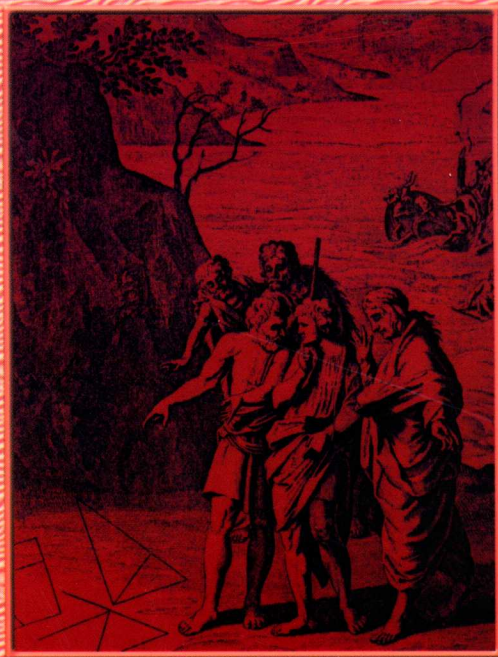


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

斯坦因豪斯问题

——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起

刘培杰 田廷彦 编著



◎ 试题的另解与推广

◎ 台球与光线的数学秘密

◎ 多边形弹子球

◎ 变分法和弹子球的伯克霍夫周期轨

◎ 长方形台球桌的问题



SEU 2663286



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

2663286

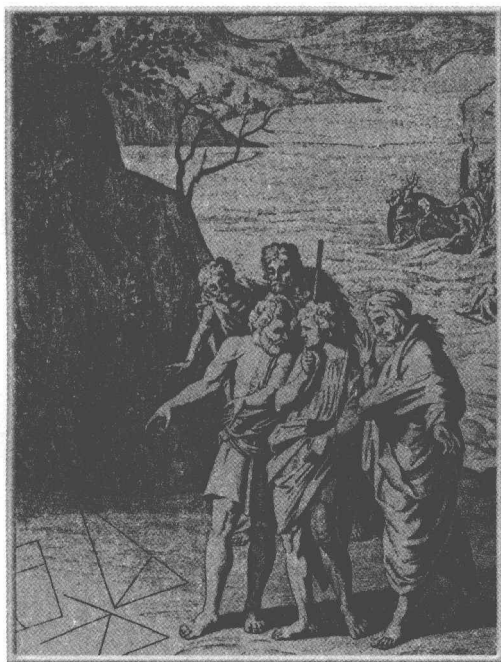
01
80

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

斯坦因豪斯问题

——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起

刘培杰 田廷彦 编著



◎ 试题的另解与推广

◎ 台球与光线的数学秘密

◎ 多边形弹子球

◎ 变分法和弹子球的伯克霍夫周期轨

◎ 长方形台球桌的问题



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

888888

内容简介

本书是从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起,进而介绍了斯坦因豪斯问题.本书共有三章,第1章斯坦因豪斯问题简介,第2章保守系统中的弹子球流,第3章变分法、扭转映射和闭测地线.

本书适合大、中学师生及数学爱好者阅读及收藏.

图书在版编目(CIP)数据

斯坦因豪斯问题:从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起/刘培杰,田廷彦编著.——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.7

ISBN 978-7-5603-3632-9

I. ①斯… II. ①刘… ②田… III. ①遍历性理论
IV. ①O177.99

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 149407 号

策划编辑 张永芹 李子江
责任编辑 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 7 字数 75 千字
版 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3632-9
定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	即将出版		
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009—11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009—01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009—05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011—02	128.00	82,83
谈谈素数	2011—03	18.00	91
平方和	2011—03	18.00	92
数论概貌	2011—03	18.00	93
代数数论	2011—03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011—02	28.00	95
超越数论基础	2011—03	28.00	96
数论初等教程	2011—03	28.00	97
数论基础	2011—03	18.00	98
数论入门	2011—03	38.00	99
数论开篇	2012—07	28.00	194
解析数论引论	2011—03	48.00	100
基础数论	2011—03	28.00	101
超越数	2011—03	18.00	109
三角和方法	2011—03	18.00	112
谈谈不定方程	2011—05	28.00	119
整数论	2011—05	38.00	120
初等数论 100 例	2011—05	18.00	122
初等数论经典例题	2012—07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012—01	138.00	144, 145
算术探索	2011—12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012—01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012—01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012—01	28.00	158
组合数学浅谈	2012—03	28.00	159
同余理论	2012—05	38.00	163
丢番图方程引论	2012—03	48.00	172



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	即将出版		
历届美国数学奥林匹克试题集	即将出版		
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012—07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—04	38.00	170

整函数	即将出版	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—05	78.00	165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012—07	48.00	190
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012—07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	即将出版		
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-08	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-08	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	即将出版		202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	即将出版		
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-07	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	即将出版		
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	即将出版		
平面凸图形与凸多面体	即将出版		
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	即将出版		
代数几何中的贝祖定理——从一道IMO试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	即将出版		
许瓦兹引理——从一道西德1981年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考试谈起	即将出版		
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	即将出版	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	即将出版		
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩—约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特—莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起·	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006—12	38.00	13
统计学专业英语	2007—03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012—07	48.00	193
幻方和魔方(第一卷)	2012—05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012—07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012—07	38.00	206

实变函数论	2012—06	78.00	181
初等微分拓扑学	2012—07	18.00	182
方程式论	2011—03	38.00	105
初级方程式论	2011—03	28.00	106
Galois 理论	2011—03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011—03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011—03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011—03	28.00	111
代数方程式论	2011—05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011—07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012—02	48.00	168
应用随机过程	2012—04	48.00	187

闵嗣鹤文集	2011—03	98.00	102
吴从忻数学活动三十年(1951~1980)	2010—07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012—01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012—01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012—01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011—12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012—03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址: <http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编: 150006

联系电话: 0451-86281378 13904613167

E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn

⊙

目

录

第1章 斯坦因豪斯问题简介 //1

- §1 命题的产生 //1
- §2 试题的另解与推广 //10
- §3 试题解法的探究 //16
- §4 台球与光线的数学秘密 //21

第2章 保守系统中的弹子球流 //32

- §1 多边形弹子球 //32
- §2 弹子球:定义和例子 //34
- §3 凸弹子球 //45

第3章 变分法、扭转映射和闭测地线 //60

- §1 变分法和弹子球的
伯克霍夫周期轨 //60
- §2 扭转映射的伯克霍夫周期轨和
奥布瑞-马瑟理论 //65
- §3 不变圆周和不稳定区域 //82

附录 长方形台球桌的问题 //88

编辑手记 //97

斯坦因豪斯问题简介

第 1 章

§ 1 命题的产生

1981 年 10 月 24 日《中国青年报》用整版登载了 1981 年的“二十五省市自治区中学数学竞赛试题及其解答”，在中学生中反响强烈，特别是对其中最后一题非常感兴趣。那么这道试题是如何产生的呢？命题者给出了自己的思路如下：

设想有一张台球桌，形状是正五边形 $ABCDE$ (图 1)。一个台球从 AB 中点 P 击出，击中 BC 边上的某一点 P'_1 ，并依次碰击 CD, DE, EA 诸边的点 P'_2, P'_3, P'_4 ，最后到达 AB 边上的点 P'_5 ，这时

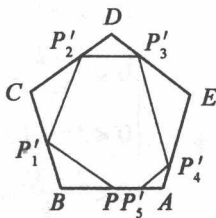


图 1

斯坦因豪斯问题

$$\triangle PBP'_1 \sim \triangle P'_2CP'_1 \sim \triangle P'_2DP'_3 \sim \triangle P'_4EP'_3 \sim \triangle P'_4AP'_5$$

所以
$$\frac{BP'_1}{BP} = \frac{CP'_1}{CP'_2} = \frac{DP'_3}{DP'_2} = \frac{EP'_3}{EP'_4} = \frac{AP'_5}{AP'_4}$$

不失一般性,可设正五边形的边长为 1,上面比例式的比值为 $2k$,易得

$$BP'_1 = k$$

$$CP'_1 = 1 - BP'_1 = 1 - k$$

$$CP'_2 = \frac{CP'_1}{2k} = \frac{1-k}{2k}$$

$$DP'_2 = 1 - CP'_2 = \frac{3k-1}{2k}$$

$$DP'_3 = 3k - 1$$

$$EP'_3 = 2 - 3k$$

$$EP'_4 = \frac{2-3k}{2k}$$

$$AP'_4 = \frac{5k-2}{2k}$$

$$AP'_5 = 5k - 2$$

除击中点 B 外,要求上述诸线段之长都必须大于 0 而小于 1,故要解下面的不等式组,以求参数 k 的取值范围

$$\begin{cases} 0 < k < 1 \\ 0 < \frac{1-k}{2k} < 1 \\ 0 < 3k-1 < 1 \\ 0 < \frac{2-3k}{2k} < 1 \\ 0 < 5k-2 < 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 0 < k < 1 \\ k > \frac{1}{3} \\ k < \frac{2}{3} \\ k > \frac{2}{5} \\ k < \frac{3}{5} \end{cases}$$

所以

$$\frac{2}{5} < k < \frac{3}{5}$$

(当最后一个式子 $0 < 5k - 2 \leq 1$ 时, 这里等号表示台球最后可击中点 B) 从 k 的范围转而求球击出的倾斜角 $\angle BPP_1' = \theta$ 的范围时, 就用到正弦定理和解简单三角方程的知识(或者用函数的增减性与反三角函数的知识), 看来它是一道简单的综合题. 可是此时感觉到, 由于正五边形的内角 $\angle PBP_1' = 108^\circ$ 不是熟知的特别角, 它增加了计算的复杂性. 于是命题者又把正五边形改为正六边形(亦可改为正八边形或正十二边形等), 其内角等于 120° (或 135° 或 150°) 是熟知的特别角, 这样就把题目确定如下:

一张台球桌, 形状是正六边形 $ABCDEF$ (图 2). 一个球从 AB 中点 P 击出, 击中 BC 边上的某点 P_1 , 并且依次碰击 CD, DE, EF, FA 各边上的点 P_2, P_3, P_4, P_5 , 最后击中 AB 边上的某一点 P_6 . 设 $\angle BPP_1 = \theta$.

1. 问 θ 等于多少度时, P_6 与 P 重合;
2. 求 θ 的取值范围;

斯坦因豪斯问题

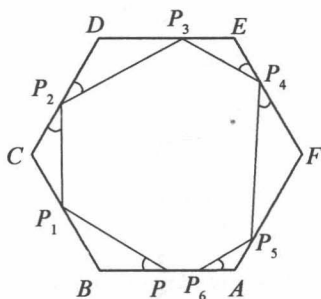


图 2

3. 求 PP_6 的长度 (可用正六边形的边长 a ——亦可取 $a=1$ ——和 θ 的三角函数的有理式来表示).

提示: 利用反射角等于入射角的原理.

第一小题是一目了然的, 它将使学生知道点 P_1 一般应在 BC 中点的附近, 这样若题目不附图形, 亦便于学生自己画图; 第二小题是本题的主要部分; 第三小题亦比较简单, 主要是求出终点的位置. 后来命题小组选用了如上的第二小题.

数学问题往往是从客观现象中抽出其空间形式和数量关系而构成的. 还可以改变问题的条件而产生新的问题, 这也是编造数学试题的途径之一.

现附原题的一种解答如下:

解 1. 因为正六边形的内角

$$\begin{aligned} \angle FAB &= \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE \\ &= \angle DEF = \angle EFA = 120^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

所以当 $\theta = 30^\circ$ 时, 从点 P 击出的球必击中 BC 的中点. 又由于反射角等于入射角, 故经反射后, 球依次击中 CD, DE, EF, FA 的中点, 最后返回点 P .

2. 设球从 AB 的中点 P 以 $\angle BPP_1 = \theta$ 的方向击出后,依次击中 BC, CD, DE, EF, FA, AB 各边上的点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. 根据反射角等于入射角及式(1),有

$$\angle BP_1P = \angle CP_1P_2 = 60^\circ - \theta$$

所以 $\triangle P_1BP \sim \triangle P_1CP_2 \Rightarrow \frac{BP_1}{BP} = \frac{CP_1}{CP_2}$

同理依次推得

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{CP_1}{CP_2} = \frac{DP_3}{DP_2} = \frac{EP_3}{EP_4} = \frac{FP_5}{FP_4} = \frac{AP_5}{AP_6} \quad (2)$$

不失一般性,设正六边形的各边长为 1,上面比例式的比值为 $2k$. 因此 $BP = \frac{1}{2}$, 所以从式(2)可得

$$BP_1 = k, CP_1 = 1 - k$$

$$CP_2 = \frac{1-k}{2k}, DP_2 = \frac{3k-1}{2k}$$

$$DP_3 = 3k - 1, EP_3 = 2 - 3k$$

$$EP_4 = \frac{2-3k}{2k}, FP_4 = \frac{5k-2}{2k}$$

$$FP_5 = 5k - 2, AP_5 = 3 - 5k$$

$$AP_6 = \frac{3-5k}{2k}$$

为了使球依次碰击各边, k 应满足不等式组

$$\begin{cases} 0 < k < 1 \\ 0 < \frac{1-k}{2k} < 1 \\ 0 < 3k-1 < 1 \\ 0 < \frac{2-3k}{2k} < 1 \\ 0 < 5k-2 < 1 \\ 0 < \frac{3-5k}{2k} \leq 1 \end{cases}$$