北大燕园

2011年 李永乐·李正元

考研数学⑪

数学

数学二

【理工类】

最后冲刺 超越135分

● 主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 刘西垣

国家行政学院出版社

2011年李永乐·李正元考研数学⑪

数学最后冲刺
超越135分

【理工类】数学二

主　编　清华大学　李永乐
　　　　北京大学　李正元
　　　　北京大学　刘西垣

编　者　（以姓氏笔画为序）
　　　　北京大学　刘西垣
　　　　北京大学　李正元
　　　　清华大学　李永乐
　　　　北京大学　范培华
　　　　中国人民大学　袁荫棠

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学最后冲刺超越135分.理工类.数学.2/李永乐等主编.
-北京:国家行政学院出版社,2005
ISBN 978-7-80140-435-0

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第121973号

书　　名	数学最后冲刺超越135分[理工类·数学二]
作　　者	李永乐　李正元　刘西垣
责任编辑	李锦慧
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话	(010)82771887
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2010年10月第6版
印　　次	2010年10月第1次印刷
开　　本	787毫米×1092毫米　16开
印　　张	10
字　　数	260千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-435-0/O·38
定　　价	16.00元

前　　言

（一）

《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》是《**考研数学复习全书**》、《**考研数学全真模拟经典 400 题**》的姊妹篇。已先期出版的《**考研数学复习全书**》为考生第阶段复习用书，主要使考生全面、系统地掌握考纲所要求的基本概念、基本定理、基本公式和基本方法；《**考研数学全真模拟经典 400 题**》为考生第二阶段训练用书，主要使考生更好地提高数学水平，检查第一阶段对数学基本概念、公式、定理及运算法则的复习效果，查漏补缺，积累临场经验。而对 2011 年考研数学的命题预测、常考题型的解题思路与方法的归纳总结、网络化的知识体系的梳理，则是本书即《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》的宗旨和使命，也是本书的价值所在。

（二）

从历年考研数学试题可以看出，数学科考试注重能力的考查，试题提高了对解决问题的能力的要求，增加思考量，控制计算量，要求考生抓住问题的实质，对试题提供的信息进行分捡、组合、加工，寻找解决问题的方法。因此命题者在命制试题时，(1)**尽量避免刻板、繁难和偏怪的试题，避免死记硬背的内容和繁琐的计算**；(2)**设计不同解题思想层次的试题，使善于知识迁移和运用思维块简缩思维的考生能用敏捷的思维赢得时间，体现其创造能力的水平**。这样的试题，难有现成的方法和套路可以套用，思维水平要求高，不强调解题技巧，思维容量大，运算量较小，完成这样的试题需要有能力的培养，依靠“题海”战术是难以奏效的；(3)**很重视知识的整体性和综合性，在知识网络的交汇点上设计试题**，目的是倡导考生对所学内容能够融会贯通，理论联系实际，防止单纯机械记忆。值得注意的是，在强调选拔、强调能力考查的同时，切忌放松基础知识的复习，要知道考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一。

从历年阅卷情况来看，相当多的考生主要存在以下问题：(1)**对考试大纲中规定的基础知识、基本理论的掌握还存在某些欠缺，甚至有所偏废**；(2)**对所学知识的掌握缺乏整体性、条理性**。

编者认为，考生在冲刺复习阶段很有必要仔细阅读这本《**考研数学最后冲刺超越 135 分**》。因为本书中所设计的试题和所要解决的问题是有针对性的，它或许能给考生带来意外的惊喜！

目　　录

上篇　考前总结

第一部分　高等数学

上篇　考前总结

编 者 的 话

复习备考已进入冲刺阶段，对于强调基础、能力、思维的数学考试来说，考生若想在冲刺阶段通过大量模拟训练来巩固前阶段复习效果，从而提高考试成绩，恐怕来不及了．笔者认为，在冲刺阶段，考生应归纳总结考研数学中常考题型的解题思路和解题方法，梳理相关知识点的内在联系．

从近几年的试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点．由于数学考试一般涉及几个学科，涉及的知识点非常多，加之数学试题的特点，一份试卷中试题题量不可能过大，因此，作为研究生入学考试，注重考查能力，试题不可能面面俱到，节节有题，一般要求保证重点章节知识点被考查到，重点知识构成数学试题的主体．此外，考生要注意学科内在联系，包括各部分的纵向联系以及各部分知识之间的横向联系，相关知识的交汇点是命制大题的重点．

本书上篇“考前总结”以考研数学重点章节部分重点知识点为出发点，以考研数学常考题型为切入点，归纳总结各题型的解题思路或步骤、解题方法，并精编了带有预测性的经典试题进行详细地讲解，帮助考生对所学知识的掌握具有整体性、条理性，并形成一个有序的网络化的知识体系，以提高考生的认识和处理数形规律、逻辑关系及抽象模式的知识和能力，帮助考生实现超越135分的理想成绩．

第一部分　高等数学

专题1　洛必达法则及其应用

【解题思路】 Ⅰ．洛必达法则是求“$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式的重要工具．但在用洛必达法则解题时，为了避免复杂的计算，提高效率，减少错误，应尽可能综合运用以下方法：

1° 函数的连续性与极限四则运算法则；

2° 适当的恒等变形（如：分子或分母的有理化，三角恒等式，等）；

3° 利用已知极限和等价无穷小代换；

4° 利用换元法（即复合函数求极限法则）．

$x \sim \ln(1+x)$

Ⅱ．考生应熟悉当 $x\to 0$ 时最重要的几个等价无穷小量：$\sin x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x$ 与 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$．在用洛必达法则求“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限时用它们来替换分子或分母中相应的无穷小量，常可简化计算过程．

$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$

【例1.1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=$ ________.

【分析】 本题是求“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限，可直接利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=-\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}.$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)=1,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=-1\cdot 1=-1.$$

评注　在本例中我们在将分子和分母分别求导数后，把极限等于1的因子$\sqrt{1+x^2}$分离出来单独求极限的目的在于：突出函数中的“$\frac{0}{0}$”型未定式部分$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$，从而简化了后面的计算．否则对“$\frac{0}{0}$”型未定式　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}(e^x-\cos x)}{x}$　再用洛必达法则时，分子的导数就比只计算$(e^x-\cos x)$的导数要麻烦．

【例1.2】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=$ ________.

【分析】 本题是求“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限．从分子和分母的表达式不难发现，若直接利用洛必达法则会碰到复杂的计算．为简化计算过程，应当在分子和分母中分别利用等价无穷小代换．

当 $x \to 0$ 时,有 $\quad e^{x} - e^{\sin x} = e^{\sin x}(e^{x-\sin x} - 1)$.

又因 $\quad e^{x-\sin x} - 1 \sim x - \sin x,\quad \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x} = 1$,于是,分子可用 $x - \sin x$ 代换.

当 $x \to 0$ 时,$\sqrt{x(1-\cos x)}$ 是无穷小量,于是分母可作等价无穷小代换,即

$$1 - \cos\sqrt{x(1-\cos x)} \sim \frac{1}{2}x(1-\cos x) \sim \frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{4},$$

即得 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x} - e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{4}} = 4\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

评注 在本题的求解中用到了等价无穷小量的传递性质:若 α,β,γ 是同一极限过程的无穷小量,且 $\alpha \sim \beta,\beta \sim \gamma$,则 $\alpha \sim \gamma$. 从而当 $x \to 0$ 时

$$1 - \cos\sqrt{x(1-\cos x)} \sim \frac{1}{2}x(1-\cos x) \sim \frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{4}.$$

【例 1.3】 T $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{2x}) - \cos(xe^{-2x})}{x^3} =$ ______.

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

【分析一】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{2x}) - \cos(xe^{-2x})}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{xe^{2x}+xe^{-2x}}{2}\sin\frac{xe^{2x}-xe^{-2x}}{2}}{x^3}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^{2x}+e^{-2x})(e^{2x}-e^{-2x})}{4x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x} = -\lim_{x\to 0}2(e^{2x}+e^{-2x}) = -4.$$

【分析二】 利用 $\cos x$ 的麦克劳林公式 $\quad \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\quad (x\to 0)$,可得

$$\cos(xe^{2x}) = 1 - \frac{x^2e^{4x}}{2} + o(x^3)\quad (x\to 0),$$

$$\cos(xe^{-2x}) = 1 - \frac{x^2e^{-4x}}{2} + o(x^3)\quad (x\to 0).$$

代入原式,即得 $\quad$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-4x}-e^{4x}}{2x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3} = -2\lim\limits_{x\to 0}(e^{-4x}+e^{4x}) = -4.$

评注 ① 本题的极限是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,通常的作法是直接用洛必达法则计算. 不过,有时会导致复杂的计算.

在【分析一】中,我们首先用和差化积公式将余弦函数之差化为正弦函数之积,这样就为利用当 $y\to 0$ 时的等价无穷小关系 $\sin y \sim y$ 创造了条件. 从求解过程可见,一旦这样作了,以后再用洛必达法则求极限就变得十分简单了.

② 必须指出,尽管下面的作法也得到了相同的结果,但是这种作法并没有足够的理由,从而是不足取的: 当 $y \to 0$ 时,$1-\cos y \sim \dfrac{1}{2}y^2$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{2x}) - \cos(xe^{-2x})}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(xe^{-2x})]-[1-\cos(xe^{2x})]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2e^{-4x}}{2} - \frac{x^2e^{4x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{x} = -4.$$

其原因在于,在和差中用等价无穷小代换时,必须考虑代换时产生的误差有多大的问题,而这正是函数的泰勒公式所能回答的问题. 在【分析二】中我们应用带有皮亚诺余项的麦克劳林公式得出在本题中代换后产生的误差是 $o(x^3)$,从而用严格的推理得出了正确的结果.

【例 1.4】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin x}\right]=$ ________.

【分析】 所求极限为“$\infty-\infty$”型未定式，应首先通分化为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式后，再用前面介绍的方法求极限.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{\sin x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x-1}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{1-\cos x}{x}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}.$$

【例 1.5】 T $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ex^{1+x}}{(1+x)^x}-x\right)=$ ________.

【分析】 所求极限也是“$\infty-\infty$”型未定式，但现在无法经过通分化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式，这时可从括号内提出无穷大因子 x，先化为“$0\cdot\infty$”型的未定式，最后再通过换元 $y=\dfrac{1}{x}$ 化为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式求极限.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{ex^x}{(1+x)^x}-1\right)=\lim_{y\to 0^+}\frac{\dfrac{e}{(1+y)^{\frac{1}{y}}}-1}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{1-\frac{\ln(1+y)}{y}}-1}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\dfrac{\ln(1+y)}{y}}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+y}}{y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+y}=\frac{1}{2}.$$

评注 在前面两个例子中分别介绍了处理“$\infty-\infty$”型未定式的两种基本方法(通分法和提取无穷大公因子法)，在具体问题中应灵活运用适当的方法将“$\infty-\infty$”型未定式变形.

【例 1.6】 T $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4^x-3^x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$ ________.

【分析】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4^x-3^x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left(\frac{4^x-3^x}{x}\right)}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{4^x-3^x}{x}-1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{4^x-3^x-x}{x(x-1)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{4^x-3^x-x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(4^x\ln 4-3^x\ln 3-1)}=e^{4\ln 4-3\ln 3-1}=\frac{4^4}{3^3e}=\frac{256}{27e}.$$

评注 本题极限是“1^∞”型未定式，其一般形式为 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\infty$. 为求极限，首先将①幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$，由于 $\lim\limits_{x\to\square}\ln f(x)=0$，利用当 $y\to 0$ 时的等价无穷小关系 $\ln(1+y)\sim y$ 可得：当 $x\to\square$ 时，$\ln f(x)\sim f(x)-1$，于是

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)[f(x)-1]}.$$

从而，归结为求极限 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)[f(x)-1]$.

【例 1.7】 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}=$ ________.

【分析一】 因 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1-x)}{\ln x}}$，又

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1-x)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x-1}{e^x-1-x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(e^x-1)}{e^x-1-x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1+xe^x}{e^x-1}=1+\lim_{x\to 0^+}e^x\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1}=2,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2$.

【分析二】 利用带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

可得

$$\ln(e^x-1-x)=\ln\left[\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]=\ln x^2\left[\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]$$

$$=2\ln x+\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right],$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1-x)}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x+\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]}{\ln x}=2+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]}{\ln x}$$

$$=2+\ln\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=2+0=2.$$

故原极限为 e^2 .

评注 ① 若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}$ 是“∞^0”型或“0^0”型未定式，也可化为指数型复合函数的极限 $e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)}$ 计算，其中 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln f(x)$ 是“$0\cdot\infty$”型的未定式，又需化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式后再用洛必达法则等方法求极限.

② 带皮亚诺余项的泰勒公式是求“$\frac{0}{0}$”型未定式的一个重要工具，有关内容详见本书第一部分专题 10. 从本题【分析二】可见，利用带皮亚诺余项的泰勒公式求解过程也很简单. 除本题外【例 1.1】~【例 1.6】等题目也都可以这样求解.

【例 1.8】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=$ ________.

【分析】 求数列极限不可以直接用洛必达法则. 为了应用洛必达法则求本例中的极限，可引入函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$，而所求的数列极限是这个函数极限中变量 x 取数列 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 的特例.

引入函数 $f(x)=\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$ 与数列 $x_n=\frac{1}{n^2}(n=1,2,3\cdots)$，则 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=f(x_n)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}-x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}}=e^{-2},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^2}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to 0}f(x)=e^{-2}.$$

评注 利用函数极限及洛必达法则求数列极限的理论根据是：

① 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\forall x_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

② 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall x_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 又存在 N，当 $n\geqslant N$ 时 $x_n\neq x_0$，必有
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

在本例中应用了上述第 2 个结论. 也可以考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{x}\right)\right]^x$ 且取 $x_n=n^2$，并应用第 1 个结论求本例中的极限.

【例 1.9】T $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x^2[\ln(1+x)-\ln x]}=$ ________.

【分析】 因 $|\cos x|\leqslant 1$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{t^2}=+\infty$，
$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln(1+x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln(1+\frac{1}{x})\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t^2}=+\infty,$$
故所求极限是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，用分项求极限法可得
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+x^2)\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x^2[\ln(1+x)-\ln x]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin\frac{1}{x}-\cos x}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=1+0=1.$$
（后一项的分子为有界变量，分母是无穷大量，故其极限为 0.）

评注 ① 对“$\dfrac{0}{0}$”和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，洛必达法则表明若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量，均可得出
$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
但是当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且非无穷大量时，却不能断定仍有
$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

本例正是这种不能直接用洛必达法则求极限的“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式. 事实上，将分子和分母分别求导
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\frac{3+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\sin x}{2x\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{x}{1+x}},$$
其中
$$\lim_{x\to+\infty}(2x\sin\frac{1}{x}-\frac{3+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x})=2-1=1\neq0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[2x\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{x}{1+x}\right]=2-1=1\neq0.$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在，由此导致 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\frac{3+x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\sin x}{2x\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{x}{1+x}}$ 不存在且非无穷大量，即洛必达法则失效.

② 利用反证法不难得出：

若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)$ 不存在又非无穷大量，则 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)+g(x)]$ 也不存在且非无穷大量；

若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)$ 不存在又非无穷大量，则 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 也都不存在且非无穷大量.

在 ① 中利用了这里的结果.

【例 1.10】 7 若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]$ 存在，则常数 $a=$ ________.

【分析】 注意 $|x|$ 是以 $x=0$ 为分界点的分段函数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，可见应分别求当 $x\to0$ 时的左、右极限. 因为

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

$$=a+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{3e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{2}{x}}+1}=a,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=3-\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax)}{x}=3-a,$$

所以，题中极限存在 $\Leftrightarrow\ a=3-a\ \Leftrightarrow\ a=\dfrac{3}{2}$.

评注 在本例中用到了极限存在的如下充分必要条件：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)\text{ 和 }\lim_{x\to x_0^-}f(x)\text{ 都存在且同为 }A.$$

【例 1.11】 确定常数 a 和 b 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$.

【解法一】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}+b=4\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}=4-b.$

由此可得 $b=4-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}$ 和

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax}{x^2}\cdot x=(4-b)\cdot0=0,$$

于是，利用等价无穷小代换即得

$$a=-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{-2x+3x^2}{x}=2.$$

进而,由洛必达法则又有

$$b=4-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+2x}{x^2}=4-\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-2+6x}{1-2x+3x^2}+2}{2x}$$

$$=4-\lim_{x\to0}\frac{2x+6x^2}{2x(1-2x+3x^2)}=3.$$

【解法二】 利用带皮亚诺余项的麦克劳林公式.由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$,可得

$$\ln(1-2x+3x^2)=-2x+3x^2-\frac{1}{2}(-2x+3x^2)^2+o(x^2)=-2x+x^2+o(x^2),$$

代入即得 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$

$\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(a-2)x+(b+1)x^2}{x^2}=4$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a-2=0,\\ b+1=4\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a=2,\\ b=3.\end{cases}$

评注 【解法一】的基础是极限的四则运算法则与洛必达法则,关键在于从题设得出a和b满足的极限公式.【解法二】的基础是带有皮亚诺余项的麦克劳林公式,要求熟悉有关的展开式的求法.

【例 1.12】 T 已知常数 $a>0,bc\neq0$,使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^a\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)-x\right]=c,$$

求 a,b,c.

【解】 记 $I(a,b)=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x^a\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)-x\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\left[\frac{\ln(1+bt)}{t^a}-\frac{1}{t}\right]$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\frac{\ln(1+bt)}{t^{a-1}}-1\right],$$

由于 $b\neq0$,计算可得

$$J(a,b)=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{\ln(1+bt)}{t^{a-1}}-1\right]=-1+\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+bt)}{t^{a-1}}$$

$$=-1+\lim_{t\to0^+}t^{2-a}\frac{\ln(1+bt)}{t}=-1+b\lim_{t\to0^+}t^{2-a}=\begin{cases}-1, & 0<a<2,\\ b-1, & a=2,\\ \infty, & a>2.\end{cases}$$

从而,当 $a\neq2$ 时对任何 $b\neq0$ 以及当 $a=2$ 且 $b\neq1$ 时都有 $I(a,b)=\infty$.

当 $a=2$ 且 $b=1$ 时,$I(a,b)=I(2,1)$ 是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,利用洛必达法则可得

$$I(2,1)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+t}=-\frac{1}{2}\neq0.$$

故符合题目要求的常数 a,b,c 分别是 $a=2,b=1,c=-\dfrac{1}{2}$.

评注 这类含有待定常数的极限问题一般可采用本例的办法:在待定常数的取值范围内用洛必达法则(或其他方法)求出相应的极限,与题目的要求对比,选出符合要求的参数的取值即可.

【例 1.13】 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}=$ ________.

【分析】 本题有以下几种求解方法.

方法 1° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin3x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}\overset{3x=t}{=\!=\!=}27\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=9\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{9}{2}.$$

方法 2° 令 $\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$,且 $f(x)=x^2g(x)-\dfrac{\sin3x}{x}$,

故 $$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3+x^2g(x)-\dfrac{\sin3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}g(x)+\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}=\frac{9}{2}.$$

方法 3° 取满足题设条件的一个特例来计算.最简单的$f(x)$是满足$\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=0$的函数.

于是 $f(x)=-\dfrac{\sin3x}{x}$,进而有

$$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3-\dfrac{\sin3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}=\frac{9}{2}.$$

评注 方法1°的基础是极限的四则运算法则,在找出要求的极限与题设的极限之间的关系后,就化为求不含$f(x)$的某个极限了.

方法2°的基础是极限存在的变量与无穷小量的关系:$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+g(x)$,其中$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$,于是可得到未知函数$f(x)$的一个表达式(在本例中是$f(x)=x^2g(x)-\dfrac{\sin3x}{x}$),由此即可计算包含它的极限.

方法3°不是一种正规的方法,但可用于求解结论与$f(x)$的表达式无关的选择题或填空题.这种方法的思想很简单,即选择一个满足题设全部条件的函数$f(x)$作为代表来得出适合于该类函数的一般结论.

特别需要注意的是如下作法是错误的:因为当$x\to0$时$\sin3x\sim3x$,所以

$$0=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+xf(x)}{x^3}\overset{⊛}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2},\text{即}\quad\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=0.$$

错误的根源在于带⊛的等式不成立.事实上按恒等变形与极限的运算法则应有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{3x+xf(x)}{x^3},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-3x}{x^3}=-\dfrac{9}{2}\neq0.$

所谓"在求$\dfrac{0}{0}$型未定式的极限时可在分子或分母中作等价无穷小代换",是指把分式的分子或分母作为一个整体可以作等价无穷小代换.一般而言,不能仅仅把分子或分母中的某一部分(如本题中的$\sin3x$)换为它的等价无穷小量.

【例 1.14】T 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$ ________.

【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]}{\ln\cos x}=\ln2.$

利用当 $x\to0$ 时的等价无穷小关系 $\ln(1+x)\sim x$ 和 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，把分子换为$\dfrac{f(x)}{4^x-1}$，把分母换为 $-\dfrac{x^2}{2}$，即得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2f(x)}{(4^x-1)x^2}=\ln2$. 从而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=-\frac{\ln2}{2}\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}=-\frac{\ln2}{2}\lim_{x\to0}4^x\ln4=-\frac{1}{2}\ln2\cdot\ln4=-(\ln2)^2.$$

评注 作为选择题或填空题，也可取特例 $f(x)=(4^x-1)(2^{\ln\cos x}-1)$ 直接求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

专题 2 求 n 项和的极限

【解题思路】 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 n项乘积的极限.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

【例 2.1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\sqrt{1-\cos\dfrac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\cos\dfrac{2n\pi}{n}}\right)=$ ________.

【分析】 因为
$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1-\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1-\cos\frac{2n\pi}{n}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n},$$

把 $\sqrt{1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}}$ 看作函数 $f(x)=\sqrt{1-\cos2\pi x}$ 在 $x=\dfrac{k}{n}$ 处的函数值，其中$\dfrac{k}{n}$ 正好是将区间 $[0,1]$ n 等分所得的第 k 个分点 $(k=1,2,\cdots,n)$，这时每个小区间的长度为$\dfrac{1}{n}$.

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$ 可看作定积分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 对应的积分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$，其中 $\xi_k=\dfrac{k}{n}$，$\Delta x_k=\dfrac{1}{n}(k=1,2,\cdots,n)$. 又因 $f(x)=\sqrt{1-\cos2\pi x}$ 在 $[0,1]$ 上连续，于是在 $[0,1]$ 上可积，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{1-\cos2\pi x}\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{2\sin^2\pi x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

☆【例 2.2】T $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1}+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{n+\dfrac{1}{2^2}}+\cdots+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}{n+\dfrac{1}{n^2}}\right]=$ ________.

【分析】 令 $S_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} + \dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{1}{2^2}} + \cdots + \dfrac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{1}{n^2}}$,

$$T_n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n})\right],$$

则不难发现 $\frac{n}{n+1}T_n \leqslant S_n \leqslant T_n \quad (n = 1,2,\cdots)$,其中 T_n 是把$[0,1]$ n 等分,且取 $\xi_k = \frac{k}{n}(k = 1,2,\cdots,n)$ 时$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 对应的积分和,因函数 $\ln(1+x)$ 在$[0,1]$上连续,故在$[0,1]$上可积,则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_n &= \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}(1+x)\\ &= (1+x)\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

此外,还有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}T_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = 2\ln 2 - 1$,从而由极限存在的夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\ln 2 - 1.$$

评注 【例2.1】与【例2.2】是把所求的和转化为某定积分对应的积分和,从而通过计算定积分得出要求的极限.关键在于看出定积分中的被积函数$f(x)$以及积分区间$[a,b]$分别是什么.在【例2.2】中,S_n不能直接看成某一定积分对应的积分和,从而还要与极限存在的夹逼准则联合起来,用积分和T_n及$\frac{n}{n+1}T_n$夹逼S_n.

专题3 无穷小及其阶

【解题思路】 Ⅰ. 当 $x\to a$ 时若$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小,$g(x)$是$h(x)$的同阶无穷小,则$f(x)$也是$h(x)$的同阶无穷小.

特别地,当 $x\to a$ 时若$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小,$g(x)$与$h(x)$是等价无穷小,则$f(x)$与$h(x)$也是等价无穷小.

Ⅱ. 设$f(x)$连续,且当 $x\to a$ 时$f(x)$是 $x-a$ 的 n 阶无穷小,则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 当 $x\to a$ 时必为$x-a$ 的 $n+1$ 阶无穷小.

Ⅲ. 设当 $x\to a$ 时 $g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小,当 $u\to 0$ 时$f(u)$是 u 的 m 阶无穷小,则$f[g(x)]$当 $x\to a$ 时必为 $x-a$ 的 nm 阶无穷小.

【例3.1】 已知$f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$,$g(x) = \int_0^{1-\cos x}\tan t\mathrm{d}t$和$h(x) = \tan x - \sin x$当$x\to 0$时都是无穷小量,若按照它们关于 x 的阶数从低到高的顺序排列起来,则是

(A) $f(x),g(x),h(x)$. (B) $h(x),f(x),g(x)$.

(C) $f(x),h(x),g(x)$. (D) $h(x),g(x),f(x)$.

【分析】 利用当 $x\to 0$ 时的等价无穷小关系:$\tan x \sim x$,$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 和 $\ln(1+x) \sim x$,不难得出当 $x\to 0$ 时,

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \sim x^2,$$

$$g(x)=\int_0^{1-\cos x}\tan t\mathrm{d}t=-\ln(\cos t)\Big|_0^{1-\cos x}=-\ln[\cos(1-\cos x)]$$

$$=1-\cos(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}(1-\cos x)^2\sim\frac{x^4}{8},$$

$$h(x)=\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{x^3}{2}.$$

即当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是关于 x 的二阶无穷小，$g(x)$ 是关于 x 的四阶无穷小，而 $h(x)$ 是关于 x 的三阶无穷小．故应选(C)．

【例 3.2】 设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 的连续函数，且当 $x\to0$ 时 $\int_0^{\sin^2x}f(t)\mathrm{d}t$ 是与 Ax^n 等价的无穷小，则 $A=$ ________，$n=$ ________．

【分析】 首先，由题设可得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

其次，设 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，由洛必达法则又可得

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

从而，令 $\sin^2x=y$，即得

$$\lim_{x\to0}\frac{g(\sin^2x)}{\sin^6x}=\lim_{y\to0}\frac{g(y)}{y^3}=-\frac{1}{6}.$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin^2x}f(t)\mathrm{d}t}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{g(\sin^2x)}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{g(\sin^2x)}{\sin^6x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^6=-\frac{1}{6}.$$

这表明 $\int_0^{\sin^2x}f(t)\mathrm{d}t$ 当 $x\to0$ 时是与 $-\dfrac{x^6}{6}$ 等价的无穷小，即 $A=-\dfrac{1}{6}$，$n=6$．

评注 在本题中 $a=0$，由 $f(x)$ 与 $1-\cos x$ 当 $x\to0$ 时是同阶无穷小，$1-\cos x$ 与 x^2 当 $x\to0$ 时是同阶无穷小，从而当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 也是与 x^2 同阶的无穷小，即 $f(x)$ 是 x 的二阶无穷小，进而由 $f(x)$ 连续知 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 当 $x\to0$ 时是 x 的 3 阶无穷小；最后由于当 $x\to0$ 时 $\sin^2x$ 是 x 的二阶无穷小，故复合函数 $g(\sin^2x)$ 当 $x\to0$ 时是 x 的 $2\times3=6$ 阶无穷小．

由于本题是填空题，且结论中 n 的大小与 $f(x)$ 的具体形式无关，所以可用取特例求解法．不难发现满足题设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 的一个连续函数是 $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}$，对这个函数可得

$$\int_0^{\sin^2x}f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^{\sin^2x}t^2\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}\sin^6x,$$

显然，当 $x\to0$ 时这是关于 x 的 6 阶无穷小，故 $n=6$．

一般说来，如果可以断定选择题或填空题的正确结论与题目中出现的函数 $f(x)$ 的具体形式无关，则可考虑用特例法求解．

【例 3.3】 设 $f(x)$ 连续，且当 $x\to0$ 时 $F(x)=\int_0^x(x^2+1-\cos t)f(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^3 等价的无穷小，则 $f(0)=$ ________．

【分析】 由等价无穷小的定义及洛必达法则可得