

初中数学概念、 思想与方法

主编 徐有标
编著 郝 澎
孙维刚
邓立言



初中数学

概念、思想与方法

主 编 徐有标
编 著 郝 澎 孙维刚 邓立言

人民邮电出版社

京 00 1, 10 1

本书可作为初中各年级学生的课外读物,也可作为初三学

内 容 提 要

本书是北京市教育科学研究所副研究员徐有标同志主编,全国著名特级教师孙维刚、教研员郝澎、邓立言老师根据国家教委颁布的《初中数学教学大纲》的要求撰写的.全书分23章,各章的主要内容有:概念、思想与方法,例题与分析,思维训练题,答案与提示.书末还有附录.

本书内容丰富、结构新颖、层次清楚,具有一定的科学性和实用性,是初中各年级学生的一本较好的课外读物,也是初三毕业生的一本较理想的复习用书.

初中数学概念、思想与方法

Chuzhong Shuxue Gainian Sixiang Yu Fangfa

主 编 徐有标
编 著 郝 澎 孙维刚 邓立言
责任编辑 赵桂珍

*

人民邮电出版社出版发行
北京东长安街27号
中国铁道出版社印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所经销

*

开本:787×1092 1/32 1990年12月 第一版
印张:13 20/32 页数:218 1990年12月 北京第1次印刷
字数:310千字 印数:1—10 500册
ISBN7-115-04196-2/G·017
定价:4.90元

前 言

为了使广大初中学生学好数学,我们在多年的教学实践和教学研究的基础上,根据国家教委颁布的《初中数学教学大纲》的要求,撰写了这本《初中数学概念、思想与方法》一书。

学习数学最重要的是要把数学概念理解好、数学思想和数学方法掌握好,要有适量的进行各种类型的解题实践.本书是根据上述的这一指导思想,进行选材和编排的.各章的内容是按如下层次展开的.

一、概念、思想与方法.讲的是这些概念的实质是什么,怎样理解好这些概念.运用这些概念时,要注意些什么作了通俗易懂的叙述.并对主要的数学思想做了提炼和概括,对主要的数学方法进行了总结和归纳.

二、例题与分析.通过例题与分析,其目的是让同学们了解,作者是如何运用数学概念、数学思想和数学方法来解决数学问题的.一方面让同学们体会一下掌握数学概念、思想、方法的重要性,另一方面给同学们提供解题的思维模式,以便模仿.

三、思维训练题.为了满足同学们的需要,有利于进行数学解题实践,我们编撰了两组习题:概念题和基本题.如果同学们能够做完这两组习题,说明你的数学水平是很不错的了.

四、答案与提示.同学们在解题实践中,解答的是否正确,可以对照我们提供的答案,这样,即使你身边没有老师,你照样可以判断是非。

本书可作为初中各年级学生的课外读物,也可作为初三毕

目 录

08	一元二次方程	1
09		1
10		1
11		1
12		1
13		1
14		1
15		1
16		1
17		1
18		1
19		1
20		1
21		1
22		1
23		1
24		1
25		1
26		1
27		1
28		1
29		1
30		1
31		1
32		1
33		1
34		1
35		1
36		1
37		1
38		1
39		1
40		1
41		1
42		1
43		1
44		1
45		1
46		1
47		1
48		1
49		1
50		1
51		1
52		1
53		1
54		1
55		1
56		1
57		1
58		1
59		1
60		1
61		1
62		1
63		1
64		1
65		1
66		1
67		1
68		1
69		1
70		1
71		1
72		1
73		1
74		1
75		1
76		1
77		1
78		1
79		1
80		1
81		1
82		1
83		1
84		1
85		1
86		1
87		1
88		1
89		1
90		1
91		1
92		1
93		1
94		1
95		1
96		1
97		1
98		1
99		1
100		1

三、思维训练题	86
四、答案与提示	90
第六章 整式的乘除	93
一、概念、思想与方法	93
二、例题与分析	99
三、思维训练题	106
四、答案与提示	109
第七章 因式分解	111
一、概念、思想与方法	111
二、例题与分析	116
三、思维训练题	120
四、答案与提示	122
第八章 分式	124
一、概念、思想与方法	124
二、例题与分析	130
三、思维训练题	136
四、答案与提示	141
第九章 数的开方	144
一、概念、思想与方法	144
二、例题与分析	149
三、思维训练题	157
四、答案与提示	159
第十章 二次根式	162
一、概念、思想与方法	162
二、例题与分析	166
三、思维训练题	172
四、答案与提示	176

第十一章 一元二次方程	179
一、概念、思想与方法.....	179
二、例题与分析.....	198
三、思维训练题.....	202
四、答案与提示.....	205
第十二章 指数	208
一、概念、思想与方法.....	208
二、例题与分析.....	213
三、思维训练题.....	219
四、答案与提示.....	221
第十三章 常用对数	224
一、概念、思想与方法.....	224
二、例题与分析.....	230
三、思维训练题.....	235
四、答案与提示.....	240
第十四章 函数及其图象	243
一、概念、思想与方法.....	243
二、例题与分析.....	251
三、思维训练题.....	262
四、答案与提示.....	268
第十五章 解三角形	270
一、概念、思想与方法.....	270
二、例题与分析.....	280
三、思维训练题.....	286
四、答案与提示.....	291
第十六章 统计初步	294
一、概念、思想与方法.....	294

二、例题与分析	297
三、思维训练题	302
四、答案与提示	305
第十七章 基本概念	308
一、概念、思想与方法	308
二、例题与分析	311
三、思维训练题	314
四、答案与提示	318
第十八章 相交线、平行线	320
一、概念、思想与方法	320
二、例题与分析	328
三、思维训练题	331
四、答案与提示	337
第十九章 三角形	339
一、概念、思想与方法	339
二、例题与分析	347
三、思维训练题	352
四、答案与提示	356
第二十章 四边形	359
一、概念、思想与方法	359
二、例题与分析	365
三、思维训练题	370
四、答案与提示	373
第二十一章 面积、勾股定理	375
一、概念、思想与方法	375
二、例题与分析	378
三、思维训练题	383

四、答案与提示	386
第二十二章 相似形	388
一、概念、思想与方法	388
二、例题与分析	394
三、思维训练题	400
四、答案与提示	404
第二十三章 圆	406
一、概念、思想与方法	406
二、例题与分析	408
三、思维训练题	412
四、答案与提示	415
附录 命题、点的轨迹、反证法	417
一、概念、思想与方法	417
二、例题与分析	419
三、思维训练题	423
四、答案与提示	423

按照定义,看有理数是由整数和分数组成的,可以用下面的结论来

如果从有理数引入的过程来考虑,那么有理数是在小学所学算术数(正有理数和零)的基础上扩充而来的。由于整数引入,按着正数发展为有理数,从这个角度来看,有理数是由正有理数,零和负有理数三部分组成的。

第一章 有理数

一、概念、思想与方法

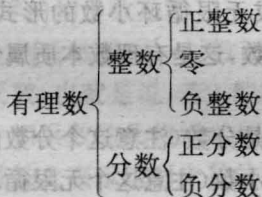
1. 概念与理解

本章的主要内容有两部分：一部分是与有理数有关的概念；另一部分是有理数的运算。就概念而言，主要有以下几个。

(1) 有理数

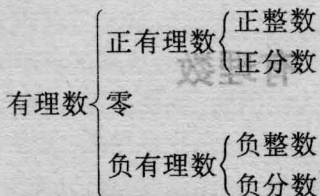
整数和分数统称为有理数。

对有理数的理解首先应从定义出发。课本中有理数的定义采用了外延定义法，也就是把组成有理数的各部分都一一列出。按照定义，有理数是由整数和分数组成的，可以用下面的结构来表示：



如果从有理数引入的过程来考虑，那么有理数是在小学所学算术数（正有理数和零）的基础上扩充而来的。由于负数的引入，使算术数发展为有理数。从这个角度来考虑，有理数是由正有理数，零和负有理数三部分构成的，可以用下面的结构来表

示:



这种分类的方法比前一种方法好. 它揭示出有理数与算术数的区别, 突出了负有理数, 强调了零在有理数中的地位. 零虽是一个数, 却占一类, 它是非正非负的有理数, 是正与负的分界点. 这种分类法还将为初二学生学习实数的分类打下基础, 两者是一致的.

有理数的本质属性是什么? 所谓本质属性就是区别于其他事物的属性. 对有理数而言, 任何一个有理数都可以化成 $\frac{n}{m}$ (其中 m, n 为整数, $m \neq 0, m, n$ 互质) 的形式, 而任何一个形如 $\frac{n}{m}$ 的数也都是有理数. 这是有理数区别于其他数的一个本质属性.

我们知道, 分数又都可以化为有限小数或无限循环小数的形式. 我们把整数和有限小数看作以零为循环节的循环小数的话, 那么任何一个有理数都可以写成无限循环小数的形式. 反之, 无限循环小数也都可以化成有理数, 这是有理数本质属性的另一种表现.

因此, 有时我们可以说有有理数就是分数 (注意这个分数的含意), 也可以说, 有理数就是无限循环小数 (注意这个无限循环小数的含意).

我们学习了有理数, 若笼统地说“正数”、“负数”时, 则一般是指“正有理数”, “负有理数”. 为了不引起混乱, 最好还是用“正有理数”, “负有理数”来明确表示.

有时我们要用到非负有理数的概念,一般非负有理数是指正有理数和零.

(2) 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

数轴是用来表示数的直线.我们可以把每一个有理数用数轴上的一个点来表示.有了数轴以后,我们可以借助于它把有理数与数轴上的点对应起来,可以直观地研究有理数的其他性质,如相反数,绝对值等.

在本章中学习了有理数,我们只知道每一个有理数都可以用数轴上的一个点来表示,但数轴上的每一个点却不一定都表示有理数.到初二学完实数,我们就会明白,数轴上的点与实数是一一对应的.

数轴是研究“数”与“形”关系的初始工具,为以后学习直角坐标系打下基础,从而使数学所研究的数量关系与空间形式联系起来.

画数轴时一定要标出正方向、原点和单位.

(3) 相反数

只有符号不同的两个数,我们说其中一个是另一个的相反数.零的相反数是零.

相反数是指一对数而言的.因此我们常说两个有理数互为相反数,也就是说,若 a 的相反数是 b ,那么 b 的相反数也是 a .

相反数的几何意义是:若两个数互为相反数(不是零),那么在数轴上表示这两个数的点,分别在原点的两旁,且离开原点的距离相等.

注意,在定义中“符号不同的两个数”没有包括零在内,因此补充规定“零的相反数是零”是必要的.

我们学习了绝对值的概念以后,再来体会相反数的概念就

会明白,相反数的概念应该包括两层意思:一是符号相反(零除外),二是绝对值相等.如果说成“符号不同的两个数互为相反数”就错了.如 -3.5 与 $+2$ 的符号不同,但它们并不互为相反数.

(4)绝对值

一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的相反数是零.

绝对值的几何意义是:一个数的绝对值就是数轴上表示这个数的点离开原点的距离.

绝对值是本章中的一个重要概念,也是较难理解的一个概念.我们应该掌握住它的本质属性.从定义中我们可以分析出,任何有理数的绝对值都不可能是负数.在有理数中,绝对值最小的数是零,最小的绝对值也是零,因此若用 a 表示任意一个有理数的话,那么永远有 $|a| \geq 0$.任意有理数的绝对值都是非负有理数.绝对值的非负性是它的本质属性.

已知一个有理数,求它的绝对值,可以由定义直接求出.反过来,若已知一个有理数的绝对值,求这个有理数时,要注意一般有两个值,因为 $|+5|=5$, $|-5|=5$,所以绝对值等于5的数有两个,它们是 ± 5 .

(5)倒数

1除以一个数的商,叫做这个数的倒数.倒数的概念也是指一对有理数而言的.因此我们常说一对有理数互为倒数,也就是说,若 a 的倒数是 b ,那么 b 的倒数也是 a .

倒数的概念还可以用另一种方法来叙述:如果两个数的乘积等于1,则称这两个数互为倒数.这两种说法本质上是一样的.

注意,零不能做除数,因此零没有倒数.

(6)乘方和幂

求 n 个相同因数的积的运算,叫做乘方.乘方的结果叫做幂.在 a^n 中, a 叫做底数, n 叫做指数.

乘方是作为一种运算出现的,是这一章里学习的新运算.这样,和已经学过的加、减、乘、除运算放在一起,就已经学过了五种运算.我们把加、减称做一级运算,乘、除称做二级运算,乘方、开方(初二时学)称做三级运算.在进行混合运算时,运算顺序应该由高级向低级进行.

乘方的定义就是指 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}}$,其中 n 是大于 1 的自然数.今后我们还要继续学习幂的运算法则,它们都是在此基础上得到的.

2. 思想与方法

(1)转化的思想

转化的思想是辩证法的基本思想.它是指任何事物在一定条件下都可以向其他方面转化.在学习数学的过程中,转化的思想是一个重要的思想,如从形到数,从数到形,从繁到简,从已知到未知等等.转化的方法和手段也较多,在本章中,学习有理数运算时,遇到了以下两个转化.

①加与减的转化

根据有理数的减法法则,减去一个数,等于加上这个数的相反数,这样就把减法运算转化为加法运算来进行了.转化的条件是将减数变为它的相反数.进行了这种转化以后,加法和减法就都统一成了加法.在算式 $20 - 5 + 3 - 7$ 中,符号“+”既可以理解为“正”,也可以理解为“加”;符号“-”既可以理解为“负”,也可

以理解为“减”。在这种转化和统一的过程中,我们发现同一个符号“-”有三种不同的含意,它可以是运算符号,表示“减”;也可以是性质符号,表示“负”;还可以表示一个数的相反数, $-(-3)$ 就可以读做“-3的相反数”。

②乘与除的转化

有理数的除法法则说的是,“两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除,零除以任何一个不等于零的数都得零。”但当我们使用“一个数除以另一个数,等于被除数乘以除数的倒数”之后,就可以把除法运算转化为乘法运算,转化的条件是将除数变为它的倒数,进行这种转化以后,乘法和除法就都统一成了乘法。

(2)简算的方法

这一章对同学们能力的要求可以说主要是运算能力,对运算能力的要求,不光是要会算,要算对,而且要知道算理和算法。也就是说,每进行一步计算,要知道根据是什么,在计算时要选择最简单的计算方法,通过这样的训练才能逐步形成运算能力。

在进行有理数的运算时,用到的根据主要有以下几条:

①运算法则:包括有理数加、减、乘、除、乘方的法则。

②运算律:

加法交换律 $a+b=b+a$;

加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$;

乘法交换律 $ab=ba$;

乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$;

分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 。

③运算顺序:先算乘方,再算乘除,最后算加减,如果有括号,就先算括号里面的。

简算的方法不能一概而论,应该具体问题具体分析,一般可

以从以下几方面考虑.

- ① 加减混合运算时, 同号的放在一起进行较简单;
- ② 乘除混合运算时, 都转化为乘法进行较简单;
- ③ 对含有分数的加减运算, 先进行同分母的运算较简单;
- ④ 在几个乘积中, 若含有相同的因数, 那么求这几个乘积的和时, 逆用分配律进行较简单.

二、例题与分析

1. 选择题

例 1

(1) 零是 ()

(A) 正数; (B) 最小的数;

(C) 自然数; (D) 有理数.

(2) 零是 ()

(A) 奇数; (B) 偶数;

(C) 质数; (D) 合数.

分析: (1) 零不是正数也不是负数, 因此(A)不正确. 在算术数中, 零是最小的数, 但在有理数中, 负数都比零小, 因此零不是最小的数, 在有理数中没有最小的数, 因此(B)也不对. 零不是自然数, 最小的自然数是 1, 因此(C)也不对.

应选择(D), 零是有理数.

(2) 我们可以把小学学过的奇数、偶数的概念加以扩充, 把能被 2 整除的整数叫做偶数, 不能被 2 整除的整数叫做奇数. 这样又可以把整数分为奇数与偶数两大部分. 而奇数又分为正奇