碧海书道 BOOK HOUSE 高等学校数学学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

线性代数

全程学习指导

丛书主编/北京航空航天大学 徐兵

编著 李海燕 王艳芳

配人大三版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

碧海书道 BOOK HOUSE 高等学校数学学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

线性代数

全程学习指导

丛书主编/北京航空航天大学 徐兵

编著 李海燕 王艳芳

配人大三版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程学习指导(配人大三版)/李海燕,王艳芳编著.—2版
大连:大连理工大学出版社,2006.7
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 7-5611-2434-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075387 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:9.5 字数:381 千字
2006 年 7 月第 2 版 2006 年 7 月第 5 次印刷

责任编辑:梁 锋 邱明霞 责任校对:舒 道
封面设计:熔 点

定 价:12.00 元

高等学校数学学习辅导丛书

编写委员会

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课，对理工类、经管类学生都非常重要。21 世纪是知识经济时代，数学的重要性更显突出，人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说，其重要性更是不言而喻。

作为一名从事大学数学教学和科研工作 40 余年的教师，我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10 多年来，该社先后出版了 50 余种相关的大学数学辅导图书，我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书，对于图书的内在质量和选题设计，我非常认可，因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上，大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10 周年之际，我受出版社之托，担任该系列丛书编委会主任，深感责任重大。一方面，需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质；另一方面，需要在对现有图书进行规划和整合的基础上，结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此，本次修订主要围绕以下几个方面展开：

第一，坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校，并且都是知名教师。例如，韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中，2005、2006 连续两年全校排名第一；大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”；南开大学的周概容教授连续 17 年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二，对于全部习题进行重新演算，以保证解题过程的正确，而

且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题，努力寻求最优解法，对于重点例题、习题给出多种解法，以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力，可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三，针对学生不同的学习阶段，设计了不同层次的系列图书，力图为学生提供学习数学的立体空间，引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学，从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门，要尽快适应大学的学习环境，注重夯实大学数学的基础，为学习专业课打下基础；高年级阶段，很多学生准备进一步学习深造，报考研究生，对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点，本套丛书设计了四大系列。

习题全解(全析)系列 为读者解答教材中的习题，像习题课一样，与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结，扎实掌握基础知识，领悟数学的真谛。本系列图书"不是好学生的作业本，而是优秀教师习题课的教案"。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列 按节同步，讲解细致，其主要特点是"基础、同步"，帮助读者重点掌握大学数学中的"基本概念、基本理论、基本方法"。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代"以老师讲解为主"到大学时代"以学生自学为主"学习方式的转变。

全程学习指导系列 指导学生准确理解大学数学中的概念、原理，熟练掌握解题的基本思路、方法，提高分析问题、解决问题的能力，同时，让学生熟悉研究生考试的各类题型，在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列 以习题讲解为主，在注重基本解题能力培养的同时，增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题，在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

我们欢迎读者通过各种方式与我们联系，提出建议与意见，以利于本套丛书千锤百炼，惠及更多学子。

祝大家学习进步，前程似锦！

徐 兵

2006 年 6 月

于北京航空航天大学

编者的话

大连理工大学出版社的朋友邀请我写作《线性代数全程学习指导》,这是对我工作的肯定和鼓励。作为教师,我愿意将我的教学经验与大家共享,与大家共同学习,共同提高。更加上有老同事、老朋友"最受学生欢迎的好老师"王丽燕的热情鼓励和指导,以及同行好友王艳芳的精诚合作,更增添了我写好本书的信心。

《线性代数》是大学各门类、各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量,提高应试能力,因此,本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的"本科数学基础课程教学基本要求"(教学大纲),以及教育部最新的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求编写。

本书按照被全国许多高校经济类、管理类专业采用的《线性代数》(人大第三版,赵树嫄编)的章节顺序编写,共 5 章,每章均有 4 个版块。

知识点考点精要 列出基本概念、重要定理、主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解 精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广,类型多,技巧性强,旨在提高大家分析问题、解决问题的能力,帮助大家掌握基本概念和理论,开拓解题思路,掌握解题技巧。

教材习题同步解析 本版块为教材习题全解,为大家提供一种比较规范的解题思路和方法,以便读者对照和分析。

模拟试题自测　模拟试题力争反映考试的重点、难点，帮助大家进一步强化训练解题能力，巩固和提高学习效果。

在“典型题真题精解”和“模拟试题自测”版块中采用了大量历年考研真题。为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”标注方式，如“060406”，说明此题是 2006 年数学四的考题，分值 6 分。

常言道，熟能生巧。剖析一定数量的范例，做一定数量的练习，无疑是应试的有效途径。在此过程中扎实掌握基本概念、基础理论、常用方法，注重科学思维方式的培养，才能掌握“数学力”，并将之转化为一种“数学素质”和“竞争力”。

本书自出版以来，受到读者的一致喜爱。想到成千上万的学子曾经阅读过此书，作为教师，我深感欣慰。本次修订，有许多新的教学体会融入其中，并根据考研大纲的变化，对重点、难点及例题都进行了调整，订正了原书的印刷错误，使其日臻完善。

此次修订，得到了编委会诸位前辈和同仁的指点，特此致谢！

希望读者通过 E-mail 等方式给我们提出宝贵意见和建议。

李海燕

2006 年 7 月

目录

第一章　行列式

知识点考点精要

行列式的概念和基本性质，行列式按行(列)展开定理及应用.

一、行列式的概念

n 阶行列式定义为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

右式为行列式 D_n 的展开式，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列，$N(j_1j_2\cdots j_n)$表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，即 D_n 的展开式中共有 $n!$ 项，其中每一项都是取自于 D_n 的不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是：当这一项中 n 个元素的行指标按自然顺序排列时，由这 n 个元素的列指标所组成的排列为偶(奇)排列，该项取正(负)号.

D_n 简记为 $|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$.

二、行列式的基本性质

1. 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

2. 交换行列式的任意两行(列)，其值变号.

若行列式有两行(列)的对应位置的元素相等，其值为零.

3. 用数 $k(k\neq0)$乘行列式的某一行(列)的所有元素，等于用 k 乘行列式，即行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外边来.

若行列式某行(列)的所有元素全为零，其值为零.

若行列式有两行(列)的对应位置的元素成比例，其值为零.

4. 若行列式的某一行(列)中的各元素均为两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 若把行列式的某行(列)中各元素同乘数 $k(k\neq 0)$,然后加至另一行(列)对应位置元素上,其值不变.

为了帮助读者记忆行列式的性质,归纳如下:

(1)两个翻:全翻(转置)不变,部分翻(交换)变号.

(2)三个零:某行(列)元素全为零,两行(列)对应位置元素相等.两行(列)对应位置元素成比例.

(3)三个可:可提性,可分性,可加性.

三、行列式的计算方法及有关定理

1. 定义法

2. 化为上(下)三角形法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(上三角形)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(下三角形)}$$

特别地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(对角形行列式)}$$

具体步骤为:若第一列的第一个元素为0,先将第一行与其他行交换,使第一列第一个元素不为0;然后把第一行分别乘以适当的数加至其他各行,使第一列除第一个元素外其余元素全为0;再用同样的方法处理 a_{11} 的余子式;依次下去,直到将行列式

化为上三角形行列式为止，其值为主对角线上元素的乘积.

3. 降阶法

(1)按某行(列)展开

定理：n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i\text{ 行})$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j\text{ 列})$$

当 $i\neq s$ 时，$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0$；

当 $j\neq t$ 时，$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0$.

即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D_n & i=s\\ 0 & i\neq s\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D_n & j=t\\ 0 & j\neq t\end{cases}$$

(2)按 k 阶子式展开

定理(拉普拉斯定理)：

在 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 中，任取 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$)，由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式的值，即

$$D_n=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

其中，A_i 是 k 阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式($t=C_n^k$).

(3)分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵(参看第二章).

4. 拆项法(利用性质 4)

5. 递推法

利用行列式的性质或按行(列)展开定理，找出 D_n 与 n 个同结构的较低阶的行列式 D_3，D_2 之间的关系式，从而求出 D_n 的值.

6. 归纳法(对阶数归纳)

7. 范德蒙行列式法

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

8. 反证法

在解题中，往往几种方法结合使用，使计算简化.

四、行列式的应用

1. 用克莱姆法则求非齐次线性方程组的惟一解.

2. 用齐次线性方程组系数行列式的值，讨论其解的情况.

典型题真题精解

【例 1】 利用行列式的定义，求出

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 6 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 6 \\ x & 1 & 2 & 3x \end{vmatrix}$$

的展开式中包含 x^4 和 x^3 的项.

解 由行列式定义知，展开式中的每一项取之于不同行不同列的 4 个元素之积，包含 x^4 的项仅有主对角线 4 个元素之积，若第 1 列不取 $5x$，而取另两个 x 之一，该项至多取主对角线上的两个含 x 的元素，则至多为 x^3，所以包含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(1\,2\,3\,4)}5x \cdot x \cdot x \cdot 3x = 15x^4$$

展开式中包含 x^3 的项只有两种情形，第 1 列取第 2 行和第 4 行元素，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x \end{vmatrix} = (-1)^{N(2\,1\,3\,4)}1 \cdot x \cdot x \cdot 3x = -3x^3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(4\,2\,3\,1)}6 \cdot x \cdot x \cdot x = -6x^3$$

故展开式中包含 x^4 和 x^3 的项为 $15x^4 - 9x^3$.

本题主要利用行列式定义，展开式中的每一项是取自于行列式的不同行、不同列的 4 个元素的乘积这一规律. 当展开式中某一项含有 a_{ij} 时，该项必不含有第 i 行的其他元素，且也不含第 j 列的其他元素.

【例 2】 (010403) 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$$

则第 4 行各元素余子式之和为________.

解法 1 用 $M_{4j}(j=1,2,3,4)$ 表示第 4 行各元素的余子式,则

$$M_{41}=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}=-56,\quad M_{42}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{43}=\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=42,\quad M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-14$$

所以

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-56+0+42+(-14)=-28$$

解法 2 用 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 表示第 4 行各元素的代数余子式,由于 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}$,于是有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_4]{\substack{c_1-c_4\\c_2-c_4}}\begin{vmatrix}3&0&4&0\\0&0&0&2\\0&-7&0&0\\-2&0&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}3&0&4\\0&-7&0\\-2&0&-2\end{vmatrix}=2\times(-7)\begin{vmatrix}3&4\\-2&-2\end{vmatrix}=-28$$

本题最容易出现的是计算错误,审题一定要仔细,求第 4 行的余子式与求第 4 行的代数余子式要区分开. 行列式的值等于第 4 行的各个元素与其所对应的代数余子式乘积之和. 若本题是:求第 4 行代数余子式之和,则

$$\begin{aligned}&A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}\\&=(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)^{4+3}M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}\\&=-(-56)+0-42+(-14)=0\end{aligned}$$

或者

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

(注意到第 2 行与第 4 行对应元素成比例,其值为零.)

本题主要是让读者正确理解余子式和代数余子式的概念,并能灵活运用行列式按行(列)展开定理. 解法 2 比解法 1 计算简便,此类型题是考研常出的题型.

【例 3】 计算 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & a & b & c & d\\ -a & 0 & e & f & g\\ -b & -e & 0 & h & l\\ -c & -f & -h & 0 & k\\ -d & -g & -l & -k & 0\end{vmatrix}$$

剖析 由于行列式 D 的元素之间有关系式 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,5)$,将行列式每行提出一个公因子$(-1)$,再利用转置行列式其值不变($D=D^{\mathrm{T}}$)的性质计算之.

解 每行提出公因子(-1),得

$$D=(-1)^5\begin{vmatrix}0 & -a & -b & -c & -d\\ a & 0 & -e & -f & -g\\ b & e & 0 & -h & -l\\ c & f & h & 0 & -k\\ d & g & l & k & 0\end{vmatrix}=-D^{\mathrm{T}}=-D$$

所以 $2D=0$,即 $D=0$.

在行列式中,元素之间满足关系式 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的 n 阶行列式称 n 阶反对称行列式. 利用本例的解法可以证明阶数 n 为奇数的反对称行列式,其值等于零.

【例 4】 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解 各列对应元素相加后相等,把第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列,有

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots}}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)$$

一般地，当行列式的各行(列)的元素之和为同一数时，也可以把各行都加至第1行(列)，并提取第1行(列)的公因子，再把第1行(列)的适当倍数分别加至后边各行(列)，使行列式化为上(下)三角形，再求其值. 这是一种类型的行列式，在计算行列式时需仔细观察之.

如

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix},\quad D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

都属于这一种类型，请读者自行完成.

【例5】 解方程

$$\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}=0$$