

高等学校试用教材

机床动力学

昆明工学院 杨 肃 唐恒龄 廖伯瑜 编

昆明工学院印刷厂印

前 言

本书是根据1978年4月在天津召开的高等学校一机部对口专业座谈会的精神，作为机制专业高年级学生的选修教材以及机制专业和有关机械类专业的研究生教材编写的。

随着生产技术的飞速发展，对机床动态性能的要求越来越高。为了解决机床工作过程中可能出现的各种振动问题，设计出具有良好动态性能的机床，需要具有广泛的基础知识和一定的专门知识，因此出现了研究机床各种动力学问题的一门独立的新学科——《机床动力学》，而且可以说，今天《机床动力学》已经成为从事机械制造的工程技术人员所必需具备的基本知识。近年来，由于机械振动理论的日趋成熟，先进的动态试验和数据分析处理技术的出现，电子计算机的广泛运用，《机床动力学》得到了迅速的发展，并在生产中发挥了越来越大的作用，国内外的一些高等学校也相继开出了这门课程或类似课程，但是这方面的书籍，特别是能作为这门课程的教材的书籍还很少，为此，我们编写本书以满足教学的需要，也为从事机械振动的研究人员以及从事机械设计和制造的技术人员提供一本参考书。

本书从加强基础理论的基本思想出发，力图系统地介绍有关《机床动力学》的基础知识和最新成就，在选材的深度和广度上，适当地考虑了不同专业和不同选修学时数的要求，以及大学生和研究生的不同要求，以便各校使用时有一定的选择余地。

由于我们的水平有限以及编写时间仓促，本书难免有不少缺点和错误，肯定有许多需要改进之处，恳切地希望读者和有关同志为本书定稿提出宝贵意见。

本书聘请天津大学审稿。在编写过程中，得到我院屈维德教授的多方指导，其他许多同志也为本书做了不少工作。一机部教编室朱骥北同志对本书的编写给予了大力的支持和帮助，并且提出了很多宝贵的意见。特此表示衷心的感谢！

编者 1981.1.

考 参 文 献

- [1] Dynamic Design Analysis, VIA the Building Block Approach, A. L. Klosterman, Ph. D. and J.R. Lemon. 《The Shock and Vibration Bulletin》, Vol. 42-Part 1, 1972, P. 97
- [2] Experimental and Computation Identification of Dynamic Structural Models, J. Tlustý and T. Moriwaki, 《CIRP Annals Manufacturing Technology》, Vol. 25/2, 1976, pp. 497~503
- [3] Dynamic Behaviour of Complex Structures Using Part Experiment, Part Theory, J. C. Cremen, M. Lalame 《The Shock and Vibration Bulletin》 Vol. 46-Part 5, 1976, P. 177
- [4] Analysis and Optimisation of Structural Dynamics of Machine Tool by a Synthesis of Dynamic Rigidity Program System, Mosataka, Yoshimura, 《M.T.D.R》16th, 1975, P. 209
- [5] Elements of Vibration Analysis, L. Meirovitch, McGRAW-HILL, Inc. 1975
- [6] Analysis of a Milling Machine: Computed results Versus Experimental Data, J. A. W. Hijink, A. C. H. Van Der Wolf 《M.T.D.R》14th 1973, P. 553
- [7] 机械振动学, 加藤仁, 凡井悦男
- [8] The Mechanics of Vibration, R. E. D. Bishop, D. C. Jonson
- [9] 有限元素法选讲, 复旦大学数学系, 科学出版社, 1976
- [10] 有限元法讲座, 西安交通大学, 《机床》1978, No 2-6,
- [11] Development of the Finite Element Method for Vibration Analysis of Machine tool Structure and its Application, H. Sato, 《M.T.D.R》14th, 1973, P. 545
- [12] Stiffness, Mass and Damping Matrices from measured Mobilities, 《AIAA》Paper No 74-388
- [13] Dynamics of Structures, Hurty W. C., Rubinstein M. F., Prentice Hall, 1964
- [14] Dynamic Analysis of structural systems using Component Modes, Hurty W. C., 《AIAA》Journal, Vol. 3, No 4 April 1965,
- [15] Methods of Component mode Synthesis R. R. Craig, 《The Shock and Vibration Digest》, Vol 9, No 11, November 1977

- [16] 机床动力学,《机械研究》第30卷第2号~第31卷第 号,译文见《昆工科技》1979.3~
- [17] Analysis of Machine Tool Joints by the Finite Element Method, N. Baek, M. Burdekin and A. Cowley,《M.T.D.R.》14th, 1973, P. 529
- [18] Computer Approach to Dynamically optimum Design of machine tool structures, M.Yoshimura, T.Hoshi,《M.T.D.R.》12th, 1971, P. 439
- [19] Initial Application of Dynamic Structural Analysis to Computer-Aided Design of Machine Tool, Tetutarō Hoshi and Mastaka Yoshimura,《M.T.D.R.》, 14th 1973, P.559
- [20] 机械加工中的自振现象——分析和对策,星 铁太郎,工业调查会,1977
- [21] Steady State Vibration, Salter, J.P. 1969.
- [22] 机械工程手册第21篇,机械振动,昆明工学院主编,机械工业出版社,1978.
- [23] 电子计算机常用算法,科学院沈阳计算所,科学出版社1976.
- [24] 分析机床动态特性的复模态法, J.Peters《机床译丛》1979, 1
- [25] 机械振动,清华大学,机械工业出版社, 1980.
- [26] 振动分析中的机械阻抗方法专辑,《机械强度》, 1980 第2期.
- [27] “机械制造中的测试技术”讲义,华中工学院机械教研室,1979.
- [28] 随机振动与谱分析导论,[英] D.E. 纽兰著,机械工业出版社,1980.
- [29] 随机数据分析方法,[美] J.S.贝达特, A.G.皮尔索著,国防工业出版社,1980.
- [30] 快速付里叶变换, E.O. 布赖姆著,上海科学技术出版社,1979.
- [31] 机械振动,力学参考资料(九),科学技术文献出版社重庆分社, 1978.
- [32] 波谱分析基础,郑治真编,地震出版社,1979.
- [33] 机械阻抗译文集,哈尔滨工业大学、湖南大学、国家建委建筑机械研究所联合编译,1979.
- [34] “机床振动”讲义,西安交通大学理论力学、机切教研室,1978.
- [35] Dynamic Structural Identification Tasks and Methods, J. Tlustý《Annals of the CIRP》 Vol.29/1/1980.
- [36] Расчет Динамических Характеристик Шпиндельных Узлов Станков,《СТАНКИ И ИНСТРУМЕНТ》, 1976, 3
- [37] 讲学及座谈资料汇编, M.weck, 机床设计和研究第二届年会资料 1980, 9.
- [38] Малые перемещения В Станках, В.Э.мун, МАШГИЗ 1961.
- [39] Theory of Vibration with Applications, WILLIAM T.THOMSON, Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, N.J. 1972.
- [40] Matrix methods in elastomechanics DR-ING. EDUARD C. PESTEL, MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, 1963.

第一章 绪 论

§ 1 - 1 机床的加工性能和动态性能	1 - 1
§ 1 - 2 机床中的各种振动	1 - 2
§ 1 - 3 机床动力学的主要任务和内容	1 - 4

第二章 振动分析基础

§ 2 - 1 概 述	2 - 1
一、振动的表示方法	2 - 1
二、动力学模型	2 - 3
§ 2 - 2 单自由度系统	2 - 3
一、自由振动	2 - 4
二、受迫振动	2 - 7
三、结构阻尼	2 - 13
四、非谐周期性激振	2 - 15
五、任意激振	2 - 18
§ 2 - 3 多自由度系统	2 - 25
一、运动方程	2 - 25
二、坐标变换	2 - 30
三、固有频率和主振型	2 - 33
四、模态分析	2 - 37
五、运力响应	2 - 41
六、特征值问题	2 - 46
§ 2 - 4 连续系统	2 - 45
一、运动方程	2 - 54
二、梁的横向自由振动	2 - 57
三、梁的受迫振动	2 - 62

第三章 机床的振动特性

§ 3 - 1 机床的振动特性及其分析评定方法	3 - 1
一、表征机床振动特性的各种指标	3 - 1
二、机床振动特性的分析评定方法	3 - 1
§ 3 - 2 机械阻抗及其在机床结构动态分析中的应用	3 - 8

一、机械阻抗的概念	3 - 8
二、振动系统中各元件的机械阻抗	3 - 18
三、简单振动系统的机械阻抗	3 - 24
四、机械阻抗的模态参数表达式	3 - 37
§ 3 - 3 机械阻抗的测试	3 - 39
一、简谐激振下机械阻抗的测试技术	3 - 39
二、瞬态、随机激振下机械阻抗的测试技术	3 - 45

第四章 机床中的受迫振动

§ 4 - 1 机床受迫振动的振源	4 - 1
一、偏心质量	4 - 1
二、齿 轮	4 - 12
三、滚动轴承	4 - 16
四、液压装置	4 - 20
五、电动机	4 - 21
六、交变切削力	4 - 22
§ 4 - 2 减振装置	4 - 23
一、固体摩擦减振器	4 - 23
二、动力减振器	4 - 26
三、兰契斯特减振器	4 - 31
四、摆式减振器	4 - 33
五、冲击减振器	4 - 34
§ 4 - 3 隔振原理	4 - 36
一、单自由度隔振系统	4 - 36
二、多自由度隔振系统	4 - 41

第五章 金属切削过程中的自激振动

§ 5 - 1 自激振动的基本概念	5 - 1
一、自激振动的特征	5 - 1
二、自振系统的基本特征	5 - 1
三、自激振动中能量关系	5 - 3
四、自振系统输入能量的条件	5 - 4
五、自激振动的实例	5 - 5
§ 5 - 2 切削过程的动力特性	5 - 7
一、动态切削过程——颤振的产生	5 - 10
二、切削厚度变化效应——再生效应	5 - 12
三、进给速度变化效应——切入效应	5 - 14

四、切削速度变化效应——下降特性·····	5-15
五、摩擦及其他效应·····	5-16
六、动态切削力的数学表达式·····	5-17
§ 5-3 机床切削的稳定性 ·····	5-20
一、关于机床切削稳定性的概念·····	5-20
二、再生效应的稳定性·····	5-21
三、多种效应的稳定性·····	5-29
四、振型关联效应的稳定性·····	5-35
五、磨削过程的颤振·····	5-38
六、受迫振动对自激振动的影响·····	5-46
§ 5-4 提高机床切削稳定性的基本途径 ·····	5-49
一、减小方向系数·····	5-50
二、提高等效静刚度·····	5-55
三、增加等效阻尼·····	5-59
四、改善切削参数·····	5-62

第六章 机床部件动态特性的分析计算

§ 6-1 主轴部件 ·····	6-1
一、主轴部件动态特性的分析和评价·····	6-1
二、主轴部件振动特性的计算方法·····	6-4
三、传递矩阵法·····	6-8
四、提高主轴部件动态性能的措施·····	6-21
§ 6-2 进给系统 ·····	6-24
一、传动链的扭转振动·····	6-24
二、进给系统的动刚度·····	6-31
三、进给系统的自激振动·····	6-34
§ 6-3 机床结构的结合部 ·····	6-41
一、机床结合部的动力学模型·····	6-41
二、结合部刚度和阻尼的确定·····	6-43
三、机床动态分析时考虑结合部的实例·····	6-50

第七章 机床结构动态性能的分析 and 优化设计

§ 7-1 概 述 ·····	7-1
一、结构动态分析的目的和手段·····	7-1
二、结构动态分析的内容和方法·····	7-3
§ 7-2 机床结构的动力学模型 ·····	7-5

一、集中参数模型·····	7 - 6
二、分布质量梁模型·····	7 - 15
三、有限单元模型·····	7 - 20
§ 7 - 3 应用试验数据建立机床结构的动力学模型·····	7 - 22
一、结构动态特性的模态表达式·····	7 - 23
二、模态参数的识别·····	7 - 26
三、动力学模型的识别·····	7 - 30
§ 7 - 4 子结构的合成原理·····	7 - 36
一、子结构的结合条件·····	7 - 36
二、机械阻抗法·····	7 - 38
三、模态综合法·····	7 - 46
§ 7 - 5 机床结构基本振动特性的计算·····	7 - 53
§ 7 - 6 机床结构动态性能优化设计原理·····	7 - 55
一、模态柔度·····	7 - 57
二、能量分布·····	7 - 58
三、阻尼分配·····	7 - 60
四、优化设计程序·····	7 - 61
五、实 例·····	7 - 62

参考文献

第一章 绪 论

§ 1—1 机床的加工性能与动态性能

为适应机床的现代化发展，除了要求机床具有重量轻、成本低、使用方便和良好的工艺可能性等一般技术经济性能外，还着重要求机床具有愈来愈高的加工性能。机床的加工性能包括其加工质量和切削效率两个重要的方面，通常把被加工零件能达到最高精确度和表面光洁度作为机床加工质量的评定值，把金属切除率或切削用量的最大极限值作为机床切削效率的评定值。事实证明，随着机床加工性能的不断提高，对机床动态性能的要求也愈来愈高。

从图 1 - 1 可以看到，在机床切削加工时，刀具与工件之间的相对变位直接影响着

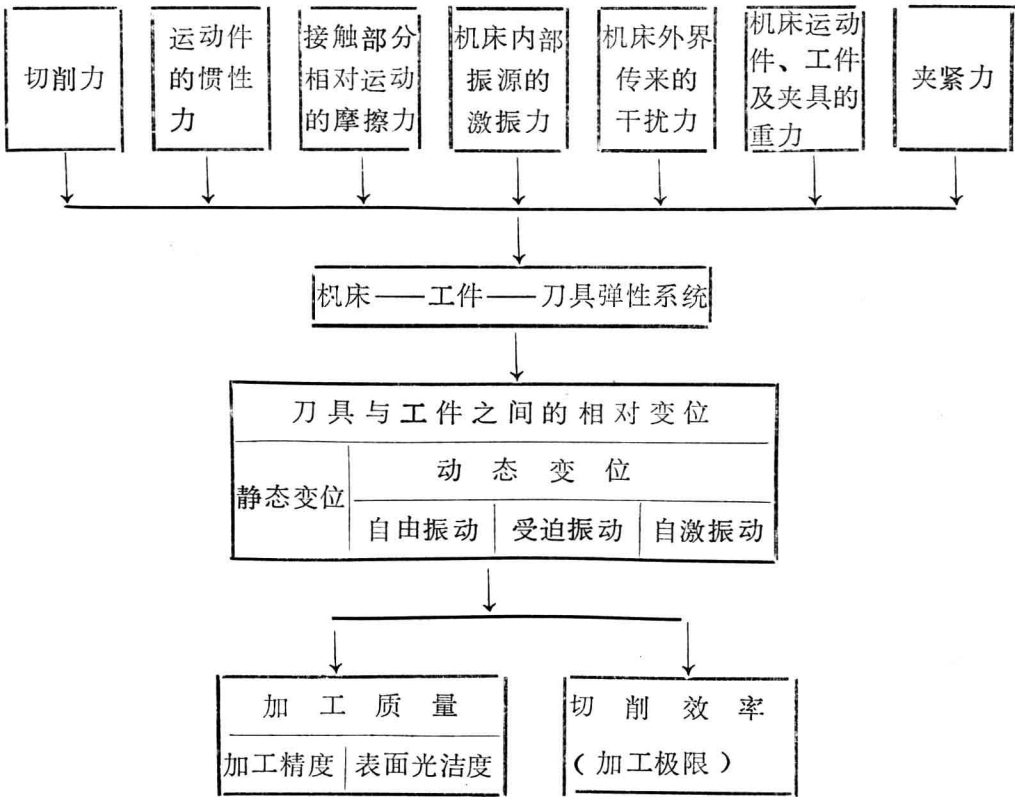


图 1 - 1 作用于机床上的力及其影响

机床的加工质量和切削效率。而刀具与工件的相对变位又受作用在机床上的各种力，以及机床——工件——刀具弹性系统的力学特性的影响。在精加工和重切削时，以动力

作用下系统的响应对机床的加工质量和切削效率影响最大。因此，为提高机床的加工性能，除了减小作用在机床上的各种动态力以外，还应提高机床的动态性能，也即提高机床抵抗动态作用力的能力。下面将进一步叙述机床的加工质量和切削效率与机床动态性能的关系。

机床的加工质量，不仅取决于机床的制造误差、弹性变形、热变形和磨损等因素，而且，取决于机床切削时产生的振动。从被加工零件的形成过程知道，如果机床切削时，刀具与工件沿着预定的轨迹作相对运动，则能得到所希望的加工质量。但是，在实际切削时，来自切削过程、机床传动系统以及机床外界的各种力，将作用在机床——工件——刀具的弹性系统上，其中的静态力引起弹性变形，动态力引起振动，致使刀具与工件之间产生相对变位，改变了它们之间的正确位置关系，并在加工表面上留下振纹，从而降低了被加工零件的精确度和光洁度。因此，要提高机床的加工质量，除了减小振源外，还应提高机床的抗振性，使机床在各种动态力作用下，刀具与工件的相对振动量能控制在允许的范围之内。

机床的切削效率，往往不是由机床的功率、机床所能承受的最大载荷所决定，而是由机床切削时发生自激振动的条件所决定。这是因为切削过程的自激振动，破坏了切削过程的稳定性，不仅不能满足加工质量的要求，而且切削也难以继续进行。为了使切削能在保证加工质量的条件下顺利进行，就不得不降低切削用量，从而限制了机床性能的充分发挥，降低了切削效率。因此，要提高机床的切削效率，就应提高机床的稳定性，使机床在其额定功率范围内应用时，都不会产生切削自激振动。

综上所述，要提高机床加工性能，从动力学的角度出发，就应提高机床的动态性能。简单地说，就是提高机床抵抗受迫振动和自激振动的能力，使机床的振动量控制在满足加工性能所允许的范围之内，在保证加工质量的前提下，充分发挥切削效率。

在相同激振力作用下，机床产生的振动愈小，表示其抵抗受迫振动的性能愈好。所以，机床抵抗受迫振动的能力，一般用机床产生单位振动量所需要的激振力来表示。

机床在匀速运动状态下受到干扰后，如果能恢复到原来的运动状态，表示机床是稳定的，如果不能恢复原状而产生振动，则是不稳定的。为避免切削过程中出现自激振动，就需提高机床切削的稳定性；为避免机床传动系统中出现自激振动（爬行、振荡……），就需提高机床运动的稳定性。机床切削稳定性的好坏，亦即抵抗切削自激振动的能力，用开始出现自激振动的切削宽度来表示，即极限切削宽度愈大，机床抵抗切削自激振动的能力愈好。

如何提高机床的动态性能，是机床动力学的重要课题，将在以后各章中予以讨论。

§ 1—2 机床中的各种振动

机床振动不仅使工件和刀具的相对位置和相对速度发生变化，恶化了切削过程，是限制加工质量和切削效率的主要原因。而且，振动还使机床和刀具在动载荷下工作，加

速了二者的磨损和精度的丧失，从而降低了机床的使用寿命和工具的耐用度。振动还产生不利于环境的噪声。因此，机床振动是研究机床动态性能的主要内容。要提高机床动态性能就必须对机床中可能产生的各种振动，研究其产生的机理，分析其特性，掌握其规律。进而找出防治各种振动的相应措施，把应该避免的振动予以避免，不能避免的振动，则应将其振动量控制到允许的范围之内。这是机床动力学的另一重要课题。

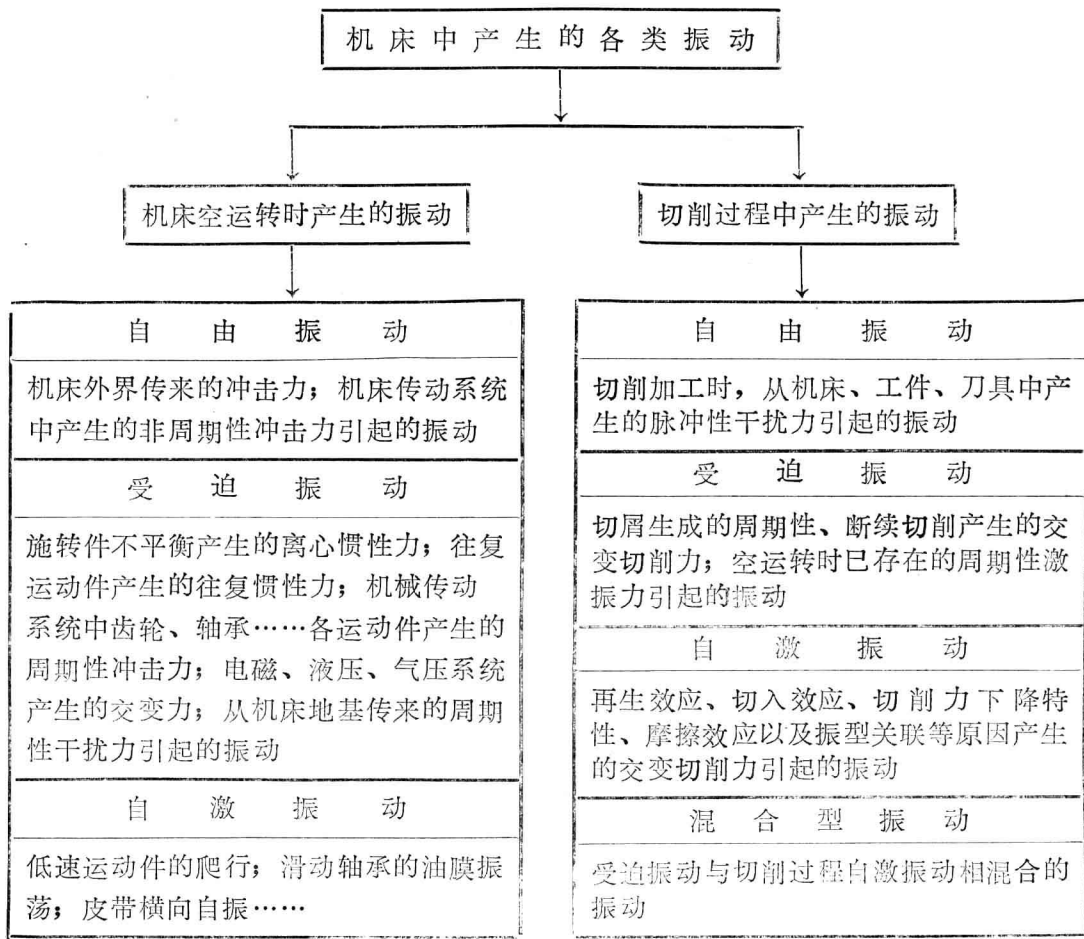


图 1 - 2 机床振动的类型

在图 1 - 2 里，表示机床中产生的各类振动及其原因。为便于寻找振动的起因，将其分为两大类：

机床空运转时产生的振动 这种与切削加工无关，主要是由机床传动系统引起的振动，可以先测出机床停止时由机床外界干扰引起的振动，再测出机床不进行切削空运转时的振动，排除前者就找出后者的振源。这种振动不仅影响机床运动的平稳性，而且也将影响切削过程，虽然容易找出振源及其传递路线，采取抑制和隔断的措施进行控制。但是，要将这种机理虽然清楚的振动控制到很小，还存在技术上的实际困难，例如

高精度磨削加工中，影响很大的就是这种振动。

切削加工中产生的振动 这种伴随切削加工产生的振动，虽然受机床空运转时产生的振动的影响，但是，主要是由于切削过程不稳定而引起的。它直接影响着加工质量，为避免这种振动的产生以保证加工质量，通常就需要降低切削效率。因此，在控制这种振动时，应考虑机床的类型，对于精密机床应在保证加工质量的前提下考虑切削效率，相反，对于粗加工重型机床应在保证切削效率的前提下考虑加工质量，对于普通机床则应处在二者之间。

如图 1-3 所示，在排除了机床停止和空运转时产生的振动之后，进行切削试验即可得出产生这种振动的原因，再进一步改变机床转速进行试验，又可分辨出其中的种类，对于转速改变频率随着改变的振动，就是其中的受迫振动；对于转速改变频率不变或稍变的振动，就是其中的自激振动。

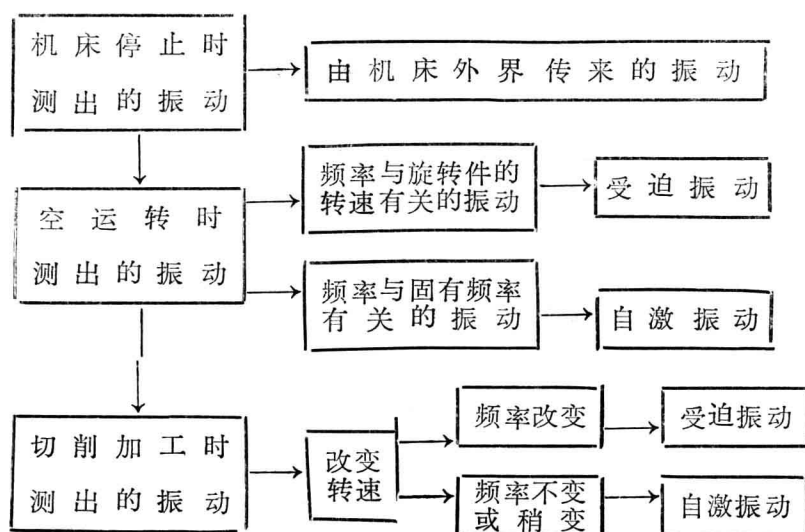


图 1-3 振动原因的分析

§ 1—3 机床动力学的主要任务和内容

由于机床振动和结构分析理论的迅速发展；先进的动态试验和分析技术的不断出现；电子计算机的广泛运用；以及机床切削自振理论的逐渐深入和统一。目前，已有可能解决机床在工作过程中由于动态力的作用而产生的各种问题，并能在设计阶段对机床结构的动态特性作理论分析，进行机床结构的动态优化设计，用最经济、合理的手段获得具有预定动态性能指标的结构，使机床发挥出应有的加工性能。机床动力学正是研究这些问题。因此可以说，对机床进行动力分析和动态设计，使所使用的机床能发挥出应有的加工性能，使所设计的机床具有良好的动态性能，就是机床动力学的主要任务。

机床结构十分复杂，它不仅是一个有无限多自由度的振动系统，而且其中还包含有

阻尼和刚度特性不易确定的结合部，另外，机床的振动类型繁多，其产生的原因又各式各样，因此，为了进行机床的动力分析和动态设计需要具有广泛的知识。除了已在其他课程中学习过的线性代数、概率论、有限单元法和电子计算机等一般基础知识外，本书力图对其他所需要的知识作系统的简要介绍。

全书将机床力学的主要内容大致分为三个部分：第一部分是基础知识，包括第二章和第三章；第二部分是机床中可能出现的各种振动问题，包括第四、五两章；第三部分为第六章和第七章，主要介绍机床动力分析和动态设计的其他有关知识。

动力学的基础知识主要包括振动的基本理论和测试技术两个方面，这两个方面各自都有很丰富的内容，本书主要从机床动力分析和动态设计的现实要求出发，扼要加以介绍。第二章讨论振动分析的基本理论，包括单自由度系统、多自由度系统和连续系统振动的基本问题，其中着重介绍了具有重要实用价值的内容。例如，各种系统在不同动态力作用下的响应；频谱分析；模态分析理论等。第三章讨论与振动测试有关的问题，主要以机械阻抗分析和付里叶分析技术为中心来介绍，包括机床各种振动特性的测试方法，稳态正弦激振、瞬态激振和随机激振下机械阻抗的测试，数据处理和分析技术等。

第四章讨论机床中可能出现的各种受迫振动问题。对机床中各种受迫振动的振源，减小激振力的措施，各种减振装置和隔振装置的设计与计算，以及提高机床抗振性能等内容都作了比较详细的介绍。这些都可以直接应用于生产实际中。

机床切削中出现的自激振动，问题比较复杂，第五章专题介绍了这方面的内容。其中包括自激振动的基本概念；切削过程的动力特性；产生切削自振的各种效应——再生效应、切削力的下降特性、振型关联；以及切削自振与机床结构和切削参数的关系；提高机床切削稳定性的基本途径等。本章所介绍的内容既是机床动态设计的基础之一，也是解决生产实际问题的重要依据。

机床的动态设计是在已知机床工作条件的情况下，设计机床的结构，使它的动态性能满足预定的要求。为此，不仅需要明确评价机床动态性能的具体指标，还需要建立机床结构的动力学模型，计算出这些指标。由于机床结构的复杂性，要建立它的动力学模型，除了应熟习通过对实际结构的简化来建立其动力学模型的一般方法外，还应该掌握各个领域都广泛采用的子结构分析法，以及应用测试数据建立动力学模型的技术——**系统识别**，即已知系统的输入（激振）和输出（响应）识别系统参数的技术。在第六、七两章中介绍了有关这方面的内容。

第六章结合机床的主轴部件、进给系统和结合部等进行讨论，其中着重介绍了传递矩阵法、进给运动件的爬行、结合部刚度和阻尼特性的确定等重要内容。

第七章以复杂结构和机床整机为对象，比较全面地介绍了各种型式的动力学模型和建立动力学模型的各种方法，其中包括系统识别技术和子结构合成的机械阻抗法、模态综合法等较新的内容。最后介绍了以模态柔度和能量平衡原理为基础的机床结构动态优化设计原理。

第二章 振动分析基础

§ 2-1 概 述

机械振动是一种比较复杂的物理现象,为了研究的方便,需要根据不同的特征将它进行分类。例如,按产生振动的原因,可以分为自由振动、受迫振动和自激振动;按振动系统结构参数的特性,可以分为线性振动和非线性振动;按振动系统的自由度数目,可以分为单自由度系统振动、多自由度系统振动和弹性体振动;按振动的规律,可以分为简谐振动、非谐周期振动、瞬态振动和随机振动等等[22]。本章从机床动力分析的现实要求出发,简要介绍有关的基本理论,主要是在线性振动的范畴内,讨论单自由度系统、多自由度系统和弹性体的自由振动和受迫振动。有关自激振动的问题,将在第五章中结合机床的实际加以讨论。

振动的理论分析,首先是建立振动系统的数学模型(动力学模型),利用动力学的基本原理或分析力学的方法推导出系统振动的微分方程,然后寻求方程的解而得到系统振动的规律。因此,在具体讨论各种振动问题之前,先对振动的一般表示方法和动力学模型作一些简单的说明。

一、振动的表示方法

振动是时间的函数,通常以时间为横坐标,以振动体的某一振动量(位移、速度或加速度)为纵坐标的线图来描述振动的规律,这种线图称为振动的时间历程。

简谐振动是一种最简单、最基本的振动形式,也是研究其他形式振动的基础。简谐振动的时程是正弦或余弦曲线,它的位移可以表示为

$$x = A \cos \omega t \quad \text{或} \quad y = A \sin \omega t \quad (2-1)$$

式中 A 表示振动位移的最大值,称为振幅; ω 称为振动的角频率,它的单位是(rad/s)。一般常用频率 f (c/s或Hz)或周期 T (s)表示振动的快慢, ω 、 f 、 T 之间的关系为:

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T} \quad (2-2)$$

简谐振动还可以用旋转矢量或复数来表示。

1. 旋转矢量表示法

一个矢量,其模为 A ,以匀角速度 ω 作逆时针旋转时(图 2-1),它在横轴 x 和纵轴 y 上的投影分别为:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t$$

正好和简谐振动的表达式 (2-1) 一样, 因此可以用旋转矢量来表示简谐振动。这种表示方法, 用于讨论频率相等的振动合成是十分方便的, 因为可以利用矢量求和的方法。本书选用旋转矢量在横轴上的投影 $x = A \cos \omega t$ 表示简谐振动。对振动位移 x 求一阶和二阶导数, 得到振动速度 v 和加速度 a 的表达式:

$$\left. \begin{aligned} v = \dot{x} &= \omega A \sin \omega t = \omega A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ a = \ddot{x} &= -\omega^2 A \cos \omega t = \omega^2 A \cos (\omega t + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

可见, 振动速度和加速度可以用模为 ωA 和 $\omega^2 A$ 的矢量来表示, 它们的旋转角速度与位移矢量相同, 都是 ω , 但速度矢量比位移矢量超前 $\pi/2$, 加速度矢量比位移矢量超前 π 。

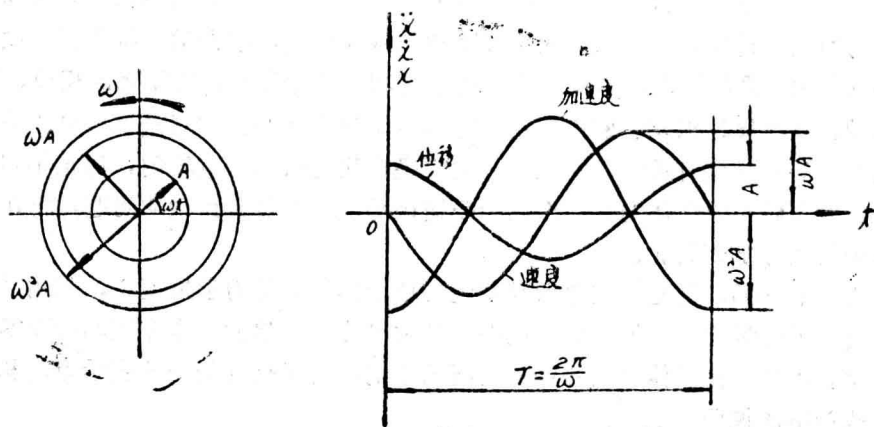


图 2-1

2. 复数表示法

一个复数 $Z = a + ib$, 在复平面上是一个点, 它和坐标原点的连线可看作为复平面上的一个矢量, 称为复矢量。设此复数的模 $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = A$, 幅角 $\arg Z = \omega t$, 则复数 Z 的实部 $\operatorname{Re} Z = a = A \cos \omega t$, 虚部 $\operatorname{Im} Z = b = A \sin \omega t$, 因此可将它表示为

$$Z = A \cos \omega t + i A \sin \omega t = A e^{i\omega t} \quad (2-4)$$

可见, 复数 Z 的实部和虚部都表示一个简谐振动, 如图 2-2 所示。

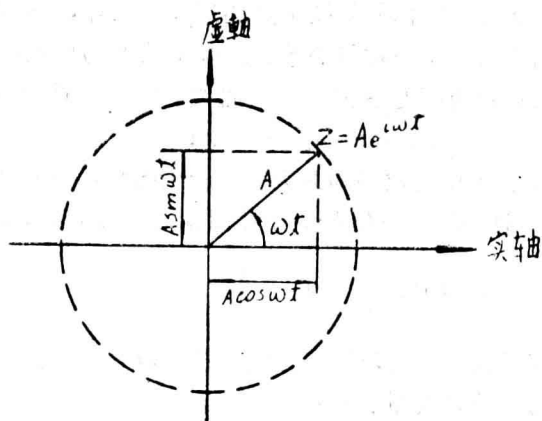


图 2-2

为了和矢量表示法一致, 我们规定用复数的实部来表示简谐振动, 而且为了运算的方

便，常将简谐振动写为

$$x = Ae^{i\omega t} \quad (2-5)$$

但要记住：所研究的简谐振动是指这个复数的实部。同样，对式(2-5)求导可得速度和加速度的表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= i\omega Ae^{i\omega t} \\ \ddot{x} &= -\omega^2 Ae^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

以后将会看到，用复数表示法是很方便的。

上面叙述的表示方法，已经能够完全地描述一个简谐振动，但对于更复杂的振动，仅用时间历程在时间域上描述振动的规律是不够的，还需要用振动频谱在频率域上描述振动的规律。各种复杂振动的频谱将在以后逐步地加以讨论。

二、动力学模型

机械系统的振动特性，主要决定于系统本身的惯性、弹性和阻尼。实际机械或结构的这些性质都是比较复杂的，为了能运用数学工具对它们的振动特性进行分析计算，需要将实际系统作一定程度的简化：忽略次要的因素，简化其质量、刚度、阻尼等参数的性质（如线性化）和分布规律（如离散化），建立起既能反映实际系统的动力学特性又有可能进行分析计算的动力学模型。

根据实际系统的复杂程度和所采用的简化方法，动力学模型大致可分为三类：集中参数模型，有限单元模型和连续弹性体模型。集中参数模型，由只有惯性的惯性元件（集中质量、刚体、圆盘）、只有弹性的弹性元件（弹簧、弹性梁、弹性轴段）和只有阻尼的阻尼元件（阻尼器）等离散元件构成。有限单元模型是由有限个离散的单元组成，而每个单元则是连续的。连续弹性体模型是将实际结构简化为质量和刚度均匀分布或按简单规律分布的弹性体。前两类模型属于离散系统，其自由度数是有限的，系统的运动状态用常微分方程来表达。弹性体的自由度数是无限的，它的运动状态需用偏微分方程来表达。

对实际机械或结构进行振动分析时，建立它的动力学模型是很重要的一步。但实际系统的情况十分复杂，而且，由于所要解决的问题不同，或者简化的程度不同，即使同一个实际的系统，也可以建立起不同的动力学模型。因此，将在以后有关的章节中，结合各种具体的问题进行讨论。

§ 2-2 单自由度系统

单自由度系统是最简单的振动系统。虽然只有为数不多的实际振动问题可以简化为这种模型，但是从单自由度系统引出的许多基本概念和分析方法，同样适用于更复杂的振动系统，是振动分析的重要基础。所以，必须熟练地掌握这方面的内容。