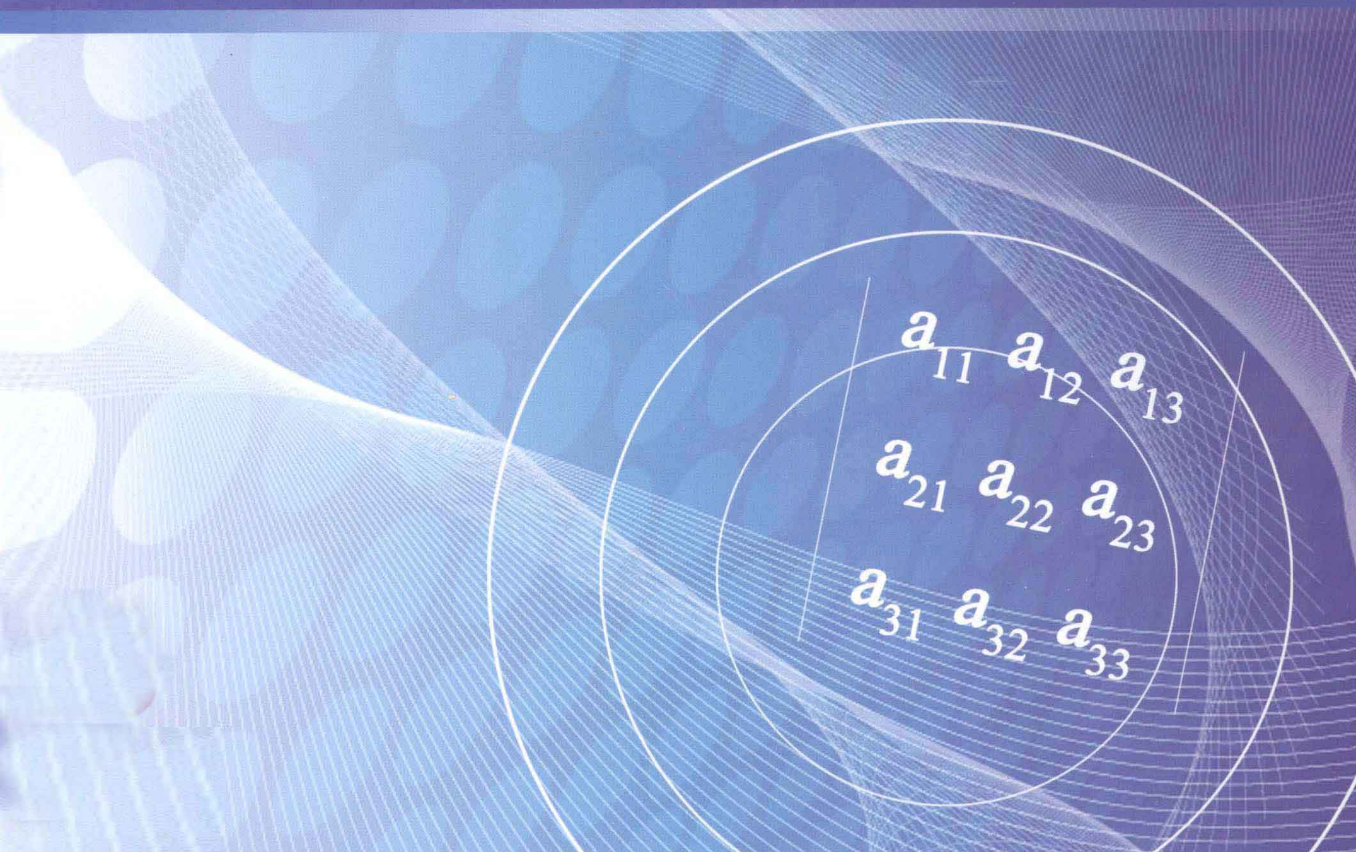
南京大学·大学数学系列

线性代数讲义

江惠坤　邵　荣　范红军　编



科学出版社

南京大学·大学数学系列

线性代数讲义

江惠坤　邵　荣　范红军　编

科学出版社
北　京

内容简介

本书内容包括行列式、矩阵和向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量以及矩阵的对角化、实二次型、线性空间与线性变换、内积空间. 本书作为大学数学的教材和参考书, 力求内容系统完整, 叙述简明, 推理详尽, 将抽象理论与具体例子相结合, 便于读者自学. 除系统介绍各个知识点的概念和有关性质以外, 还给出有代表性的例子并配有适量的习题. 附录中提供了计算线性代数问题的 Matlab 实验以及各章部分习题的答案或提示.

本书可用作高等院校非数学专业线性代数课程教材和参考书, 也可供相关人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数讲义/江惠坤, 邵荣, 范红军编. —北京: 科学出版社, 2013

南京大学·大学数学系列

ISBN 978-7-03-037986-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①江… ②邵… ③范… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 135995 号

责任编辑: 黄 海 顾 艳/责任校对: 韩 杨
责任印制: 赵德静/封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2013 年 6 月第一次印刷 印张: 15 1/4
字数: 362 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

本书是根据南京大学公共数学第一层次的线性代数教材经多次修改而成. 内容是介绍线性代数的基础理论和基本演算方法，除了涵盖全国研究生入学统一考试对线性代数所要求的全部内容外，还包括线性空间和内积空间的基本内容，以满足对线性代数知识有较高要求的读者之需.

本书作为大学数学的教材和教学参考书，力求内容系统完整，叙述简明，推理详尽，将抽象理论与具体例子相结合，便于读者自学. 除系统介绍各个知识点的概念和有关性质以外，还给出有代表性的例子并配有适量的习题. 全书共分 7 章，前 5 章介绍线性代数的基本内容，第 6、第 7 章介绍抽象性较强的线性空间和内积空间的基本内容。在成书过程中，我们做了如下的考虑和安排：

第 1 章，将二、三阶行列式单列一节，以方便应用. 对 n 阶行列式，我们给出基于余子式和基于逆序数的两种定义，但本书全程采用第一种定义，对各个行列式性质给出了依据第一种定义的详细证明. 第 2 章，系统地介绍了有关矩阵和向量的各种概念、基本运算以及丰富的性质、方法和结果，使之成为研究多元问题的有力的运算工具. 第 3 章，详细地讨论了解一般线性方程组的问题，给出了高斯消元法的矩阵表示，即应用矩阵的 LU 分解去求解线性方程组，还简单介绍了具有实际应用背景的最小二乘法. 第 4 章，详细地讨论了特征值、特征向量、矩阵对角化问题，还介绍了矩阵的奇异值分解和若尔当标准形以及矩阵对角化在解微分方程中的一个应用. 第 5 章，讨论了实二次型的有关内容. 第 6 章，系统介绍了抽象的线性空间和线性变换概念、性质和处理方法. 第 7 章，介绍了内积空间的基本内容, 特别对欧氏空间和酉空间上的重要结果给予以较为详细的讨论. 书后我们给出各章习题的答案或提示，附录中还介绍了应用 Matlab 软件解决线性代数问题的使用方法.

由于水平、能力所限，不当之处在所难免，希望同行、专家和广大读者批评指正.

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是一个非常有用的数学工具, 不仅在数学的各个分支中要用它, 而且在数学以外的学科也经常用到它. 行列式更是线性代数中的一个基本内容和基本工具. 本章在介绍二、三阶行列式的基础上, 归纳给出一般 n 阶行列式的定义, 讨论行列式的基本性质, 给出它们在解线性方程组中的应用.

1.1　二阶与三阶行列式

本节内容是下一节内容的特例. 鉴于本节内容被应用的频率很高, 所以本书特别将其单独列出, 以应实际需要.

1.1.1　二阶行列式, 二元一次方程组

本节通过解线性方程组引进二阶行列式的概念及应用.

设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解. 为消去未知数 x_2, 两式分别乘以 a_{22}, a_{12} 得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}, \end{cases}$$

然后两式相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1.2}$$

同样, 消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}, \tag{1.3}$$

于是, 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 有唯一的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

这就是一般二元线性方程组 (1.1) 的求解公式. 为了便于记忆这个公式, 我们引进新的记号来表示结果 (1.4).

定义 1.1.1 (二阶行列式)　将 4 个可以进行乘法与加法运算的元素 a, b, c, d 排成两行两列, 引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.5}$$

并称之为**二阶行列式**. 行列式也可简记为 Δ、D 等.

从定义可以看出: 二阶行列式实际上是一个算式, 即从左上角到右下角的对角线 (主对角线) 上两元素相乘之后, 减去从右上角到左下角的对角线 (副对角线) 上两元素的乘积, 称之为计算二阶行列式的对角线法则.

注　这里 a,b,c,d 都是数，该行列式的计算结果就是一个数. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2.$$

这样, 方程组 (1.1) 的求解结果 (1.4) 就有下述便于记忆的形式: 记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $\Delta \neq 0$ 时, 则

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.6}$$

记忆方法:

(1) x_1, x_2 的分母相同, 其行列式由 (1.1) 中未知元系数按其原有的相对位置排成, 称为方程组 (1.1) 的系数行列式.

(2) x_1, x_2 的分子不同, 分别是把分母行列式中 x_1, x_2 的系数所在位置换成两个常数项, 并保持两数原有的上、下相对位置.

公式 (1.6) 要求 $\Delta \neq 0$, 当 $\Delta = 0$ 情形又如何呢? 式 (1.2) 和 (1.3) 可以写为

$$x_1\Delta = \Delta_1, \quad x_2\Delta = \Delta_2.$$

如果 $\Delta = 0$, 而 Δ_1, Δ_2 不都为零, 则无论 x_1 和 x_2 取什么值, 上面两式都不能同时成立, 故此时方程组 (1.1) 无解.

如果 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, 即同时成立

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0.$$

于是

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}.$$

因而方程组 (1.1) 中的一个方程可由另一个方程乘以适当常数得到, 两个方程实质上成了一个方程, 但未知数却是两个, 因而方程组有无穷多组解.

综上所述, 可得

定理 1.1.1　对方程组 (1.1) 有如下结论:

(1) 若 $\Delta \neq 0$, 则方程组 (1.1) 有唯一的解: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

(2) 若 $\Delta = 0$, 但 Δ_1, Δ_2 不全为零, 则方程组 (1.1) 无解.

(3) 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, 则方程组 (1.1) 有无穷多组解.

例 1.1.1　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$$

解　因系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0.$$

故方程组有唯一的一组解:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-8}{-4} = 2, \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-4}{-4} = 1.$$ □

例 1.1.2　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

故方程组有无穷多组解. 实际上, 方程组只含有一个方程 $x_1 + 2x_2 = -1$. 由此可知, 方程的解可表为 $x_1 = -(2x_2 + 1), x_2$ 可取任意值. □

例 1.1.3　讨论方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 4, \\ 6x_1 + 10x_2 = 2, \end{cases}$$

是否有解.

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

可见方程组无解. 事实上第一个方程与第二个方程是矛盾的. □

含有矛盾的方程的方程组称为**不相容的方程组**.

1.1.2　三阶行列式

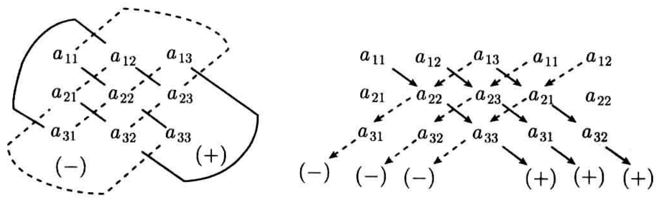
现在我们来推广 1.1.1 的结果

定义 1.1.2 (三阶行列式)　设有 9 个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{array} \tag{1.7}$$

并称之为**三阶行列式**，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为该行列式的元素.

上述定义表明三阶行列式是由 6 个积的代数和构成, 每项都是不同行不同列的 3 个元素的乘积, 这 6 项及所带的符号可按下图所示对角线法则记忆:



凡用实线连接的三个数的积, 均冠以正号, 凡以虚线相连的三个数的积, 均冠以负号.

例如:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot 2\cdot 2 - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot(-2) \\ &= 2+0+4-8+0+6 = 4. \end{aligned}$$

利用二阶行列式的定义, (1.7) 的右端可以变形为

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因此上述三阶行列式的值, 也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

用公式 (1.8) 计算三阶行列式的值称为按行列式的第一行展开. **其规则是**: 首先式 (1.8) 右端的三项是三阶行列式中第一行的三个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 分别乘以一个二阶行列式, 而这个二阶行列式是划去该元素所在的行与所在的列后留下的 4 个元素保持原有相对位置所组成; 其次, 每一项之前都要乘以 $(-1)^{1+j}$, 而 1 和 j 是 a_{1j} 的行标和列标. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8-4=4.$$

两种算法算出的结果相同.

类似地, 三阶行列式的值可以按第三行展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

读者不妨验证计算行列式的值是可以按任何一行或任何一列展开.

以下给出的是空间解析几何中用到的三阶行列式的四条基本性质:

(i) 若行列式的某两行 (列) 的对应元素成比例，则该行列式的值为 0.

(ii) 若行列式的某一行拆成两行元素之和，则该行列式可拆成两个行列式之和. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(iii) 行列式中任一行的公因子可以提出成为该行列式的因子. 例如:

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(iv) 两行 (列) 元素交换后，行列式的值差一个负号. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

现在, 将三阶行列式应用于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组 (1.9) 的系数行列式. 类似于二元一次方程组, 在 (1.9) 的 3 个方程中, 以常数项 b_1, b_2, b_3 分别代替 x_1, x_2, x_3 的系数得到行列式:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

有如下结论:

定理 1.1.2 *对方程组 (1.9), 有*

(1) 若 $\Delta \neq 0$, 则方程组 (1.9) 有唯一解 $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

(2) 若 $\Delta = 0$, 而 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为 0, 则方程组 (1.9) 无解.

(3) 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, 则方程组 (1.9) 可能无解也可能有无穷多组解.

例 1.1.4 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

解 因系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

故方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{11}{8},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{9}{8},$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}.$$

□

例 1.1.5 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

解 显然, 4 个行列式均为零, 即 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. 而方程组与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ 同解, 因此原方程组有无穷多组解, 其解可表示为: $x_1 = 1 - 2x_2 - x_3$, 其中 x_2, x_3 可取任意值. □

例 1.1.6　解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$$

解　易知系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

且

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

但该方程组无解, 因为方程组的三个方程是矛盾的. □

注　这个例子说明, 三元线性方程组与二元线性方程组的情况不同! 它不能用四个行列式的值都为零去判定方程组有无穷多组解. 本书将在第 3 章中详细讨论判定 n 元线性方程组有解无解的一般方法.

显然可以看出, 对于未知数个数等于方程个数的二、三元线性方程组利用行列式这个工具来求解 (如果有解) 十分简便, 结果也容易记忆. 我们自然联想到对未知数个数等于方程个数的 n 元 $(n>3)$ 线性方程组的求解, 是否也有类似的结果呢? 直接检验便可发现: 四阶和四阶以上的行列式如果沿用 "对角线法则" 来定义, 那么, 它们将失去二阶和三阶行列式的主要性质, 也没有类似于二阶、三阶行列式的应用 (二、三元线性方程组的求解公式). 但可以用按行 (或列) 展开的方法来定义更高阶的行列式. 下面我们用递归方法给出 n 阶行列式的定义并讨论它们的一般性质和应用.

1.2　n 阶行列式

1.2.1　n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 (n 阶行列式)　设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列，引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称它为n **阶行列式**，它是一个算式，有时也用记号 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 表示这个 n 阶行列式. 其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为该行列式的元素，其第一个足标 i 表示该元素在第 i 行，其第二个足标 j 表示该元素在第 j 列. 在本课程中，行列式的元素都是数 (实数或复数)，这时行列式是一个数值，该数值可归纳定义如下:

当 $n=1$ 时, 一阶行列式的值定义为 $D_1=\det(a_{11})=a_{11}$. 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.10}$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

而

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

并称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**. 显然 M_{ij} 为一个 $n-1$ 阶的行列式, 它是在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的一个行列式.

由于 M_{1j} 是划去 D_n 中第一行元素 a_{1j} 所在行与列的元素后得到的余子式 ($j=1,2,\cdots,n$), 因而 A_{1j} 是 D_n 的第一行诸元素 a_{1j} 所对应的代数余子式. 按这一规则求行列式的值, 我们也称式 (1.10) 为行列式 D_n**按第一行的展开式**, 即行列式值等于它的第一行诸元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

今后, 用 A、B、C 等大写字母表示行列式 (1.10), 也表示它的值. 例如,

$$A=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}\quad(n>1).$$

从定义 1.2.1 可见, 行列式这个算式是由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的若干乘积构成的代数和式. 与二、三阶行列式类似, n 阶行列式的展开式 (1.10) 中共有 $n!$ 项, 每一项都是 D_n 的不同行不同列的 n个元素的乘积, 并且在所有的 n 项中, 带正号的项和带负号的项各占一半 ($\dfrac{n!}{2}$, 可根据定义, 用数学归纳法证明, 留给读者).

定义 1.2.1 是基于"余子式"的一种行列式定义, 下面介绍与之等价的基于"逆序数"的另一种行列式定义. 先介绍逆序数的概念.

把 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数按任意固定的顺序排成一排, 每一种这样的排法称作一个n**元排列**. 显然, 这 n 个数共有 $n!$ 个 n 元排列. 按照自然顺序排成的排列 $1,2,\cdots,n$ 称为**自然排列**. 如果在排列 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 中有 s_i 排在 s_j 的前面, 但 $s_i>s_j$, 则这一对数与自然排列的顺序相反, 我们称这一对数 s_i,s_j 是排列 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的一个**逆序**. 一个排列中的所有逆序的个数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的逆序数记为 $\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)$. 于是有

$\tau(1,2,\cdots,n)=0$,

$\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)=$ (s_1 后面比s_1 小的数的个数) + (s_2 后面比s_2 小的数的个数) $+\cdots+$ (s_{n-1} 后面比s_{n-1} 小的数的个数). 例如,

$\tau(1,4,3,2)=3, \tau(4,3,2,1)=6,\ \tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\dfrac{n(n-1)}{2}.$

定义 1.2.2(基于逆序数的 n 阶行列式) 设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列，引用记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称它为n **阶行列式**，它是一个算式，其结果定义为

$$D_n=\sum_{s_1,s_2,\cdots,s_n}(-1)^{\tau(s_1,s_2,\cdots,s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}.$$

其中，$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 取遍 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列，$\sum$ 是对这 $n!$ 个排列求和. 容易发现，和式中的 $n!$ 项在不计正负号的情况下，其实是取遍在不同行不同列的 n 个元素的乘积.

可以证明定义1.2.2 与定义1.2.1 是等价的，但需要较多篇幅，此处从略. 本书全程采用基于“余子式”的行列式定义.

例 1.2.1 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

之值.

解 按定义 1.2.1

$$\begin{aligned} A=&-2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ =&\,28-12+15=31. \end{aligned}$$

□

例 1.2.2 以下行列式称为下三角行列式 (当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$, 即主对角线上方的元素全为 0), 按定义计算其值

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$
\begin{aligned}
A &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.
\end{aligned}
$$

□

同样可计算上三角行列式 (当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$, 即主对角线下方的元素全为 0)

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

特别地, 对角行列式 (当 $i\neq j$ 时, $a_{ij}=0$, 即主对角线以外的元素全为 0)

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

由此可知三角行列式的值为主对角线上元素的乘积.

对一般行列式, 按照行列式的递推定义来计算通常是很烦琐甚至是不可行的. 因此我们有必要讨论行列式的性质, 利用这些性质去简化计算.

定义 1.2.3 (转置行列式)　设

$$
A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

我们称 A' 为行列式 A 的**转置行列式**. 显然, A' 是行列式 A 的行与列互换之后所得的行列式. 通常 A 的转置行列式也用 A^{T} 来表示.

1.2.2　n 阶行列式的性质

定理 1.2.1　*行列式与它的转置行列式的值相等.*

证明　先证明行列式可以按它的第一列展开，即设 $A=|a_{ij}|_{n\times n}$, 证明 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}$.

事实上，我们可以对行列式的阶 n 用归纳法. $n=2$ 时结论显然成立；现假设结论对 $n-1$ 阶行列式都成立，考察

$$
A = a_{11}M_{11} + \sum_{k=2}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}, \tag{1.11}
$$