俄罗斯初等数学系列

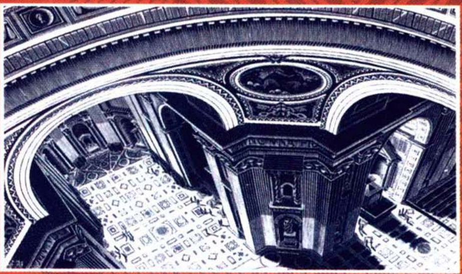
Ten Thousand Exercises of Elementary Mathematics of Russia

(Triangle Volume)

俄罗斯初等数学万题选

(三角卷)

周概容 萧慧敏 王艳丽 编译



- 数学奥林匹克
- 世界看中国
- 中国学俄罗斯
- 有名师才会有高徒
- 本书是俄罗斯师范学院数学系学生必做的习题集

- 中国是数学奥林匹克大国
- 俄罗斯是数学奥林匹克强国
- 中国有世界上人数最多的数学奥林匹克选手
- 俄罗斯有世界上最优秀的数学奥林匹克选手
- 中国的数学奥林匹克训练题花样翻新
- 俄罗斯的数学奥林匹克训练题最具原创性
- 中国全民学奥数
- 俄罗斯精英学奥数

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯初等数学万题选

（三角卷）

● 周概容 萧慧敏 王艳丽 编译

TEN THOUSAND EXERCISES OF ELEMENTARY MATHEMATICS OF RUSSIA [TRIANGLE VOLUME]

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

这部“万题选”主要是参照俄文版下列图书编译的：莫坚诺夫《初等数学专门化教程习题集》；莫坚诺夫、诺沃赛洛夫《投考高校数学参考书》；安东诺夫等《初等数学自学习题》；沙赫诺《高难度初等数学习题集》；列曼《莫斯科数学竞赛题集》；雅格洛姆《非初等问题的初等解法》；亚历山德洛夫《集合与函数通论导引》；李俨《中算史论丛》（第1～5集）等. 此“万题选”共分三卷：代数卷、几何卷（第一编：平面几何；第二编：立体几何）、三角卷，共搜进习题10 000余道，每卷书的前一部分是习题，后一部分是相应习题的答案、解答或揭示. 本卷为三角卷，包括相应习题及解答.

这部“万题选”内容严谨、系统、丰富，适合中小学数学教师、师范院校数学专业师生、高中学生以及数学爱好者参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

俄罗斯初等数学万题选. 三角卷/周概容编译. —
哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012. 9
ISBN 978-7-5603-3787-6

Ⅰ. ①俄… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①初等数学－习题集②三角－习题集 Ⅳ. ①O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 207643 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　宋晓翠
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 16　字数 290 千字
版　　次　2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3787-6
定　　价　38.00 元

◎ 序

学习数学必须做一定的练习.通过练习,才能较好地掌握所学的知识和方法,才能逐步把书本的东西化为自己头脑中的东西.这是人所共知的道理.

学生之间的差异是客观存在的.有些学生对数学有较浓厚的兴趣,不满足于只做课本上的习题,又有时间和精力做更多更难的习题,这种愿望是好的.这部万题选中译本的出版,希望能对这些学生有所帮助.有些业余的数学爱好者,也可以利用它来提高自学水平.对于中学数学教师,本书也是一部较好的参考书.

我们鼓励青年们做一定数量的综合题,这有助于他们融会贯通数学中各分科的内容和方法,以及在以后工作中解决实际问题.

我们说学数学要做练习,绝不是说做得越多越好.做多少才适当,这是因人而异的.有的人立志要以数学为自己的专业(这总是少数),有的人只是要以数学为钻研其他学科的工具;有的人做少量典型的题,就能举一反三,有的人要多做几个才能达到同样目的;有的人要求掌握更多的技巧,有的人没有这种要求.

因此不能统一要求,每个人要根据自己的情况来确定选做多少,选做哪些才适当.

做数学练习要求运算熟练而准确,逻辑严密而简明,作图正确而整洁.达到这些要求是要有个过程的.我们希望有志于学好数学的青少年以严肃的科学态度来对待练习的写作,一丝不苟,错了就改,发现更好的方法就重写(只要有时间),精益求精.好的练习应有简明扼要的文字说明,使人一看就懂,不费猜测.科学态度和逻辑表达能力都是一切科学工作者应当具备的品质.

吴大任

1979 年 6 月于南开大学

◎ 前言

学习数学，一是要掌握基本知识、概念和性质；二是要掌握基本方法、技能，并掌握一定的技巧．对基本知识要做到深入理解和融会贯通；对基本方法和技能要求熟练和运用自如．

学习基本知识和基本方法训练必须有机结合．做练习、解习题，在数学教学和自学中是极其重要的环节．不过需要强调指出，做题必须以基本知识为指导，并不是做题愈多愈好，盲目地、一味地做题是学不好数学的．重要的是通过解题，从中提炼方法、掌握技巧，达到举一反三的目的．

学习数学，必须做一定数量的习题，做习题可以正确地理解和深入、牢固地掌握有关的概念、性质、公式与方法．不做一定数量的练习是学不好数学的，因为只有通过练习，才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与方法，才能把书本上的东西转化为自己头脑中的东西．况且，许多习题本身就是一些有用的知识或性质，有些习题又是有关知识和方法应用的范例，有些则有助于开阔视野．习题实际上是相应课程的一种必要补充和拓展．

20 世纪 80 年代，前苏联 П · С · 莫坚诺夫《初等数学专门

化教程习题集》的中译本，曾以书名《初等数学习题汇编》在新蕾出版社出版.原《习题汇编》中译本共四个分册：

《代数》第一～第十八章；

《平面几何》第十七～第二十二章；

《立体几何》第二十三～第二十七章；

《三角》第二十八章～第三十一章.

在改革开放初期，著名数学家、教育家、南开大学副校长兼教务长吴大任教授推荐其出版，并亲自为该书撰写了序.该书的出版还得到著名数学家、南开大学原副校长胡国定教授的关心和鼓励.著名数学家，南开大学原数学系主任周学光教授、南开大学校长侯自新教授、著名中学教师赵殿兴先生，审阅了全部译稿.

《习题汇编》中译本出版三十多年来，我国的教育事业有了很大的发展，出版了多种初等数学习题集.不过，像这部书这样系统、全面、深入的并不多见.因此，我们决定结合我国初等数学教学的要求以及读者的需要，对原书进行必要的调整.参照多种俄文版有关图书，例如：沙赫诺《高难度初等数学习题集》；列曼《莫斯科数学竞赛题集》；雅格洛姆《非初等问题的初等解法》；亚历山德洛夫《集合与函数通论导引》；莫坚诺夫、诺沃赛洛夫《投考高校数学参考书》；安东诺夫等《初等数学自学习题》以及我国著名数学史学家李俨的专著《中算史论丛》(第1～5集)等，做了订正和充实，编译出版本《俄罗斯初等数学万题选》.这部“万题选”共分三卷：代数卷、几何卷(第一编：平面几何；第二编：立体几何)、三角卷.

我们主要在以下几方面进行了调整、订正的充实：每卷书增加了学科简介、基本公式和常用数学符号；增补了我国中学教学要求的而原“汇编”缺少的内容，例如：集合论、实数、复数、微积分初步…….

这部书的编译得到哈尔滨工业大学出版社的大力支持，该出版社的特邀编辑孙宏学老师和编辑刘培杰老师，对这部书的编译提出了许多指导性意见，在此我们表示深切的谢意.

周概容

2011 年 5 月于南开大学

◎目录

恒等变换

第1章

§1 恒等变换

I 恒等式

证明下列恒等式:

1. $\sin a\cos(b-a)+\cos a\sin(b-a)=\sin b$.

2. $\cos(a+b)+\sin(a-b)=(\cos a+\sin a)(\cos b-\sin b)$.

3. $\tan^2 a-\tan^2 b=\dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}$.

4. $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}+\dfrac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}+\dfrac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}=0$.

5. $\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b}+\dfrac{\sin(b-c)}{\sin b\sin c}+\dfrac{\sin(c-a)}{\sin c\sin a}=0$.

6. $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a$.

7. $\sin(a+b)\sin(a-b)+\sin(b+c)\sin(b-c)+\sin(c+a)\cdot\sin(c-a)=0$.

8. $\sin(a+b)\sin(a-b)+\sin(b-c)\sin(b+c)+\sin(c+d)\cdot\sin(c-d)+\sin(d+a)\sin(d-a)=0$.

9. $\sin^2(a+b)=\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b\cos(a+b)=\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b\cos(a+b)$.

10. $\sin(60^\circ-a)\cos(30^\circ+a)+\cos(60^\circ-a)\sin(30^\circ+a)=1$.

11. $\cos^2 a+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+a\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)=\frac{3}{2}$.

12. $\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°=\sqrt{3}$.

13. $\tan(a+b)\tan(a-b)=\frac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\cos^2 a-\sin^2 b}$.

14. $\frac{\tan^2 a-\tan^2 b}{\cot^2 a\cot^2 b-1}=\tan(a+b)\tan(a-b)\tan^2 a\tan^2 b$.

15. $\tan(a-b)(1+\tan a\tan b)+\tan(b-c)(1+\tan b\tan c)+\tan(c-a)\cdot(1+\tan c\tan a)=0$.

16. $\cos(a-b)\cos(a+b)-\sin(a-b)\sin(a+b)=\cos 2a$.

17. $\frac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a}=\frac{1-\tan a}{1+\tan a}$.

18. $\cos^6 a-\sin^6 a=\cos 2a\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2a\right)$.

19. $\cos^6 a+\sin^6 a=\cos^2 2a+\frac{1}{4}\sin^2 2a$.

20. $\frac{\cos^2 2a-4\cos^2 a+3}{\cos^2 2a+4\cos^2 a-1}=\tan^4 a$.

21. $\frac{(1+\tan a)^2-2\tan^2 a}{1+\tan^2 a}=\sin 2a+\cos 2a$.

22. $\tan 2a+\sec 2a=\tan(45°+a)$.

23. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\sin 2a$.

24. $1+\cos 2a\cos 2b=2\sin^2 a\sin^2 b+2\cos^2 a\cos^2 b$.

25. $\cos^2(a-b)-\sin^2(a+b)=\cos 2a\cos 2b$.

26. $\sin^2(a+b)+\cos^2(a-b)=1+\sin 2a\sin 2b$.

27. $\cos^2(a+b)-\sin^2 a=\cos b\cos(2a+b)$.

28. $\tan^2(a+b)+\tan^2(a-b)=\frac{2(\sin^2 2a+\sin^2 2b)}{(\cos 2a+\cos 2b)^2}$.

29. $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=0$.

30. $\frac{\cos 3a}{\cos a}=2\cos 2a-1=\frac{1-\tan a\tan 2a}{1+\tan a\tan 2a}$.

31. $\sin a\sin 3a=\sin^2 2a-\sin^2 a$.

32. $\cos a\cos 3a=\cos^2 2a-\sin^2 a$.

33. $\tan a \tan 3a = \dfrac{\tan^2 2a - \tan^2 a}{1 - \tan^2 a \tan^2 2a}$.

34. $\dfrac{\sin 3a + \sin^3 a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \cot a$.

35. $4 \sin^3 a \cos 3a + 4 \cos^3 a \sin 3a = 3 \sin 4a$.

36. $32 \sin^2 a \cos^4 a = 2 + \cos 2a - 2 \cos 4a - \cos 6a$.

37. $\sin 6a = 2 \sin a (16 \cos^5 a - 16 \cos^3 a + 3 \cos a)$.

38. $\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1 = 8 \sin^4 a - 8 \sin^2 a + 1$.

39. $\tan^3 4a = \dfrac{4 \tan a (1 - \tan^2 a)}{1 - 6 \tan^2 a + \tan^4 a}$.

40. $\tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 8 \cot 8a = \cot a$.

41. $\sin a = \dfrac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \dfrac{2 \cot \frac{a}{2}}{1 + \cot^2 \frac{a}{2}} = \dfrac{2}{\tan \frac{a}{2} + \cot \frac{a}{2}}$.

42. $\dfrac{1 + \sin a}{1 + \cos a} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan \dfrac{a}{2}\right)^2$.

43. $\dfrac{\cos a}{1 + \cos a} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \tan^2 \dfrac{a}{2}\right)$.

44. $\dfrac{\sec a + \tan a}{\sec a - \tan a} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a}{2}\right)$.

45. $\tan a \tan^4 \dfrac{a}{4} + 4 \tan^3 \dfrac{a}{4} - 6 \tan a \tan^2 \dfrac{a}{4} - 4 \tan \dfrac{a}{4} + \tan a = 0$.

46. $\cos a \cos b \cos c = \dfrac{1}{4}\cos(a + b + c) + \dfrac{1}{4}\cos(b + c - a) + \dfrac{1}{4}\cos(a + c - b) + \dfrac{1}{4}\cos(a + b - c)$.

47. $\sqrt{3} \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\cos(60° - a + b) + \dfrac{1}{2}\cos(a + b - 60°) - \dfrac{1}{2}\cos(60° + a + b) - \dfrac{1}{2}\cos(60° + a - b)$.

48. $4 \sin a \sin(60° - a) \sin(60° + a) = \sin 3a$.

49. $\cos^4 a = \dfrac{1}{8}\cos 4a + \dfrac{1}{2}\cos 2a + \dfrac{3}{8}$.

50. $\sin^4 a = \dfrac{1}{8}\cos 4a - \dfrac{1}{2}\cos 2a + \dfrac{3}{8}$.

51. $\cos^5 a=\frac{1}{16}\cos 5a+\frac{5}{16}\cos 3a+\frac{5}{8}\cos a.$

52. $\sin^5 a=\frac{1}{16}\sin 5a-\frac{5}{16}\sin 3a+\frac{5}{8}\sin a.$

53. $\sin^3 a\cos^3 a=\frac{3}{32}\sin 2a-\frac{1}{32}\sin 6a.$

54. $\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0.$

55. $\sin a\sin b\sin(c-d)+\sin b\sin c\sin(d-a)+\sin c\sin d\sin(a-b)+\sin d\sin a\sin(b-c)=0.$

56. $\sin^2 2a\cos^2 a-\cos^2 2a\sin^2 a=\sin a\sin 3a.$

57. $\cos(a-b)-\sin(a+b)=2\sin(45°-a)\cos(45°+b).$

58. $\sin 50°\sin 24°(\tan 40°+\tan 66°)+\sin 74°=2\cos 16°.$

59. $\sin(a+b)\sin(b+c)-\sin a\sin c=\sin b\sin(a+b+c).$

60. $\sin a+\cos a+\sin b+\cos b=2\sqrt{2}\cos\frac{a-b}{2}\cos\left(45°-\frac{a+b}{2}\right).$

61. $\tan(a-b)+\tan(b-c)+\tan(c-a)=\tan(a-b)\tan(b-c)\tan(c-a).$

62. $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\cdot\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}.$

63. $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c=4\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}\cdot\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}.$

64. $4\cos a\cos b\cos c+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+1=8\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}\cdot\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}.$

65. $\cos^2(b-c)+\cos^2(c-a)+\cos^2(a-b)=2\cos(b-c)\cos(c-a)\cdot\cos(a-b)+1.$

66. $2(\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)$（化简）.

67. $\frac{\sin 3a}{\sin(c-a)\sin(a-b)}+\frac{\sin 3b}{\sin(a-b)\sin(b-c)}+\frac{\sin 3c}{\sin(b-c)\sin(c-a)}=4\sin(a+b+c).$

68. $\tan 3\alpha = \tan\alpha \tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

69. $\sin^3 a\sin^3(b-c)+\sin^3 b\sin^3(c-a)+\sin^3 c\sin^3(a-b)=3\sin a\sin b\cdot\sin c\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$.

70. $\cos^2(a-x)+\cos^2(b-x)-2\cos(a-b)\cos(a-x)\cos(b-x)$（化简）.

71. $\frac{(\sin 2a+\sin 4a+\sin 6a)^3-\sin^3 2a-\sin^3 4a-\sin^3 6a}{\sin 3a\sin 4a\sin 5a\cos^2 a\cos 2a}$（化简）.

72. $2\sin^2 a\frac{1+\cot a+\cot(45^\circ-a)}{\cot 2a\cos 2a-2+2\sin 2a}=\tan^2 2a\tan^3(45^\circ+a)$.

Ⅱ 条件恒等式

设 $a=b+c$，求证：

1. $\sin a+\sin b+\sin c=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

2. $\cos a+\cos b+\cos c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-1$.

3. $\sin a+\sin b-\cos c=1-4\cos\frac{c}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{a}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{b}{2}\right)$.

4. $\tan a+\cot b+\cot c=\tan a\cot b\cot c$.

5. $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2(1-\cos a\cos b\cos c)$.

6. $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c=1$.

设 $a+b+c=\frac{\pi}{2}$，求证：

7. $\sin a+\sin b+\sin c-1=4\sin\frac{\pi-2a}{4}\sin\frac{\pi-2b}{4}\sin\frac{\pi-2c}{4}$.

8. $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=1-2\sin a\sin b\sin c$.

9. $\cot a+\cot b+\cot c=\cot a\cot b\cot c$.

10. $\sin a\sin b\cos c+\sin a\sin c\cos b+\sin b\sin c\cos a=\cos a\cos b\cos c$.

11. $(1-\sin b)(1-\sin c)\cos a+(1-\sin c)(1-\sin a)\cos b+(1-\sin a)\cdot(1-\sin b)\cos c=\cos a\cos b\cos c$

设 $a+b+c=\pi$，求证：

12. $\sin a+\sin b=2\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

13. $\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\cot\frac{c}{2}$.

14. $\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a=\sin(a-b)\sin c$.

15. $\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

16. $\cos a+\cos b+\cos c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+1$.

17. $\cos a+\cos b+\cos c=1+2\frac{\sin a\sin b\sin c}{\sin a+\sin b+\sin c}$.

18. $\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{b}{2}+\cot\frac{c}{2}=\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{\sin b+\sin c-\sin a}\cot\frac{a}{2}$.

19. $\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=-1-4\cos a\cos b\cos c$.

20. $\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c=2\sin a\sin b\cos c$.

21. $\sin^3 a+\sin^3 b+\sin^3 c=3\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{3a}{2}\cos\frac{3b}{2}\cos\frac{3c}{2}$.

22. $\tan\frac{a}{2}+\tan\frac{b}{2}-\cot\frac{c}{2}=-\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}$.

23. $\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)+\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)+\sin c\sin(c-a)\cdot\sin(c-b)=\sin a\sin b\sin c(1-8\cos a\cos b\cos c)$.

24. $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c-a}{2}+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}=\sin a+\sin b+\sin c$.

25. $\sin^2 a-2\sin a\sin b\cos(60°+c)=\sin^2 c-2\sin b\sin c\cos(60°+a)$.

设 $a+b+c=2\pi$,求证:

26. $1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=4\cos a\cos b\cos c$.

27. $\sin a-\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

28. $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=0$.

设 $a+b+c+d=\pi$,求证:

29. $\sin a+\sin b+\sin c-\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$.

30. $\tan a+\tan b+\tan c+\tan d=\frac{\sin(a+d)\sin(b+d)\sin(c+d)}{\cos a\cos b\cos c\cos d}$.

设 $a+b+c+d=2\pi$,求证:

31. $\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$.

32. $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+\sin^2 d=2(1+\sin a\sin b\sin c\sin d-\cos a\cos b\cdot\cos c\cos d)$.

33. 设 $a+b+c=2n\pi$,其中 n 为正整数,求证

$$\sin a+\sin b+\sin c=(-1)^{n-1}4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

34. 设 $a+b+c=(2n+1)\pi$,其中 n 为正整数,求证

$$\cos^4\frac{a}{2}+\cos^4\frac{b}{2}+\cos^4\frac{c}{2}-2\left(\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}\right)+$$
$$4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}=0$$

35. 求证:

1) $\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$, $\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,其中 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant45^\circ$或 $315^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant360^\circ$.

2) $\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$, $\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,其中 $45^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant135^\circ$.

3) $\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$, $\sin\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,其中 $135^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant225^\circ$.

4) $\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$, $\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$,其中 $225^\circ\leqslant\frac{a}{2}\leqslant315^\circ$.

36. 设 $a+b+c+d=0$,求证

$$\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d=4(\cos a\cos b\cos c\cos d-$$
$$\sin a\sin b\sin c\sin d)$$

37. 设方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

的根为 $\tan\alpha_1$, $\tan\alpha_2$, $\tan\alpha_3$,而方程

$$x^3+cx^2+bx+a=0$$

的根为 $\tan\beta_1$, $\tan\beta_2$, $\tan\beta_3$,求证

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3=k\pi$$

其中 k 为整数.

38. 设 $0<\alpha<\pi,0<b<\pi,0<c<\pi$ 且 $\tan\frac{a}{2}$, $\tan\frac{b}{2}$, $\tan\frac{c}{2}$是方程

$$x^3+px^2+x+q=0$$

的根,求证

$$\tan a+\tan b+\tan c=\tan a\tan b\tan c$$

39. 设

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=1$$

求证下列四个条件之一成立

$$a\pm b\pm c=(2k+1)\pi$$

其中 k 是整数.

40. 设 $\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$,求证 $a-b=k\pi$ 或 $a+b=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2}$,

其中k 是整数.

41. 设 $\tan\frac{b}{2}=4\tan\frac{a}{2}$,求证

$$\tan\frac{b-a}{2}=\frac{3\sin a}{5-3\cos a}$$

42. 设 $\tan(a+b)=3\tan a$,求证

$$\sin(2a+2b)+\sin 2a=2\sin 2b$$

43. 已知

$$(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c)=(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)$$

求证该等式的两侧都等于 $\pm\sin a\sin b\sin c$.

44. 已知 $\cos x=\cos a\cos b$,求证

$$\tan\frac{x+a}{2}\tan\frac{x-a}{2}=\tan^2\frac{b}{2}$$

45. 设 $a+b+c=\pi$,而且

$$\sin a:\sin b:\sin c=4:5:6$$

求证

$$\cos a:\cos b:\cos c=12:9:2$$

46. 设 $a+b+c=\pi,a=2b$,求证

$$\sin^2 a=\sin b(\sin c+\sin b)$$

47. 设 $\cos a+\cos b+\cos c=0$,求证

$$\cos a\cos b\cos c=\frac{1}{12}(\cos 3a+\cos 3b+\cos 3c)$$