. 用一个常数乘以某个方程加到另一个方程上.

这三种变换称为线性方程组的初等变换.

线性方程组 (1) 中变元的系数可以排成一个表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

而 (1) 的系数和常数项又可以排成下表

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

定义 1.1.1 由 st 个实数 c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t)$ 排成的一个 s 行 t 列的表

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{st} \end{pmatrix}$$

叫作 $\mathbb{R}$ 上的一个 $s \times t$ **矩阵** (matrix), c_{ij} 叫作这个矩阵的 **元素** (entry).

矩阵中的元素有双脚标, 其中第一个脚标指明元素所在的行, 第二个脚标指明元素所在的列.

矩阵 (2) 和 (3) 分别叫作线性方程组 (1) 的 **系数矩阵** (coefficient matrix) 和 **增广矩阵** (augmented matrix).

如果用 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 表示交换矩阵的第 i,j 行, $\boldsymbol{D}_i(c)$ 表示用非零常数 c 乘以矩阵的第 i 行, $\boldsymbol{T}_{ij}(c)$ 表示将矩阵的第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行, 那么例 1 中方

程组的求解过程相当于对增广矩阵施行一系列变换：

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 2 & \frac{4}{3} & 5 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{P_{12}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 2 & \frac{4}{3} & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{21}(-\frac{1}{2}),T_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{D_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{T_{23}(-1),T_{13}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{12}(-\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
$$

我们看到，在解线性方程组时，矩阵的写法更为简捷．这也启发我们对矩阵的行引入下述三种初等变换．

定义 1.1.2 矩阵的 **初等行变换** (elementary transformation of rows) 指的是对一个矩阵施行的如下变换：

Ⅰ. 交换矩阵的两行；

Ⅱ. 用一个非零常数乘以矩阵的某一行，即用该常数乘以矩阵某一行的每一个元素；

Ⅲ. 用一个常数乘以某一行后加到另一行上，即用该常数乘以矩阵的某一行的每一个元素后加到另一行的对应元素上．

我们指出，上述三种初等行变换都是可逆的．事实上，设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一次初等行变换得到矩阵 $\boldsymbol{A}'$.

Ⅰ. 如果交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i,j 行得到 $\boldsymbol{A}'$, 那么交换 $\boldsymbol{A}'$ 的第 i,j 行就回到了 $\boldsymbol{A}$;

Ⅱ. 如果将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零常数 c 得到 $\boldsymbol{A}'$, 那么将 $\boldsymbol{A}'$ 的第 i 行乘以 $\frac{1}{c}$ 就回到了 $\boldsymbol{A}$;

Ⅲ. 如果将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行上得到 $\boldsymbol{A}'$, 那么将 $\boldsymbol{A}'$ 的第 j 行乘以 $-c$ 加到第 i 行就回到了 $\boldsymbol{A}$.

对偶地，将定义 1.1.2 中的行都换成列，我们就定义了矩阵的三种初等列变换，它们也都是可逆的.

如果具有相同变元的两个线性方程组同时无解，或者同时有解，并且在有解的情况下这两个方程组的解相同，那么就称这两个方程组 **同解** (equivalent).

引理 1.1.3 *如果一个线性方程组是由另外一个线性方程组经过有限次初等变换得到的，那么这两个方程组同解.*

证明 根据数学归纳法原理，只要证明当方程组 (1) 经过一次初等变换得到方程组 $(1')$ 时，(1) 与 $(1')$ 同解就可以了.

我们先假定方程组 (1) 有解，证明 (1) 的任意解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 也是 $(1')$ 的解.

I. 如果在方程组 (1) 中交换第 i, j 个方程的位置，其他方程保持不变得到 $(1')$, 那么 $(1')$ 中的方程除了排列次序外没有改变，因此 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 也是 $(1')$ 的解.

Ⅱ. 如果在方程组 (1) 中将第 i 个方程两边同时乘以一个非零常数 c, 变为

$$ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \cdots + ca_{in}x_n = cb_i, \tag{4}$$

其他方程保持不变得到方程组 $(1')$, 那么 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 满足未改变的方程. 因为

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i$$

是恒等式，两端乘以 c, 我们看到 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 也满足 $(1')$ 中的第 i 个方程 (4). 这就证明了 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 也是 $(1')$ 的解.

Ⅲ. 如果将方程组 (1) 中的第 i 个方程变为

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j, \tag{5}$$

即将第 j 个方程的 c 倍加到第 i 个方程，其他方程保持不变得到方程组 $(1')$, 那么 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 满足未改变的方程. 因为

$$\begin{aligned} a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n &= b_i, \\ a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n &= b_j \end{aligned}$$

是恒等式, 用 c 乘以第二个恒等式的两端, 加到第一个恒等式, 于是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 也满足 $(1')$ 中的第 i 个方程 (5). 这就证明了 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 也是 $(1')$ 的解.

反过来，注意到初等变换是可逆的，方程组 (1) 也是方程组 $(1')$ 经过一次初等变换得到的. 如果 $(1')$ 有解，那么 $(1')$ 的解也是 (1) 的解.

最后我们指出，上述证明表明：方程组 (1) 无解，当且仅当 (1′) 无解. □

根据这个引理和线性方程组的矩阵表法，我们就可以从研究矩阵的初等变换入手来解一般的线性方程组了.

引理 1.1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 m 行 n 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

通过矩阵的初等行变换和 I 型初等列变换可以把 $\boldsymbol{A}$ 化成下述形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant \min\{m,n\}$.

证明 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 都等于零，那么 $\boldsymbol{A}$ 已经有 (6) 的形式. 现在假设存在一个 $a_{ij} \neq 0$, 那么通过交换矩阵的行与列，可以将这个元素置于矩阵的左上角. 用 $\frac{1}{a_{ij}}$ 乘以第一行，然后将其余各行分别减去第一行乘以适当的常数，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 表示矩阵的元素，但不同位置上 $*$ 表示的元素未必相同. 在矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 中，如果除第一行外，其余各行的元素都是零，那么 $\boldsymbol{A}_1$ 已有 (6) 的形式. 如果在 $\boldsymbol{A}_1$ 的后 $m-1$ 行中存在一个非零元素 b, 用初等变换把 b 换到第二行第二列交