

微 積 分

上 冊

微 积 分

上 册

无錫輕工业学院

1974年4月

数学中的转折点是笛卡儿的变数。

有了变数，运动进入了数学，有了变数
辩证法进入了数学，有了变数，微分和
积分也就立刻成为必要的了，而它们也
就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨
大体上完成，但不是由他们发明的。

恩格斯《自然辩证法》

1971年6月

第一版 第236页



毛主席语录

路线是个纲，纲举目张。

思想上政治上的路线正确与否是决定一切_上的。

教育必须为无产阶级政治服务 必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

人们总是要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

说 明

- (一) 这份《微积分讲义》是73年春在提倡自学和指导思想下着手编写的，是以72年编的《微积分》经较大的修改而成的，深度广度原来是按机械类型后续课程的需要决定的。现其他类型各专业亦采用这本讲义，因此在组织教学时要根据实际情况在内容上（甚至章节上）加以增删。
- (二) 编写时力求运用辩证唯物主义观点来阐明概念、理论与方法。在内容组织上力求做到“由近及远，由浅入深”。旧教材的要害是“演绎系统”，把在实践基础上积累起经验而形成的理论说成是由少数概念和法则演绎出来的，这种唯心论的演绎系统必须彻底打破。但是根据事物发展的规律和我们认识客观事物的方法而形成的系统，则是学习所必须。这种系统性与旧教材的“演绎系统”是有区别的。
- (三) 反映事物性质的定理或法则在通常情况下适用范围很广，但又不是绝对的（即应用时有一定的条件限制），我们在介绍这些法则时，对必须注意的条件加以重视，而对那些不影响结果的条件有时采取“述而不论”，有时干脆不提这类条件，以免学习时钻牛角尖。
- (四) 讲义内穿插的习题，是结合所介绍的内容与方法作初步练习之用，使用本讲义时要另行编选练习、巩固提高的作业题。
- (五) 在学习了“理科教育革命整风委员会”精神以后，感到自己编出的这本讲义，对于开展自学提供一些便利，但对于“围绕典型产品组织教学”就很不适应。但条件所限，一时不可能作大的改动，只有按原稿先行付印。使用时要结合各专业的教学实践，积累新的经验，并对本讲义提出宝贵意见。

数学教研组

1974年1月

上册目录

第一章 函数

§1.1	变量与函数	1
§1.2	函数概念	2
§1.3	函数表示法	3
§1.4	自变量取值范围	7
§1.5	函数的特定值	10
§1.6	基本初等函数	11
§1.7	函数的运算	13
§1.8	参数式	21

第二章 微积分方法概述

§2.1	什么是积分法	23
§2.2	微分法的物理原型	28
§2.3	小结	30
§2.4	极限概念	30
§2.5	第一类函数极限的计标方法	33
§2.6	无穷小量	37
§2.7	极限运算法则	38
§2.8	第二类函数极限的计标	40
§2.9	两个重要极限	41
§2.10	无穷小的比较	44

第三章 导数与微分

§3.1	变化率问题与导数概念	48
§3.2	导数的几何意义	52

§3.3	导数基本公式表	54
§3.4	导数的四则	56
§3.5	复合函数求导法	60
§3.6	高阶导数	64
§3.7	微分概念	66
§3.8	微分的理论和计标	68
§3.9	微分在近似计标方面的应用	72
§3.10	参数式求导法	77
§3.11	利用微分计标各类变化率的方法	77

第四章 导数应用

§4.1	函数的增减区间与极值, 简易作图法	85
§4.2	极值应用题	88
§4.3	曲线的曲率与曲率半径	93

第一章

函数

毛主席在《矛盾论》中指出：“对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”微积分学所研究的对象就是函数。

§ 1.1 变量与常量

整个自然界以及人类社会都在不断地运动，而运动又是千变万化的。但“无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态”。两种状态在数量方面表现出来就产生了常量与变量两个数学概念，它们既是对立的，又是统一的。

例如自由落体运动规律是：

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

其中经过的时间 t 与下落的距离 S 都是变量，而初速度 V_0 则是常量，重力^加速度 g 通常也作为常量。

在一个问题或一个式子中，区分变量与常量是十分重要的，例如解析几何中的曲线方程，动点的坐标是变数，区别同类曲线形状大小的参数是常数。但变量与常量又是统一的，它们的地位在一定条件下能相互转化。例如弹道方程：

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

在研究其中一条轨迹的形态时，仰角 α 是常量。如果研究的问题是仰角的变化对弹道形状的影响，则 α 转化为变量。反之，如重力加速度 g ，在研究大范围运动（如宇宙飞行）时，它是

随高变而变心的量，但在小范围里，我们就把它看成是常量，由于各种物理量或几何量在计算时总是通过抽象的数进行的，而数学式子本身也只能反映数与数之间的联系与转化，所以有时就把变量或常量直接地叫做变数或常数，两种名称是通用的。

§ 1.2 函数概念

毛主席在“矛盾论”中教导我们：“对于物质的每一种运动形式，必须注意它和其他各种运动形式的共同点。”现在我们来考察三个式子：

$$S = \frac{1}{2} g t^2; \quad A = \pi r^2; \quad y = kx^2$$

它们分别是自由落体运动方程、圆面积公式、抛物线方程，物理意义或几何意义都不一样，但是都有一些类似之处。

第一个式子表明由 t 的值，经过平方，再乘以定数，就得到 S 的值；第二个式子表明由 r 的值，经过平方，再乘以定数就得到 A 的值；第三个式子表明由 x 的值，经过平方，再乘以定数，就得到 y 的值。它们的共同点是：(1)都有两个变量，其中一个变了另一个也跟着变；(2)从两个变量的数量关系来说，都是由一个变量的值，经过平方再乘以定数，就得到另一个变量的值，如果撇开这三对变量的物理或几何意义，单纯描述各对变量之间的数量关系，就产生了数学上的二次函数概念。这样， S 就是 t 的二次函数； A 就是 r 的二次函数； y 也是 x 的二次函数。换句话说，用二次函数这个抽象概念，就把三个（以及更多个）表面完全不同而实质上又有某种共性的事物统一起来。如果我们进一步对一般的二次函数的性质有所了解，就可以举一反三地对上述三个具体问题以及一切表现为二次函数关系的具体问题进行研究。

一般的说，设有两个相互制约的变量 x 、 y ，如果对于 x 所取的每一个值，总按一定的规律确定一个 y 值与 x 所取值对应，则说变量 y 是变量 x 的函数。

按照这个概念，我们就在千万种相互联系的事物中，分离出一类属于函数范畴的相互制约关系。例如，物体运动时，路程是时间的函数，同时，速度也是时间的函数（当然两个函数关系不一样）。在几何中，球体体积是半径（也可以是直径）的函数，球体表面积也是半径的函数。这些都是比较简单的函数关系。更复杂的如气象学中，平均气温是时间的函数，显然更精确地把这个函数关系表示出来是比较困难的。

y 是 x 的函数可以用下列记号来表示：

$$y = f(x)$$

记号中的 x 叫自变量， y 叫因变量。整个式子表示 y 是 x 的函数，而“ f ”是抽象的表示某种函数关系。

两次不同的变量，如果函数关系相同，可以用同一个记号“ f ”来表示，如 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 及 $y = 4.9x^2$ 可以同时表示成

$$S = f(t), \quad y = f(x)$$

但如果函数关系不同，就必须在记号上加以区分。例如：

甲、乙两个物体，一个以初速 V_0 自由下落，一个以初速 V_1 自由下落，则分别有：

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad S = V_1 t + \frac{1}{2}gt^2$$

如果第一个函数关系用 $S = f(t)$ 表示，则第二个函数关系就不能表示成 $S = f(t)$ 必须换一个函数记号如 $S_1 = \varphi(t)$ 以示区别。

练习 举出各领域里一些函数关系的例子。

§ 1.3 函数表示法

表示具体函数关系，最通用的是标式，这就叫做标式表示法（或解析表示法）。例如：

$$S = \frac{1}{2}gt^2, \quad A = \pi r^2, \quad y = kx^2$$

都是用标式表示函数关系。更复杂一些的如

$$y = \sin x, \quad y = \sqrt{1 + \cos 2x}, \quad y = \ln(1+x)$$

等。它们都直接表示出自变量值与函数值的顺序，这种函数式子叫显式，也有一些式子间接的反映出两个变量间的函数关系，如

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px$$

我们把它们叫做隐式。隐式有时可以转化为显式。如 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 以 x 为自变量，解出 y 就得到显式

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

练习 将下列隐式函数转化为显式（以 x 为自变量）：

$$y^2 = 2px, \quad y^3 = x+1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xy - 1 = 0$$

客观世界的许多函数关系，常需要通过分析、列出式子才能转化为数学问题。下面举例说明。

例1. 曲柄连杆机构滑块

运动与曲柄转动的关系

（图1-1）。

〔分析〕曲柄连杆机构

是把曲柄的转动转化为

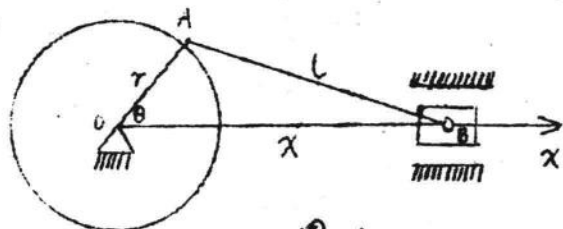


图 1-1

滑块直线运动的机构，要研究这个机构的许多性能，首先要找到滑块上定点P的位置与曲柄 $\overline{OA}$ 的转动角 θ 间的函数关系。如果选择曲柄回转中心O为原点，则曲柄转动的角度可用变量 θ 表示出来，B的位置可用变量 x 表示出来。因 $\triangle OBA$ 总是三角形，可利用解任意三角形的方法求出 x 与 θ 的关系。

(解) 设 $OA = r$, $AB = l$, 按三角形的余弦公式有

$$l^2 = x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta$$

改写成 x 的二次方程得

$$x^2 - (2r \cos \theta) x + (r^2 - l^2) = 0$$

解方程得

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left\{ 2r \cos \theta \pm \sqrt{4r^2 \cos^2 \theta - 4(r^2 - l^2)} \right\} \\ &= r \cos \theta \pm \sqrt{l^2 - r^2(1 - \cos^2 \theta)} \\ &= r \cos \theta \pm \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

由于 $r \cos \theta$ 是 $\overline{OA}$ 在 x 轴上的投影，所以 $\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}$ 刚好是 $\overline{AB}$ 在 x 轴上的投影，但因 $l > r$ ，所以根号前应取正号，即

$$x = r \cos \theta + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}$$

这就清楚地表明了 x 与 θ 的函数关系。

练习

(1) 织机上轴与纬机构如图1-2所示，其中①为弯轴上的曲柄，②为牵手，③为箱座脚。当弯轴绕固定轴O转动时，箱座脚作摇摆运动，箱座就在一个不大的圆弧上作往复运动。现将牵手杆简化为一点B，(图1-3)并把B点的轨迹 $\widehat{P_1 B P_2}$ 近似地看成是直线 $P_1 P_2$ ，当弯轴OA按顺时针方向由前死心A₀起回转一个 α 角时，B点由前方极端位置 P_1 移动到B点，求位移 s

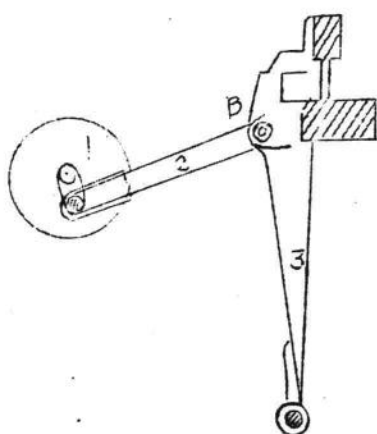


图 1-2

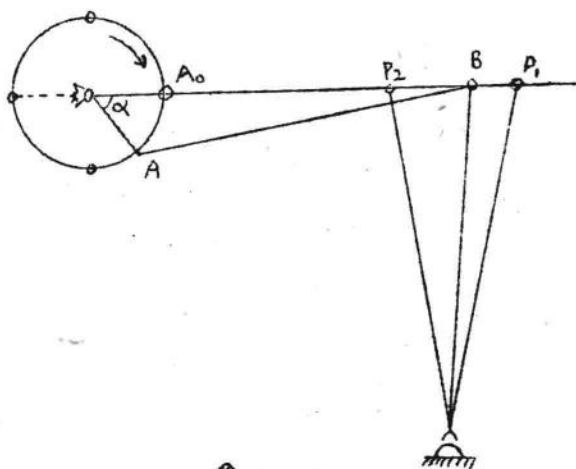


图 1-3

($= P_1B$) 与角 α 之间的函数关系。

[提示: 设 $OA=r$, $AB=l$, 则可以利用曲柄连杆机构的结果,

答: $S = r(1 - \cos \alpha) + l - \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha}$]

(2) 图 1-4 是一种牛头刨运动机构的示意图, 其中 r 是飞轮以偏心梢与中心的距离, 试按图所标注的文字, 求出变量 x 与转角 α 间的函数关系。

[提示: 利用相似三角形; 答: $x = \frac{(a+b)r \sin \alpha}{a + r \cos \alpha}$]

有些函数关系是通过把自变量的值和对应的函数值顺序列表或表格显示出来。例如我们熟悉的平方表, 方根表, 对数表, 三角函数表等都是用表的形式显示函数关系。这种方法对于那些不能直接计算出函数值的函数是十分必要的, 需要时查表就行了, 但结果只能达到一定的精确度。也有些函数关系只能通过规定或实验记录下若干对对应的数据, 这时也只有用列表法显示函数关系。

函数的第三种表示法是利用画在坐标系上的曲线, 曲线上的点的横坐标表示自变量的值, 纵坐标表示相应的函数值。例如

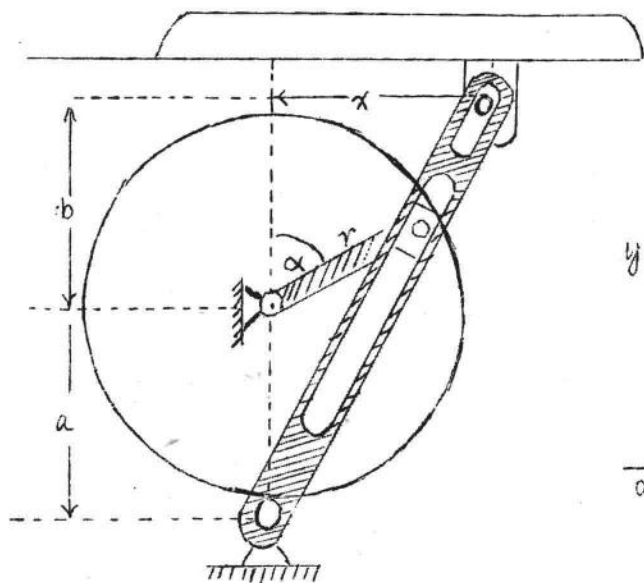


图 1-4

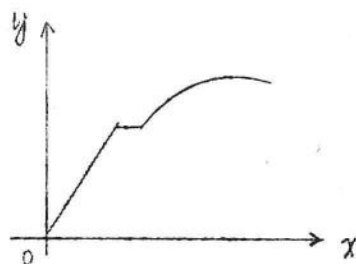


图 1-5

材料拉伸试验自动记录下来的曲线就表明了应力与应变间的函数关系。

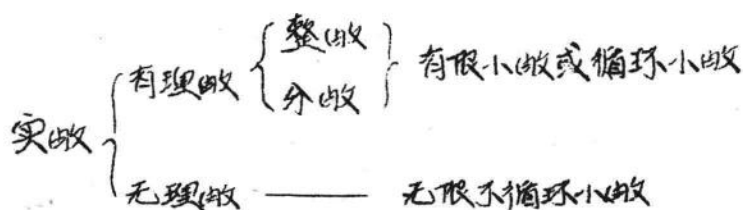
用曲线表示函数关系的优点是能一目了然的看出函数在整个变化过程中的特性。如图 1-5 所示的曲线分成四段表明材料在拉伸过程中各个阶段的不同特性〔象第一段通过原点的直线就表明在弹性限度内应力与应变成正比关系。〕

有时为了直观地反映函数的特性，即使有了精确的解析式也需要画出图形，这将在下面研究。

§ 1.4 自变量取值范围

本课程所讲的函数，自变量限于是实数。在这里先把实数概念复习一下。

实数是由有理数和无理数两大部分组成：



例如： $\sqrt{2}$, π , e , $\ln 3$ 等都是无理数，严格地表示无理数只能用符号，不需要绝对精确时可用近似值。

实数有许多性质，例如任意两个实数中间有“无数多个”实数，这无数多个实数是“连续”的，当我们说一个变量 x 由实数 a 变到实数 b 时，如不特别申明，总是指 x 顺序取 a , b 间的所有实数由 a 变到 b 。

全部实数可以用数轴表示出来图 1-6，因此因变量的变化也可以用数轴反映出来。

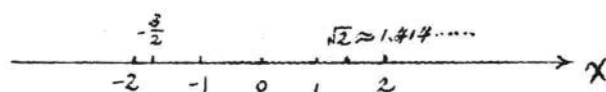


图 1-6

以二次函数 $y = x^2$ 为例，它的自变量 x 可以取全部实数。换句话说，自变量是在整个数轴上变化。而圆面积公式 $A = \pi r^2$ 它也是二次函数，但自变量 r 的值只能在正半轴上变化。

两个实数 a , b ($a < b$) 间的所有实数叫做实数的一个区间。包括端点 a , b 时叫闭区间，用记号 $[a, b]$ 表示；不包括端点 a , b 时叫开区间，用记号 (a, b) 表示。整个数轴也可以看成一个开区间，并用记号 $(-\infty, +\infty)$ 表示，但这不是说数轴有端点，数轴两头没有端点。恩格斯在《反杜林论》中说：“时间上的永恒性、空间上的无限性，本来就是，而且按照简单的字义也是：没有一个方向是有终点的，不论是向前或向后”

向上或向下，向左或向右。”就包括了数轴两头没有端点这一事实。

自变量变化的范围（多数用一个或若干区间表示）叫函数的定义域，定义域的结构要根据给定函数的特性来确定。例如：

函数	自变量变化范围	用不等式表示	用区间表示
$y = x^2$	x 可取所有实数		$(-\infty, +\infty)$
$A = \pi r^2$	r 正数	$r > 0$	$(0, +\infty)$
$S = \frac{1}{2}gt^2$	t 从0开始到来一时刻 T 为止	$0 \leq t \leq T$	$[0, T]$
$y = \sqrt{x-1}$	x 不能小于1	$x \geq 1$	$[1, +\infty)$
$y = \frac{1}{x-1}$	x 不能等于1	$x < 1$ 或 $x > 1$	$(-\infty, 1), (1, +\infty)$

比较复杂的函数常通过解不等式才能定出定义域，下面举两个例并做一些练习。

例1, $y = \sqrt{4-x^2}$

〔分析〕只有 $4-x^2 \geq 0$ ，才能有确定的实数 y 。

〔解〕 $4-x^2 \geq 0$

改写成 $x^2-4 \leq 0$

分解得 $(x+2)(x-2) \leq 0$

改写得 $[x-(-2)](x-2) \leq 0$

解得 $-2 \leq x \leq 2$ 答：定义域为 $[-2, 2]$ 。

例2, $y = \lg(x^2-4x+3)$

〔分析〕只有 $x^2-4x+3 > 0$ ，才能有确定的对数值 y 。

〔解〕分解因式得 $(x-1)(x-3) > 0$

解不等式得 $x < 1$ 或 $x > 3$

答：定义域为 $(-\infty, 1), (3, +\infty)$ 。

练习:

确定下列各函数的定义域:

$$(1) \quad y = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} \quad (2) \quad y = \sqrt{4-5x+x^2}$$

$$(3) \quad y = \lg(x^2-5x-6) \quad (4) \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

函数的定义域并非是函数理论中的重大问题,但不顾自变量的变化范围,盲目地计算,有时会出现荒谬的结论。例如:

$$y = \lg(x-2) + \lg(1-x)$$

从第一项看 $x > 2$, 从第二项看 $x < 1$, 既大于 2 又小于 1 的实数是不存在的, 因此对我们来说式是没有意义的, 当然也就不能进行任何计算。如果误用了对数的性质:

$$"\lg(x-2) + \lg(1-x) = \lg[(x-2)(1-x)]"$$

对于右边只要 $(x-2)(1-x) > 0$ 即 $1 < x < 2$ 即可。左边没有意义, 右边却是有意义的, 这是荒谬的结果。

§ 1.5 函数的特定性

数学是反映客观世界某些规律性的科学, 客观世界不断的变化, 反映客观规律的变量也就不断的变化, 变是绝对的。但为了用数学方法研究变化, 在观念上需要从不变出发, 函数也一样。

例如 $y = x^2$, 当 $x = 2$ 时, $y = 4$ 。4 这个数是在自变量静止在 2 时对应的函数值, 我们把它叫做特定值。一般地说给定函数 $f(x)$, 则自变量 x 静止在 x_0 时的函数的特定值 (简