高等数学

习题解答与自我测试

第2版

邱忠文 编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学
习题解答与自我测试
（第2版）

邱忠文　编

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是为了满足学生的学习要求，更好地学习高等数学课程而编写的。全书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、级数以及微分方程等11章的全部习题；所有习题均给出了有解题过程的解答。

本书既适于全日制普通高等理工科院校及经济、管理类院校的本科生作为高等数学课程的教学参考书，又适于网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育的大专生作为高等数学课程的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题解答与自我测试/邱忠文编．—2版．—北京：国防工业出版社，2013.5

ISBN 978-7-118-08789-5

Ⅰ.①高...　Ⅱ.①邱...　Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第086999号

※

国防工業出版社 出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048）

北京奥鑫印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 22½　**字数** 565千字

2013年5月第2版第1次印刷　**印数** 1—3000册　**定价** 40.00元

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

前 言

为了适应高等理工科院校大专生及本科生学习高等数学课程的需要，我们编写了《高等数学习题解答及自我测试》一书，作为与我们编写的《高等数学》(上、下册)课本配套使用的教学参考书.

本书是为了满足学生的学习要求，帮助同学更好地学习高等数学课程而编写的. 全书的内容基本上覆盖了现行的理工类院校高等数学(本科生)教学的内容，包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、级数以及微分方程等 11 章的全部习题；所有习题均给出了有解题过程的解答(带“ * ”的习题为参考题，“自我测试题”主要是为本科生准备的).

本书的编写和出版，得到了天津大学网络教育学院、天津大学职业教育学院和天津大学仁爱学院的大力支持和帮助，编者在此深表感谢.

参加本书编写工作的有：邱忠文、李君湘、严丽、孙秀萍、韩健、韩月丽、于桂贞等. 由于编者水平所限，书中若有疏误之处，敬请读者批评指正.

编 者

目　　录

第1章 函 数

习题 1—1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{x+2}{x^2-4}$.

解 由 $x^2-4\neq0$,有 $x\neq-2,x\neq2$. 故函数在 $x=-2$ 及 $x=2$ 无定义,知函数的定义域

$$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty).$$

(2) $y=\arcsin\frac{2x-1}{7}$.

解 由

$$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant1,$$

有

$$-7\leqslant2x-1\leqslant7,\ -6\leqslant2x\leqslant8.$$

知

$$-3\leqslant x\leqslant4.$$

故函数的定义域

$$D_f=[-3,4].$$

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$.

解 由 $\lg(x^2-3)\geqslant0$,有 $x^2-3\geqslant1$.

即

$$x^2\geqslant4,\qquad |x|\geqslant2.$$

故函数的定义域

$$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

(4) $y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\lg(1-x)}$.

解 由 $\begin{cases}x+1\geqslant0,\\1-x>0,\\x\neq0,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}x\geqslant-1,\\1>x,\\x\neq0.\end{cases}$

故函数的定义域

$$D_f=[-1,0)\cup(0,1).$$

2. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(x)$, $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,

有

$$f(x)=2(1-x^2),x\in[-1,1].$$

故

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

3. 设$f(u)$满足:$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0,u\in[1,10]$,且$f(0)=0$,求$f(x)$.

解 由$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0$,

得

$$f(\lg u)=u(1\pm\sqrt{1-\lg u})=10^{\lg u}(1\pm\sqrt{1-\lg u}).$$

由条件$f(0)=0$,可得

$$f(\lg u)=10^{\lg u}(1-\sqrt{1-\lg u}),$$

即

$$f(x)=10^x(1-\sqrt{1-x}),x\in[0,1].$$

4. 设$f(x)=\begin{cases}1+x, & 当-\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 当0<x<+\infty.\end{cases}$求$f(-2),f(0),f(5)$及$f(x-1)$.

解 $f(-2)=1+(-2)=-1$, $f(0)=1+0=1$, $f(5)=2^5=32$.

由于

$$f(x-1)=\begin{cases}1+(x-1), & -\infty<x-1\leqslant 0,\\ 2^{x-1}, & 0<x-1<+\infty,\end{cases}$$

故

$$f(x-1)=\begin{cases}x, & -\infty<x\leqslant 1,\\ 2^{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

5. 设$f(x-1)=x^2$,求$f(2x+1)$.

解 令$u=x-1$,则$x=u+1$,于是$f(u)=(u+1)^2$,

有

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2.$$

6. 设$y=\frac{x}{2}f(t-x)$,且当$x=1$时,$y=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$,求$f(x)$.

解 当$x=1$时,

$$y=\frac{1}{2}f(t-1)=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-1)^2.$$

于是

$$f(t-1)=(t-1)^2,\ f(x)=x^2.$$

7. 判定函数$f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{-x}\\&=(2-\sqrt{3})^{-x}+(2+\sqrt{3})^{-x}\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x=f(x).$$

所以$f(x)$为偶函数.

8. 求函数$f(x)=\sin^2 2x$的周期.

解 $f(x)=\sin^2 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{1}{2}[1-\cos(4x+2\pi)]$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

故知$f(x)=\sin^2 2x$以$T=\frac{\pi}{2}$为周期.

9. 求由函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$所确定的复合函数$f[f(x)]$及其定义域.

解 因为 $f(x)=\frac{1}{1+x},x\neq-1$,所以

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}\ (x\neq-1,-2).$$

*10. 求函数$y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$的定义域.

解 由$\sin\frac{\pi}{x}>0$,有$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

当$k\neq0$时,$2k<\frac{1}{x}<2k+1$,故$x\in\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$;

当$k=0$时,$0<\frac{1}{x}<1$,故$x>1$.

综上所述,可知函数的定义域

$$D_f=\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)\cup(1,+\infty),\ k\neq0,k\in\mathbf{Z}.$$

习题 1—2

1. 分析下列复合函数的复合步骤.

(1) $y=\cos^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

解 $y=u^2,u=\cos v,v=3x+\frac{\pi}{4}$.

(2) $y=\arctan\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$.

解 $y=\arctan u,u=v^{\frac{1}{3}},v=\frac{x-1}{x+1}$.

2. 验证等式$|x|=x\operatorname{sgn}x$成立.

解 当$x>0$时,$|x|=x,x\operatorname{sgn}x=x$. 等式成立;

当$x=0$时,$|0|=0,0\operatorname{sgn}0=0$. 等式也成立;

当 $x<0$ 时，$|x|=-x, x\operatorname{sgn}x=x\cdot(-1)=-x$. 等式仍然成立. 综上所证，有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

3. 证明下列等式成立.

(1) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$.

证 $\operatorname{sh}2x=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=2\cdot\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$.

(2) $\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x=e^{x}$.

证 $\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}+\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{x}+e^{x}}{2}+\dfrac{e^{-x}-e^{-x}}{2}=e^{x}$.

(3) $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$.

证 $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{x}-e^{x}}{2}+\dfrac{e^{-x}+e^{-x}}{2}=e^{-x}$.

(4) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$.

证
$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x&=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2\\&=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\&=\frac{e^{2x}-e^{2x}+e^{-2x}-e^{-2x}+4}{4}=1.\end{aligned}$$

4. 对函数 $f(x), x\in[-l,l]$，则有等式

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

指出 $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 与 $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的奇偶性.

解 因为
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\\&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(-x)+\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(-x)=f(x),\end{aligned}$$

所以等式 $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=f(x)$ 成立.

设 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

则

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),$$

知 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数. 而

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x),$$

故 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 为奇函数.

5. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{x}+a^{-x}), (a>0, a\neq1)$. 验证:

$$f(x+t)+f(x-t)=2f(x)f(t).$$

解 $2f(x)f(t)=2\times\frac{1}{2}(a^{x}+a^{-x})\cdot\frac{1}{2}(a^{t}+a^{-t})$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+t}+a^{t-x}+a^{x-t}+a^{-(x+t)})$$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+t}+a^{-(x+t)})+\frac{1}{2}(a^{x-t}+a^{-(x-t)})$$

$$=f(x+t)+f(x-t).$$

6\. 设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求$f\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

所以 $f(x)=x^2-2.$

故

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}-4.$$

7\. 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x(1+\sqrt{x^2+1})$, $(x>0)$,求$f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x(1+\sqrt{x^2+1})=x^2\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$

$$=\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

所以 $f(x)=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$, $(x>0)$.

复习题 1

1\. 填空题.

(1) 设$f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\frac{1}{x}$,则函数$f(x)$的 $D_f=$ __$[3,+\infty)$__.

提示 $\because \begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ \frac{1}{|x|}\leqslant 1.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x\geqslant 3,\\ |x|\geqslant 1.\end{cases}$

其公共解集为$x\geqslant 3$. 故 $D_f=[3,+\infty)$.

(2) 设$f(x-1)=x(x-1)$,则$f(x)=$ __$x(x+1)$__.

提示 $\because$ $f(x-1)=x(x-1)=[(x-1)+1](x-1)$,

$\therefore$ $f(x)=x(x+1)$.

(3) 函数$y=2x-1$的反函数为 __$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$__.

提示 $\because \quad y=2x-1, \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}.$

故反函数为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

(4) 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$ $(x\neq 0,1)$,则$f(2x)=$ $\underline{\frac{1}{1-2x}}$.

提示 $\because \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}},$

$\therefore \quad f(x)=\frac{1}{1-x}$,故$f(2x)=\frac{1}{1-2x}.$

(5) 设$g(x)=1+x$,且当$x\neq 0,1$时,$f[g(x)]=\frac{1-x}{x}$,则$f(x)=$ $\underline{\frac{2-x}{x-1}}$.

提示 $\because \quad f[g(x)]=f(1+x)=\frac{1-x}{x}=\frac{2-(x+1)}{(1+x)-1},$

$\therefore \quad f(x)=\frac{2-x}{x-1}.$

2. 选择题.

(1) 设$g(x)=x^2+2x$,则$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$ $(h\neq 0)$等于

(A) $(x_0+1)+2h$;　　(B) $2(x_0+1)+h$;

(C) $2x_0+h$;　　(D) $2h$.

答(B)

提示 $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2+2(x_0+h)-(x_0^2+2x_0)}{h}$

$=2(x_0+1)+h.$

故应选(B).

(2) 设$f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$,则$f(a\tan x)$等于

(A) $\frac{\cos x}{a}$;　　(B) $\frac{\sin x}{a}$;

(C) $\frac{|\cos x|}{a}$;　　(D) $\frac{|\sin x|}{a}$.

答(C)

提示 $f(a\tan x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+(a\tan x)^2}}=\frac{1}{a\sqrt{\sec^2 x}}=\frac{|\cos x|}{a}.$

故应选(C).

(3) 函数$y=\lg(x-1)$的有界区间为

(A) $(1,+\infty)$;　　(B) $(2,+\infty)$;

(C) $(1,2)$;　　(D) $(2,3)$.

答(D)

提示 因为 $\lg(x-1)$ 的定义域为 $D_f=(1,+\infty)$. 且函数在定义域内为单调增加的函数，且当 $x\in(2,3)$ 时，有

$$\lg(2-1)<\lg(x-1)<\lg(3-1),$$
$$0<\lg(x-1)<\lg 2.$$

所以 $$y=\lg(x-1) \text{ 在 } x\in(2,3) \text{ 有界}.$$

故应选(D).

(4) 若 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x}),(a>0,a\neq1)$ 的反函数为 $\varphi(x)$，则 $\varphi(1)$ 等于

(A) $\log_a(1+\sqrt{2})$；　(B) $\log_a(1-\sqrt{2})$；

(C) $\frac{1}{2}(a-a^{-1})$；　(D) $\frac{1}{2}(a+a^{-1})$.

答(A)

提示 由 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})\ (a>0,a\neq1)$，有

$$a^{2x}-2ya^x-1=0,\quad a^x=y\pm\sqrt{1+y^2}.$$

因为 $a^x>0$，所以有

$$a^x=y+\sqrt{1+y^2},\quad x=\log_a(y+\sqrt{1+y^2}).$$

所求的反函数为

$\varphi(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$. 知 $\varphi(1)=\log_a(1+\sqrt{2})$.

故应选(A).

(5) 设 $f(x)=4x^3-3x,\varphi(x)=\sin 2x$，则 $\varphi[f(x)]$ 等于

(A) $\sin(4x^3-3x)$；　(B) $4\sin^3 2x-3\sin 2x$；

(C) $\sin(8x^3-6x)$；　(D) $4\sin^3 x-3\sin x$.

答(C)

提示 $\varphi[f(x)]=\sin 2f(x)=\sin 2(4x^3-3x)=\sin(8x^3-6x)$.

故应选(C).

3. 解下列各题.

(1) 求 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域.

解 $\because$ $\begin{cases}x-1>0,\\x+1>0.\end{cases}$ 有公共解集 $x>1$.

$\therefore$ 函数 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域 $D_f=(1,+\infty)$.

(2) 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $f(3x-1)$ 的定义域.

解 $\because$ $0\leqslant 3x-1\leqslant 1$，$\therefore$ $1\leqslant 3x\leqslant 2$，

即 $$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}.$$

知函数 $f(3x-1)$ 的定义域 $D_f=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

(3) 若 $f(x)=2x+1$，求 $f(\sin x)$，$f[f(x)]$.

解 $$f(\sin x)=2(\sin x)+1=2\sin x+1,$$
$$f[f(x)]=2(2x+1)+1=4x+3.$$

(4) 若$f(x)=\ln(1+x)$, $f[\varphi(x)]=x$,求$\varphi(x)$.

解 $\because\quad f[\varphi(x)]=\ln[1+\varphi(x)]=x,$

$\therefore\quad 1+\varphi(x)=\mathrm{e}^x$,知$\varphi(x)=\mathrm{e}^x-1$.

(5) 判定函数$f(x)=\lg x$的增减性.

解 函数$f(x)=\lg x$的定义域$D_f=(0,+\infty)$. 对任意的正实数$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,当$x_2>x_1$时,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1=\lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

由于$x_2>x_1$,有$\frac{x_2}{x_1}>1$,知

$$f(x_2)-f(x_1)=\lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>\lg 1=0.$$

即 $$f(x_2)>f(x_1).$$

故函数$f(x)=\lg x$在定义域$(0,+\infty)$内是单调增加的.

(6) 判定函数$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$的奇偶性.

解 因为函数$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$的定义域为$(-1,1)$,且对任意的$x\in D_f$,有

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x).$$

所以$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$为奇函数.

4. 求下列各题的解.

(1) 设$f(\ln x)=x^2(1+\ln^2 x)$,求$f(x)$.

解 令$t=\ln x$,有$x=\mathrm{e}^t$,故有

$$f(\ln x)=f(t)=(\mathrm{e}^t)^2(1+t^2)=\mathrm{e}^{2t}(1+t^2).$$

得

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}(1+x^2).$$

(2) 设$f(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c均为常数),计算:$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$的值.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=a[(x+3)^2-3(x+2)^2+3(x+1)^2-x^2]\\&\quad+b[(x+3)-3(x+2)+3(x+1)-x]+c[1-3+3-1]\\&=a[(x+3)^2-x^2+3(x+1)^2-3(x+2)^2]+b[(x+3)-x\\&\quad+3(x+1)-3(x+2)]\\&=a(6x+9-6x-9)+b(3-3)=0.\end{aligned}$$

(3) 若$G(x)=G(-x)$,判别函数$f(x)=G(x)g(x)$的奇偶性,其中

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2} & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0.\end{cases}$$

解 $\because$ $f(0)=G(0)g(0)=0$，且当 $x\neq 0$ 时，

$$f(-x)=G(-x)g(-x)=G(x)g(-x)=G(x)\left[\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right]$$
$$=G(x)\left[\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right]=G(x)\left[-\left(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=-G(x)\left[\frac{2\cdot 2^x-2^x+1}{2(2^x-1)}\right]=-G(x)\left[\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}\right]$$
$$=-G(x)\left[\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right]=-G(x)g(x)=-f(x).$$

$\therefore$ $f(x)$ 是奇函数.

(4) 已知某个函数的图形如图 1－1 所示，写出这个函数 $y=f(x)$ 的表达式.

解 线段 OA 的方程为

$$y=\frac{3}{2}x,\quad x\in[0,10],$$

线段 AC 的方程为

$$y=-\frac{3}{2}(x-20),\quad x\in(10,20].$$

于是有函数关系

$$y=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ -\frac{3}{2}(x-20), & 10<x\leqslant 20.\end{cases}$$

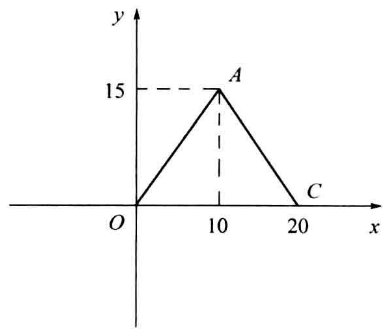

图 1－1

(5) 设 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，均有

$$f(xy)=f(x)f(y),$$

且 $f(0)\neq 0$，求 $f(x)$.

解 令 $y=0$，有 $xy=0$.

$$f(0)=f(0\cdot x)=f(0)f(x).$$

于是

$$f(0)f(x)-f(0)=f(0)[f(x)-1]=0,$$

因为 $f(0)\neq 0$，所以 $f(x)-1=0$，知

$$f(x)=1.$$

5. 试解下列各题.

(1) 在温度计上，0℃对应于 32℉，100℃对应于 212℉，求摄氏温度 y 与华氏温度 x 之间的线性函数关系.

解 设摄氏温度 y 与华氏温度 x 之间的线性函数对应关系为 $y=kx+b$. 由 0℃对应于 32℉，100℃对应于 212℉，有

$$\begin{cases}32k+b=0,\\ 212k+b=100.\end{cases}$$

知 $k=\frac{5}{9}, b=-\frac{160}{9}$. 于是

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}=\frac{5}{9}(x-32).$$

(2) 北京到上海的铁路里程为 1463km,北京到重庆的铁路里程为 2087km,利用例 2.6,求出某送递公司送递物品的到达天数.

解 设北京到上海的物品到达天数为 D_1,北京到重庆的到达天数为 D_2,则

$$D_1=2+\left|\left[\frac{500-1463}{500}\right]\right|=4(\text{天}),$$

$$D_2=2+\left|\left[\frac{500-2087}{500}\right]\right|=6(\text{天}).$$

(3) 计算出公元 2000 年元旦及公元 2008 年 6 月 1 日是星期几?

解 因为 $1999+\left[\frac{1999}{4}\right]-\left[\frac{1999}{100}\right]+\left[\frac{1999}{400}\right]+1=2484\equiv 6(\mathrm{mod}7)$.

所以公元 2000 年元旦是星期 6.

同理,公元 2008 年 6 月 1 日为星期日. 这是因为

$$2007+\left[\frac{2007}{4}\right]-\left[\frac{2007}{100}\right]+\left[\frac{2007}{400}\right]+153=2646\equiv 0(\mathrm{mod}7).$$

自我测试题 1

1. 填空题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{x+2}+\frac{1}{\lg(1-x)}$的定义域为________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{当}|x|\leqslant 2,\\ 2, & \text{当}|x|>2.\end{cases}$ 则 $f[f(3)]=$________.

(3) 设 $f(x)=\ln(1+x^2)$, $f[\varphi(x)]=1+\frac{1}{x^2}$,且 $\varphi(x)>0$,则 $\varphi(x)=$________.

(4) 函数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\sin 3x$ 的周期是________.

(5) 设 $\varphi(x)$与 $f(x)$互为反函数,则 $f\left(\frac{1}{2}x\right)$的反函数为________.

2. 选择题.

(1) 函数 $y=\lg(x^2-x-2)$的定义域为

(A) $(2,+\infty)$; (B) $(-1,2)$;

(C) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$; (D) $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

答( )

(2) 函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$是

(A) 奇函数; (B) 偶函数;

(C) 有界函数; (D) 周期函数.

答( )