高等数学及应用

（第二版）　主编　吕同富

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学及应用

Gaodeng Shuxue Ji Yingyong

（第二版）

主　编　吕同富

副主编　金明华　王　英

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

作者在对第一版《高等数学及应用》进行教学使用经验总结的基础上，编写了高职高专数学教材——《高等数学及应用(第二版)》。本书内容包括：极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及应用；常微分方程；向量与空间解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学。

基于实际应用的课程开发设计模式是本书的特色，另外本书还有如下特点：学习目的明确，实际问题具体，有大量翔实的应用实例可供参考，有相当数量的应用问题可供实践。

本书可作为高职高专理工类专业的“高等数学”课程教材或参考书，也可作为应用型本科和成人高校的相关课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及应用/吕同富主编. --2版. --北京：高等教育出版社,2012.4

ISBN 978-7-04-035391-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第051483号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 邓雁城 封面设计 王 睢 版式设计 王 莹
责任校对 刘 莉 责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京人卫印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×1092mm 1/16		
印 张	20.75	版 次	2010年7月第1版
字 数	570千字		2012年4月第2版
购书热线	010-58581118	印 次	2012年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	33.80元

物 料 号 35391-00

第二版前言

2010年《高等数学及应用》的出版，得到了很多老师的关注，我们收到了很多读者的E–mail，他们给予了很多的肯定和鼓励，同时也对书中的内容、体系、讲法等方面提出了很多宝贵意见。借此再版之机，主编向关怀和支持作者工作的广大读者朋友表示深切的谢意。

此次再版，根据广大读者的建议，在保持原《高等数学及应用》特色的前提下，在体例、格式、内容等方面作了较大的修改。其中很多章节和例题都进行了重新设计和修改，修改后的内容更符合现代高职高专院校高等数学教学改革实际，既便于教学，又有利于培养学生解决实际问题的能力。

此次再版内容包括极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及应用，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学等内容。根据现在实际教学情况，删除了线性代数、Fourier级数、Laplace变换等内容，另外对部分过难的例题和习题作了修改和替换，新增了数字教学资源电子教案(由金明华、黄美金、佘卫强、蔡建刚、许建艺制作完成)，Mathematica实验等内容供师生参考(相关数字教学资源可到高等教育出版社网上下载)。修改后的书稿有各种插图四百余张，有传统意义的例题二百多个，实际应用问题约150个。

此次修订由吕同富教授执笔，参加本书修订的还有：金明华副教授编写了本书的全部习题和答案、王英副教授编写了第五章的部分内容，韦华教授编写了第四章的部分内容。另外，杨凤翔教授、韩红副教授、汤凤香老师参加了部分内容的编写。全书由吕同富教授统稿。

本教材的编写得到了很多朋友的热心支持和帮助，在此深表感谢！

本书可作为高职高专理工类专业“高等数学”课程教材，也可作为应用型本科院校理工类专业学生“高等数学”课程的参考用书。

吕同富

电子信箱：ltongfu@126.com

2012年3月

第一版序

吕同富教授主编的《高等数学及应用》是针对高等职业院校特点的一部新教材。该书的突出特色包括：

1. 作者在构思本教材时，从“将数学建模的思想融入数学基础课教学”的角度进行了思考，值得肯定；本书借鉴国内外优秀教材，大量使用了应用实例引出问题，这在目前国内同类教材中是比较少见的，也是本书的亮点；作者选用百余个“实际问题”作为应用示例，有助于激发学生的学习热情，培养学生的应用能力。

2. 与传统的教材相比，作者也努力融文化性于数学内容。很多篇章的“实际问题”涉及古今中外，相映成趣，通而不同，很有启发性，也增添了教材的趣味性。

3. 将现代数学软件融入数学基础课程教学，非常有意义，这可作为本书进一步修订和改版的努力目标，如果本书能够在这方面有所推进，会成为另外一个亮点。

高职教育的特色决定其数学课程应当突出实用性。但数学教育中实用性(或称工具性)与文化性(或称思维性)的矛盾与平衡，是多年来备受关注但始终困扰不断的问题。数学作为理性思维的重要载体，对学生理性思维发展的作用也是不应当忽视的。而高职的学生也是属于中国受过高等教育的群体，数学的教育如何培养学生的理性思维，也是今后需要认真思考和研究的课题。

希望作者与出版社共同努力，经过教学实践，将本书打造成为精品。

白峰杉
2010年4月于清华园

第一版前言

从德国引进的“基于工作过程”的教学模式，对高职教学改革起到一定的促进作用，推动了高职教学改革向纵深发展，为实现“以服务为宗旨，以就业为导向”的高职教育改革发展目标作出了重要贡献。

改革是永恒的主题。《中国教育和改革发展纲要》要求我们各级学校都要积极地开展各个领域的改革，要求在改革中求生存求发展。然而数学作为高职教育的基础课程，教学改革发展缓慢，举步维艰。为了进一步适应高职数学教学改革的需要，作者做了艰苦的探索和研究，历时两年完成了这本《高等数学及应用》，希望它能在改革的大潮中激起一点浪花。

本书突出“高职”特色，注重培养学生的实践能力，基础理论“以实用为主、够用为度”，基础知识广而不深、要求学生会用就行；基本应用技能贯穿始终；文字叙述准确，简明扼要，通俗易懂；“以例释理”，理论联系实际；每部分知识既是教材的有效组成部分，又相对独立完整，具有一定的可剪裁性和拼接性，可根据不同的培养目标将内容裁剪、拼接，使前后课程互相衔接，浑然一体。本书内容覆盖面广，满足了专业大类对理论、技能及其基本素质的要求，同时又可满足深入学习的需要，不是学多少编多少，而是给学生留了一定的学习空间，有利于培养学生再学习的能力。

本书内容紧密结合专业要求，站在专业的最前沿，与生产实际紧密相连，与相关专业的市场接轨，渗透专业素质的培养。本书以介绍成熟、稳定、广泛应用的数学知识为主线，同时介绍新知识、新方法、新技术等，并适当介绍科技发展的趋势，使学生能够适应未来技术进步的需要；与职业培养目标保持一致，及时更新了教材中过时的内容，增加了市场迫切要求的新知识，使学生在毕业时能够适应企业的要求。本书强调用情景真实的“实际问题”，营造现实工作过程中待解决问题的情境；主张用问题启发学生的思维，鼓励学生基于解决问题的学习、基于“实际应用”的学习；通过设计各种情境真实的“实际问题”，开拓学生的创新思维与想象空间；充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接，提高学生的综合素质与能力。

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导简捷、思路清晰、深入浅出、富有启发性，便于教学与自学；图文并茂，有各种插图450多张，不仅从不同的视角展现了计算机及其相关数学软件在现代数学教学中的作用，更使抽象的数学变得生动直观。基于实际应用是本书的特色。书中除了传统意义的习题外，引入了160多个应用实例，简要地介绍了微积分在理工农医、天文地理、航天通信、科学计算、国防建设、民用生活等各个方面的实际应用，展示了微积分的强大威力和不可替代的重要地位。

本书在高等教育出版社的指导下，由中国数学会会员、中国职业技术教育学会教学工作委员会高职数学研究会委员吕同富教授任主编，金明华副教授编写了本书的全部习题和答案、王英副教授编写了第五章的部分内容、韦华教授编写了第四章的部分内容，另外还有杨凤翔教授、韩红副教

授、汤风香、陈益军老师参加了部分内容的编写。全书由吕同富教授统稿。

清华大学白峰杉教授认真地审阅了书稿，从科学谋篇到整体布局、从开篇序论到内容细节等，提出了很多宝贵的修改意见。高等教育出版社邓雁城编辑，两年来自始至终给作者以支持和鼓励，作者深知没有邓老师的帮助这本书也许无法问世，还有高等教育出版社的编辑用高度的责任感认真地编辑审校了书稿，纠正了原稿中很多错误，这里向他们及本书所列参考文献的作者们，以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友们，表示衷心的感谢。

本书可作为高职高专理工科相关专业“高等数学”课程教材，也可作本科院校理工科学生“高等数学”课程参考用书。

如果说想引领中国高职数学改革的发展方向，那是狂妄。不过作者真的想编写一本好书，让读者感到这就是我想要看的书，让老师感到这就是我想用的讲义，让学生感到读了这本书受益终生，让专家感到这本书真的与众不同而且实用……当然做到这些很不容易，这需要对教育无限的热爱和敬业精神来支撑才有可能完成。

《高等数学及应用》是高职数学教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验。希望广大师生和同仁在使用过程中能给作者以指教，把高等数学教学改革进一步推向深入。

吕同富

电子信箱：ltongfu@126.com

2010年5月

目　录

第一章 极限与连续 1

§1.1 极限思想的产生与发展 1

§1.2 函数的极限 4

1.2.1 函数的极限 4

1.2.2 极限的性质 11

§1.3 极限运算 11

1.3.1 极限四则运算 11

1.3.2 两个重要极限 14

1.3.3 无穷小 17

1.3.4 无穷远极限与铅直、水平渐近线 20

§1.4 函数的连续性 22

1.4.1 函数连续的概念 23

1.4.2 初等函数的连续性 27

1.4.3 闭区间上连续函数的性质 .. 29

实训一 30

第二章 导数与微分 34

§2.1 导数的概念 34

2.1.1 切线与速度 34

2.1.2 导数的概念 36

2.1.3 可导与连续 38

§2.2 求导法则 39

2.2.1 函数的和差积商的求导法则 41

2.2.2 复合函数的求导法则 41

2.2.3 反函数的求导法则 45

2.2.4 隐函数的求导法则 46

2.2.5 参数方程的求导法则 48

2.2.6 高阶导数及应用 50

§2.3 微分及应用 53

2.3.1 微分的概念 53

2.3.2 微分公式及运算法则 54

2.3.3 复合函数的微分 55

实训二 55

第三章 导数的应用 60

§3.1 中值定理 60

3.1.1 Rolle定理 60

3.1.2 Lagrange中值定理 62

3.1.3 Cauchy中值定理 64

§3.2 L'Hospital法则与不定式 65

§3.3 Taylor公式 68

3.3.1 Taylor公式 68

3.3.2 几个常用展开式 70

§3.4 函数的极值与最值 71

3.4.1 函数的单调性 71

3.4.2 函数的极值 72

3.4.3 函数的最值及应用 74

3.4.4 曲线的凸凹与拐点 83

3.4.5 曲线的渐近线 86

3.4.6 函数作图的一般步骤 88

§3.5 曲率 88
3.5.1 曲率的概念 89
3.5.2 曲率的计算 90
3.5.3 曲率圆和曲率半径 91
3.5.4 曲率在机械制造中的应用 .. 92
实训三 93
第四章 不定积分 96
§4.1 不定积分的概念及性质 96
4.1.1 不定积分的概念 96
4.1.2 不定积分的性质 98
4.1.3 不定积分的基本公式 99
§4.2 不定积分的计算 102
4.2.1 换元积分法 102
4.2.2 分部积分法 108
实训四 111
第五章 定积分及应用 114
§5.1 定积分的概念及性质 114
5.1.1 面积与路程 115
5.1.2 定积分的概念 119
5.1.3 定积分的性质 122
§5.2 微积分基本公式 124
5.2.1 变上限定积分 124
5.2.2 微积分基本公式 125
§5.3 定积分的计算 126
5.3.1 定积分的换元积分法 126
5.3.2 定积分的分部积分法 129
§5.4 定积分的几何应用 130
5.4.1 定积分的微元法 130
5.4.2 平面图形的面积 133
5.4.3 定积分求曲线的弧长 137
5.4.4 旋转体的体积与侧面积 141
5.4.5 定积分求体积 148
§5.5 定积分在工程技术中的应用 .. 152
5.5.1 变力做功 152
5.5.2 流体的压强和压力 153
5.5.3 矩和质心 154
§5.6 无穷积分与瑕积分 157
5.6.1 无穷积分 157
5.6.2 瑕积分 160
实训五 160
第六章 常微分方程 165
§6.1 微分方程的基本概念 165
6.1.1 微分方程的基本概念 165
6.1.2 可分离变量的微分方程 167
§6.2 一阶线性微分方程 184
§6.3 可降阶的高阶微分方程 192
6.3.1 $y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 .. 192
6.3.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程 192
6.3.3 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程 200
§6.4 二阶常系数线性微分方程 202
6.4.1 二阶常系数齐次线性微分方程 202
6.4.2 二阶常系数非齐次线性微分方程 205
实训六 215
第七章 向量与空间解析几何 219
§7.1 空间直角坐标系与向量 219
7.1.1 空间直角坐标系 219
7.1.2 向量线性运算及几何表示 .. 220
§7.2 向量的坐标表示及线性运算 .. 222
7.2.1 空间两点间的距离公式 222
7.2.2 向量内积 224
7.2.3 向量外积 226

§7.3 平面与直线 228
7.3.1 平面的点法式方程 228
7.3.2 平面的一般方程 229
7.3.3 空间直线的点向式方程 231
7.3.4 空间直线的一般方程 232
§7.4 空间曲面 232
7.4.1 母线平行于坐标轴的柱面 232
7.4.2 椭球面 233
7.4.3 椭圆抛物面 234
7.4.4 双曲抛物面 235
7.4.5 椭圆锥面 236
7.4.6 单叶双曲面 237
7.4.7 双叶双曲面 237
§7.5 直纹面 238
7.5.1 锥面、单叶双曲面 238
7.5.2 双曲抛物面 239
§7.6 柱坐标系与球坐标系 240
7.6.1 柱坐标系 240
7.6.2 球坐标系 241
§7.7 空间曲线的参数方程 243
§7.8 空间曲线、曲面在坐标面上的投影 245
7.8.1 投影柱面 245
7.8.2 空间曲线在坐标面上的投影 245
实训七 247
第八章 多元函数微分学 252
§8.1 二元函数的极限与连续 252
8.1.1 二元函数 253
8.1.2 二元函数的极限 256
8.1.3 二元函数的连续性 260
§8.2 偏导数 261
8.2.1 偏导数的概念 261
8.2.2 高阶偏导数 264
§8.3 全微分 266
8.3.1 全微分的概念 266
8.3.2 多元复合函数的微分 268
8.3.3 隐函数的微分 269
§8.4 方向导数、梯度向量和切平面 270
8.4.1 方向导数 270
8.4.2 空间曲线的切线 272
8.4.3 切平面 273
§8.5 多元函数的极值 274
8.5.1 多元函数的极值 275
8.5.2 多元函数的最值 276
8.5.3 条件极值 277
实训八 280
第九章 多元函数积分学 284
§9.1 二重积分 284
9.1.1 二重积分的概念 284
9.1.2 二重积分的性质 286
9.1.3 二重积分的计算 287
9.1.4 二重积分的换元 292
§9.2 二重积分的应用 296
9.2.1 平面薄板的质量 296
9.2.2 平面薄板的质心 296
9.2.3 曲面的面积 298
§9.3 曲线积分与曲面积分 299
9.3.1 曲线积分 299
9.3.2 曲面积分 307
实训九 309
部分实训答案 313
参考文献 320

第一章　极限与连续

学习目标与要求

1. 理解函数的极限与连续的概念，会用极限方法分析解决实际问题.
2. 掌握用极限方法判断函数在某点的连续性.
3. 掌握闭区间上连续函数的性质.

§ 1.1　极限思想的产生与发展

1. 极限思想的产生与发展

(1) 极限思想的由来

与其他科学思想方法一样，极限思想也是社会实践的产物．极限思想可以追溯到古代．刘徽的割圆术是早期极限思想的应用；古希腊人的穷竭法也蕴含了极限思想．到了16世纪，荷兰数学家斯泰文在考察三角形重心的过程中改进了古希腊人的穷竭法，他借助几何直观，大胆地运用极限思想思考问题，在无意中把“极限方法”发展成为一个实用概念.

(2) 极限思想的发展

极限思想的进一步发展与微积分的建立紧密相联．16世纪的欧洲处于资本主义萌芽时期，生产力得到极大的发展，生产和技术中大量的问题，只用初等数学的方法已无法解决，要求数学突破只研究常量的传统范围，而提供能够用以描述和研究运动、变化过程的新工具，这是促进极限发展、建立微积分的社会背景.

早期 Newton 和 Leibniz 以无穷小概念为基础建立微积分，后来因遇到了逻辑困难，他们接受了极限思想．Newton 用位移的增量Δs与时间的增量Δt之比$\Delta s/\Delta t$表示运动物体的平均速度，让Δt无限趋近于零时，得到物体的瞬时速度，并由此引出导数概念和微分学理论．他意识到极限概念的重要性，试图以极限概念作为微积分的基础，他说：“两个量和量之比，如果在有限时间内不断趋于相等，且在这一时间终止前互相靠近，使得其差小于任意给定的差，则最终就成为相等”．但Newton 的极限观念也是建立在几何直观基础上，因而无法得出极限的严格表述．Newton 所运用的极限概念，只是接近于直观性的语言描述：“如果当n无限增大时，a_n无限接近于常数A，则称a_n以A为极限”．这种描述性语言，人们容易接受．但是，这种定义没有定量地给出两个“无限过程”之间的联系，不能作为科学论证的逻辑基础．正因为当时缺乏严格的极限定义，微积分理论才受到人们的怀疑与攻击，例如，在瞬时速度概念中，究竟Δt是否等于零？如果说是零，怎么能用它去做除法的分母呢？如果它不是零，又怎么能把包含着它的那些项去掉呢？这就是数学史上所说的无穷小悖论．英国哲学家、大主教 Berkley 对微积分的攻击最为激烈，他说微积分的推导是

“分明的诡辩”．Berkley 之所以激烈地攻击微积分，是由于当时的微积分缺乏牢固的理论基础，连 Newton 自己也无法摆脱极限概念中的混乱．这个事实表明，弄清极限概念，建立严格的微积分理论基础，不但是数学本身所需要的，而且有着认识论上的重大意义．

(3) 极限思想的完善

极限思想的完善与微积分的严格化密切联系．在很长一段时间里，微积分理论基础的问题，许多人都曾尝试解决，但都未能如愿以偿．这是因为数学的研究对象已从常量扩展到变量，而人们对变量数学特有的规律还不十分清楚；对变量数学和常量数学的区别和联系还缺乏了解；对有限和无限的对立统一关系还不明确．这样，人们使用习惯了的处理常量数学的传统思想方法，就不能适应变量数学的新需要，仅用旧的概念说明不了这种“零”与“非零”相互转化的辩证关系．到了18世纪，Robins、d’Alembert 与 Huilier 等人先后明确地表示必须将极限作为微积分的基础概念，并且都对极限作出过各自的定义．其中 d’Alembert 的定义是：“一个量是另一个量的极限，假如第二个量比任意给定的值更为接近第一个量”，它接近于现在极限的正确定义．然而，这些人的定义都无法摆脱对几何直观的依赖．事情也只能如此，因为19世纪以前的算术和几何概念大部分都是建立在几何量的概念上．

首先用极限概念给出导数正确定义的是捷克数学家Bolzano，他把函数 $y=f(x)$ 的导数$f'(x)$ 定义为差商$\Delta y/\Delta x$的极限，他强调指出$f'(x)$不是两个零的商．Bolzano 的思想很有价值，但关于极限的本质他仍未说清楚．

到了19世纪，法国数学家Cauchy在前人工作的基础上，比较完整地阐述了极限概念及其理论，他在《分析教程》中指出：“当一个变量逐次所取的值无限趋于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限值，特别地，当一个变量的数值(绝对值)无限地减小使之收敛到极限零，就说这个变量成为无穷小”．Cauchy把无穷小视为以零为极限的变量，这就澄清了无穷小“似零非零”的模糊认识，这就是说，在变化过程中，它的值可以是非零，但它变化的趋向是“零”，可以无限地接近于零．Cauchy试图消除极限概念中的几何直观，作出极限的明确定义，然后去完成Newton的愿望．但Cauchy的叙述中还存在描述性的词语，如“无限趋近”、“要多小就多小”等，因此，还保留着几何和物理的直观痕迹，没有达到彻底严密化的程度．

为了排除极限概念中的直观痕迹，Weierstrass提出了极限的静态的定义，给微积分提供了严格的理论基础．所谓a_n无限趋近于A，是指：“如果对任意给定$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”．这个定义，借助不等式，通过ε和N之间的关系，定量地、具体地刻画了两个“无限过程”之间的联系．因此，这样的定义是严格的定义，可以作为科学论证的基础，至今仍在微积分书籍中使用．在该定义中，涉及的仅仅是数及其大小关系，此外只是给定、存在、任意等词语，已经摆脱了“趋近”一词，不再求助于运动的直观．

自从解析几何和微积分问世以后，运动进入了数学，人们有可能对物理过程进行动态研究．之后，Weierstrass建立的$\varepsilon-N$语言，则用静态的定义刻画变量的变化趋势．这种“静态—动态—静态”的螺旋式的演变，反映了数学发展的辩证规律。

2．极限思想的思维功能

极限思想在现代数学乃至物理学等学科中有着广泛的应用，这是由它本身固有的思维功能所决定．极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系，是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用．借助极限思想，人们可以从有限认识无限，从“不变”认识“变”，从直线形认识曲线形，从量变认识质变，从近似认识精确．无限与有限有本质的不同，但二者又有联系，无限是有限的发展．无限个数的和不是一般的代数和，把它定义为“部分和”的极限，就是借助于极限

的思想方法，从有限来认识无限．“变”与“不变”反映了事物运动变化与相对静止两种不同状态，但它们在一定条件下又可相互转化，这种转化是“数学科学的有力杠杆之一”．例如，要求变速直线运动的瞬时速度，用初等方法无法解决，困难在于速度是变量．为此，人们先在小范围内用匀速代替变速，并求其平均速度，把瞬时速度定义为平均速度的极限，就是借助于极限的思想方法，从“不变”认识“变”．曲线与直线有着本质的差异，但在一定条件下也可以相互转化，正如恩格斯所说：“直线和曲线在微分中终于等同起来了”．善于利用这种对立统一关系是处理数学问题的重要手段之一．直线形的面积容易求得，求曲线形的面积问题用初等的方法是不能解决的．刘徽用圆内接多边形逼近圆，一般地，人们用小矩形的面积来逼近曲边梯形的面积，都是借助于极限的思想方法，从直线形来认识曲线形．量变和质变既有区别又有联系，两者之间有着辩证的关系．量变能引起质变，质和量的互变规律是辩证法的基本规律之一，在数学研究工作中起着重要作用．对任何一个圆内接正多边形来说，当它边数加倍后，得到的还是内接正多边形，是量变而不是质变；但是，不断地让边数加倍，经过无限过程之后，多边形就“变”成圆，多边形面积便转化为圆面积．这就是借助于极限的思想方法，从量变来认识质变．近似与精确是对立统一的关系，两者在一定条件下也可相互转化，这种转化是数学应用于实际计算的重要诀窍．前面所讲到的“部分和”、“平均速度”、“圆内接正多边形面积”，分别是相应的“无穷级数和”、“瞬时速度”、“圆面积”的近似值，取极限后就可得到相应的精确值．这都是借助于极限的思想方法，从近似来认识精确．

3．建立概念的极限思想

极限的思想方法贯穿于微积分课程的始终．可以说微积分中的几乎所有的概念都离不开极限．在几乎所有的微积分著作中，都是先介绍函数理论和极限的思想方法，然后利用极限的思想方法给出连续函数、导数、定积分、级数的敛散性、多元函数的偏导数、无穷积分和瑕积分的敛散性、重积分和曲线积分与曲面积分的概念．

4．解决问题的极限思想

极限的思想方法是微积分乃至全部高等数学必不可少的一种重要方法，也是微积分与初等数学的本质区别．微积分之所以能解决许多初等数学无法解决的问题(例如求瞬时速度、曲线弧长、曲边形面积、曲面体体积等问题)，正是由于它采用了极限的思想方法．有时我们要确定某一个量，首先确定的不是这个量的本身而是它的近似值，而且所确定的近似值也不仅仅是一个而是一连串越来越准确的近似值；然后通过考察这一连串近似值的趋向，把那个量的准确值确定下来．这就是运用了极限的思想方法．

5．极限思想与π的计算

前面提到计算圆的面积问题，这里不能不提到一些数学家的名字．

(1) 第一个用科学方法寻求圆周率数值的人是阿基米德

阿基米德在《圆的度量》(公元前3世纪)中用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界，从正六边形开始，逐次加倍计算到正96边形，得到$(3+10/71)<\pi<(3+1/7)$，开创了圆周率计算的几何方法(亦称古典方法，或阿基米德方法)，得出的π值精确到小数点后两位．

(2) 中国数学家刘徽与祖冲之对π的贡献

中国数学家刘徽在注释《九章算术》(263年)时只用圆内接正多边形就求得π的近似值，也得出精确到两位小数的π值，他的方法被后人称为割圆术．他用割圆术一直算到圆内接正192边形．南北朝时代著名数学家祖冲之进一步得出精确到小数点后7位的π值(约5世纪下半叶)，给出不足近似值3.141 592 6和过剩近似值3.141 592 7，还得到两个近似分数值，密率355/113和约率22 / 7．他的辉煌成就比欧洲至少早了1 000年．

(3) 群雄逐鹿π

密率在西方直到1573年才由德国人奥托得到，1625年发表于荷兰工程师安托尼斯的著作中，欧洲称之为安托尼斯率．阿拉伯数学家卡西在15世纪初求得圆周率17位精确小数值，打破祖冲之保持近千年的纪录．德国数学家柯伦于1596年将π值算到20位小数值，后投入毕生精力，于1610年算到小数后35位数，该数值用他的名字被称为鲁道夫数．无穷乘积式、无穷连分数、无穷级数等各种π值表达式纷纷出现，π值计算精度也迅速增加．1706年英国数学家梅钦计算π值突破100位小数大关．1873年另一位英国数学家尚可斯将π值计算到小数点后707位，可惜他的结果从528位起错了．到1948年英国的弗格森和美国的伦奇共同发表了π的808位小数值，成为人工计算圆周率值的最高纪录．

(4) 电子计算机的出现使π值计算有了突飞猛进的发展

1949年美国马里兰州阿伯丁的军队弹道研究实验室首次用计算机(ENIAC)计算π值，算到203 7位小数．1989年美国哥伦比亚大学研究人员用克雷－2型和IBM－VF型巨型电子计算机计算出π值小数点后4.8亿位数，后又继续算到小数点后10.1亿位数．至今，最新纪录是小数点后25 769.803 7亿位．

§ 1.2　函数的极限

1.2.1　函数的极限

实际问题 1.1　圆的周长与面积

在生产和实践中，人类首先学会求正方形、矩形、三角形、平行四边形、梯形、任意多边形的周长和面积．在很早很早以前，人们求圆的周长和面积还是一件很困难的事情，还不知道圆的周长$=2\pi r$，圆的面积$=\pi r^2$，也不知道π的值是多少．我国古代数学家刘徽为了计算圆的周长和面积，于魏景元四年(公元263年)创立了“割圆术”．刘徽借助圆的内接正多边形序列定义了圆的周长和面积．刘徽的作法是：作圆的第一个内接正多边形(正六边形)，平分每个边所对的弧作第二个内接正多边形(正十二边形)，以下用同样的方法，继续作圆的第三个内接正多边形(正二十四边形)，圆的第四个内接正多边形(正四十八边形)……如图 1.1所示．

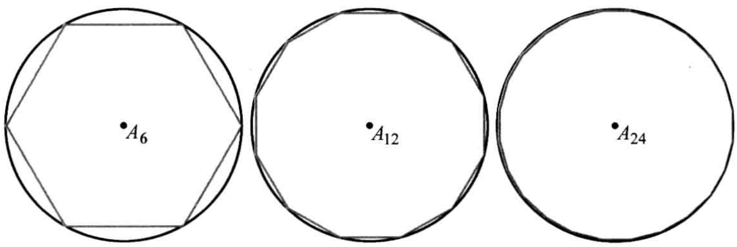

图 1.1　正多边形逼近圆

显然无论正多边形的边数怎样多，每个圆内接正多边形的周长和面积都容易求得．于是，得到圆的内接正多边形周长序列：

$$P_6, P_{12}, P_{24}, \cdots, P_{2^{n-1}6}, \cdots. \tag{1.1}$$

圆的内接正多边形面积序列：

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_{2^{n-1}6}, \cdots. \tag{1.2}$$

其中，通项$P_{2^{n-1}6}$表示第n次作的正$2^{n-1}\times 6$边形的周长，通项$A_{2^{n-1}6}$表示第n次作的正$2^{n-1}\times 6$边形的面积．显然，正多边形周长序列逼近了圆的周长，正多边形面积序列逼近了圆的面积．刘徽说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．"很明显，当圆的内接多边形的边数成倍无限增加时，圆内接正多边形周长序列将无限地趋近于圆的周长．圆内接正多边形的面积序列将无限地趋近于圆的面积．即多边形序列的极限是圆．多边形极限位置的周长是圆的周长，多边形极限位置的面积就是圆的面积．对于正多边形的周长，当 n 无限增大时，圆的内接正多边形周长序列$\{P_{2^{n-1}6}\}$将逐渐稳定趋于某个数l．"割之弥细"，用圆的内接正多边形的周长近似代替圆的周长，而圆的周长"所失弥少"，当"割之又割，以至于不可割"，即圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，圆的内接正多边形的极限位置"则与圆合体"，此时，圆的内接正多边形周长序列$\{P_{2^{n-1}6}\}$稳定于某个常数l，l就是圆的周长，只有在无限的过程中才能真正"无所失矣"．

图 1.1的渐近过程很快，我们可以放慢了看一下,如图 1.2所示(这不是刘徽当时的原作)．

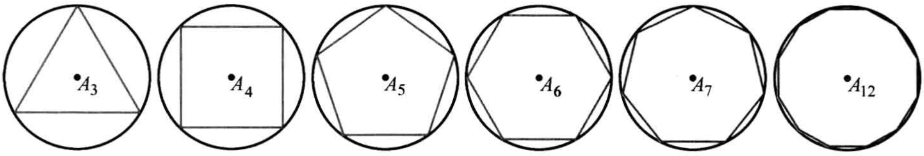

图 1.2　正多边形逼近圆

根据上述分析，圆的周长可以这样定义：若圆的内接正多边形的周长序列$\{P_{2^{n-1}6}\}$稳定于某个数l(当n无限增大时)，则l 为圆的周长．

圆是曲边形，它的内接多边形是直边形，二者有本质区别，但是这个区别又不绝对，当"圆的内接正多边形的边数无限增加"时，圆的内接多边形转化为圆周．因此，在无限的过程中，直边形能转化为曲边形．即在无限的过程中，由直边形的周长序列得到了曲边形的周长．这就是极限思想和方法在定义圆的周长时的应用．

根据圆周长的定义，可以计算出半径为r的圆周长 $c = 2\pi r$.

实际问题 1.2 温度下降趋势

将一个温度为500°C的物体移置室温为25°C的房间中，观察温度变化趋势．结果发现，开始高温物体温度降低很快，迅速降到400°C、300°C、200°C、100°C……随着时间的延长，高温物体温度下降越来越慢，经验告诉我们，如果"时间足够长"，这个物体的温度将降至室温25°C．如图 1.3所示．用符号表示为

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 25.$$

实际问题 1.3 电阻对电流强度的影响

由Ohm定律可知，电压＝电阻×电流强度，$U = RI$，当电压U一定时，电流强度I与电阻R成反比，$I = \dfrac{U}{R}$，即随着电阻的增大电流会越来越小．如图 1.4所示．用符号表示为

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0.$$