

北京四中高中数学讲义

代数

(第二册)

北京四中教学处 编

教育科学出版社



DAISHU

北京四中高中数学讲义

代 数

(第二册)

北京四中教学处

教育科学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

代数 第二册 / 北京四中教学处编. - 北京: 教育科学出版社, 1996.7

(北京四中高中数学讲义)

ISBN 7-5041-1585-1

I. 代… II. 北… III. 代数课-高中-教学参考资料
IV. G633.62

中国版本图书馆CIP数据核字 (96) 第03140号

责任编辑 刘 进

责任印制 尹明好

责任校对 贾艳凤

教育科学出版社出版、发行

(北京·北太平庄·北三环中路46号)

各地新华书店经销

北京市东华印刷厂印装

开本: 787毫米×1092毫米 1/32 印张: 14.125 字数: 307千

1996年7月第1版 1996年7月第1次印刷

印数: 00 001—13 000册 定价: 11.50元

编写组成员

领导小组 田 佣（副校长） 赵 康（教学处主任）

主 编 刘 坤 傅以伟

成 员 刘 坤 常相舜 傅以伟

田 佣 赵 康 凌文伟

出版说明

当前，中学教学改革已经深入到课程设计和教材改革领域。我校数学教材的改革，以发展学生的数学思维为目标，以不改变现行教学大纲规定的教学内容为前提，试图通过对知识结构及其展开方式的统盘考虑，实现整体优化。经多年反复探索、实验，编成了这套尝试融教材与教法、学法于一体的《北京四中高中数学讲义》。

这套讲义的产生可以上溯到1982年。从那时起，为了发展学生智能，提高数学素养，我校部分同志就开始对高中数学教学进行以教材改革为龙头，以学法教育为重点的“整体优化实验研究”。正是在这项研究的基础上，逐步形成了这套讲义编写的特色和风格。这就是：

1. 为形成学生良好的认知结构，讲义的知识结构力求脉络分明，使学生能从整体上理解教材。

2. 为了提高学生的数学素养，本讲义把数学思想的阐述放到了重要位置。数学思想既包含对数学知识点（概念、定理、公式、法则和方法）的本质认识，也包含对问题解决的数学基本观点。它是数学中的精华，对形成和发展学生的数学能力具有特别重要的意义。为此，讲义注重展现思维过程（概念、法则被概括的过程，数学关系被抽象的过程，解题思路探索形成的过程），在过程中认识知识点的本质，在过程中总结思维规律，在过程中揭示数学思想的指导作用。力

图使学生能深刻领悟教材。

3. “再创造，再发现”在数学学习中对培养创造思维能力至关重要。为引导学生积极参与“发现”，讲义在设计上做了某些尝试。

4. 例题和习题的选配，力求典型、适量、成龙配套。习题分为A组（基本题）、B组（提高题）和C组（研究题）。教师可根据学生不同的学习水平适当选用。

5. 教材是学生学习的依据，应有利于培养自学能力。本书注重启迪学法，并在书末附有全部习题的答案或提示，以供学习时参考。

这套讲义在研究、试教和成书的过程中，始终得到了北京市和西城区教育部门有关领导的关怀和帮助，得到了北京师范大学数学系钟善基教授、曹才翰教授的热情指导，清华附中的瞿宁远老师也积极参与了我们的实验研究，并对这套教材做出了贡献，在此一并致以诚挚的谢意。

在编写过程中，北京四中数学组的教师们积极参加研讨，对他们的热情支持表示感谢。

这套讲义包括六册：高中代数第一、二、三册，三角、立体几何、解析几何各一册。

编写适应素质教育的教材，对我们来说是个尝试。由于水平所限，书中不当之处在所难免，诚恳希望专家、同行和同学们提出宝贵意见。

北京四中教学处

1996年1月

目 录

第四章 不等式的性质、证明和解法	1
4.1 实数集的有关知识	1
4.2 不等式的概念	4
4.3 不等式的性质	6
4.4 不等式证明的基本方法	13
4.5 平均不等式	21
4.6 用放缩法证明不等式	35
*4.7 柯西不等式	39
4.8 附加条件的不等式的证明	42
*4.9 平方平均数	49
4.10 同解不等式	51
4.11 形如 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0$ 的高次 不等式的解法	57
4.12 分式不等式的解法	64
4.13 无理不等式的解法	68
4.14 绝对值不等式的性质、解法与证明	72
4.15 利用平均不等式求某些函数的最大(最小) 值	87
4.16 本章小结	102

第五章 数列、数学归纳法、数列的极限	107
一 数列的一般概念	107
5.1 数列的定义	107
5.2 数列的表示法	108
5.3 简单数列的通项公式的求法	111
5.4 数列的分类	114
5.5 数列的前 n 项和	117
二 等差数列	121
5.6 等差数列的有关概念	121
5.7 等差数列的通项公式	123
5.8 等差数列前 n 项的和	131
三 等比数列	144
5.9 等比数列的有关概念	144
5.10 等比数列的通项公式	146
5.11 等比数列前 n 项的和	151
四 特殊数列求和问题	159
5.12 可转化为等差(或等比)数列求和	159
5.13 裂项求和法	163
5.14 前 n 个自然数的平方和的求法及应用	166
五 数学归纳法	171
5.15 演绎法与归纳法	171
5.16 数学归纳法	173
5.17 数学归纳法的应用举例	176
六 数列的极限	187
5.18 数列的极限	187
5.19 数列极限的运算法则	194

七	本章小结	208
第六章	复数	221
6.1	引言——数系的发展与复数的起源	221
6.2	复数的概念	224
6.3	复数的四则运算	235
6.4	复数的三角形式	253
6.5	复数的简单应用	289
6.6	本章小结	316
第七章	排列、组合、二项式定理	325
一	排列与组合	325
7.1	基本原理	325
7.2	排列	333
7.3	排列数公式	338
7.4	组合	350
7.5	组合数公式	352
7.6	组合数的两个性质	356
二	二项式定理	367
7.7	二项式定理	367
7.8	二项式系数的性质	375
7.9	本章小结	381
附录	习题的答案或提示	388

第四章 不等式的性质、 证明和解法

两个同类量相比较，有“相等关系”和“不等关系”，用数学式子表达它们就出现了“等式”和“不等式”。不等式不仅在数学理论中是极为重要的数学工具，而且在科学技术中有广泛的实用价值。

本章将系统地学习不等式的性质、证明和解法，并通过不等式的证明系统地学习数学论证的常用方法。

不等式与等式既有相似之处，也有不同之处。学习时要随时加以对比，尤为重要的是注意它们的不同之处。

4.1 实数集的有关知识

不等式理论的基础是实数理论。我们回顾一下实数集的有关知识。

1. 任取 $x \in \mathbb{R}$ ，则 $x \in \mathbb{R}^+$ 、 $x \in \{0\}$ 和 $x \in \mathbb{R}^-$ 三种情况有且只有一种成立。

2. 两实数加、乘运算具有以下性质：

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ，则 $a+b, a \cdot b \in \mathbb{R}^+$ ；

$a, b \in \mathbb{R}^-$ ，则 $a+b \in \mathbb{R}^-$ ， $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$ ；

$a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^-$ ，则 $a \cdot b \in \mathbb{R}^-$ 。

任取 $a \in R$, 恒有 $a^2 \geq 0$, 当且仅当 $a=0$ 时取等号。

3. 比较两实数大小的法则。

我们知道, 实数可以比较大小。在初中我们学过实数比较大小的几何法则: 在数轴上, 两个不同的点 A 与 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b , 右边的点表示的数比左边的点表示的数大。

现在我们学习与几何法则等价的比较两实数大小的代数法则。

定义 对于任意两个实数 a 、 b :

若 $a-b$ 为正数, 称 a 大于 b , 记作 $a > b$;

若 $a-b$ 为零, 称 a 等于 b , 记作 $a=b$;

若 $a-b$ 为负数, 称 a 小于 b , 记作 $a < b$ 。

根据这个定义, 可知:

$$a-b > 0 \iff a > b;$$

$$a-b = 0 \iff a = b;$$

$$a-b < 0 \iff a < b.$$

例1 若 $a > b > c > 0$, 试比较 $\frac{b}{a-b}$ 与 $\frac{c}{a-c}$ 的大小。

分析: 根据实数比大小的定义, 欲比较 $\frac{b}{a-b}$ 与 $\frac{c}{a-c}$ 的大小, 应先研究它们的差。

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{b}{a-b} - \frac{c}{a-c} &= \frac{b(a-c) - c(a-b)}{(a-b)(a-c)} \\ &= \frac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)},\end{aligned}$$

$$\because a > b > c > 0,$$

$\therefore b-c>0, a-b>0, a-c>0, \Rightarrow$ 上式的值 >0 ,

$$\therefore \frac{b}{a-b} > \frac{c}{a-c}.$$

例2 若 $a \in R$, 试比较 $(a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1)$ 与 $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ 的大小.

分析: “式子繁, 先化简”, 再求差.

$$\begin{aligned}\text{解: } & (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) \\ &= (a^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}a)^2 \\ &= (a^2 + 1)^2 - 2a^2; \\ & (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = (a^2 + 1)^2 - a^2. \\ & [(a^2 + 1)^2 - 2a^2] - [(a^2 + 1)^2 - a^2] = -a^2. \\ \therefore a \in R, \quad & \Rightarrow -a^2 \leq 0.\end{aligned}$$

从而

(i) 当 $a=0$ 时,

$$(a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1);$$

(ii) 当 $a \neq 0$ 时,

$$(a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) < (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$

评述: 以上两例说明: 两实数比大小的问题, 根据定义, 等价于研究其差的符号, 因而“求差”是基本方法.

关于两实数比大小, 还有下面的定理

定理 对于任意两个实数 a, b , 下列三种大小关系:

$$a > b; \quad a = b; \quad a < b$$

有且只有一种成立.

证明: 根据实数集的性质, 实数 $(a-b)$ 或为正数, 或为负数, 或为零, 三者必居其一且仅居其一. 再由实数比大小的定义, 立刻知道本定理成立.

最后，我们约定，在本章中所出现的字母，不加说明时都表示实数。

4.2 不等式的概念

用不等号（ $>$ ， $<$ ， $\neq$ 等）连接两个数学解析式（代数式，指数式，对数式，三角式等等）所成的式子称为**不等式**。例如：

$$a^2 + 1 > 0, \quad \text{①}$$

$$3x < 6, \quad \text{②}$$

$$|x| < 0, \quad \text{③}$$

$$\lg x > \frac{1}{2}, \quad \text{④}$$

$$m + 2 < 5 + m, \quad \text{⑤}$$

$$-1 > 2. \quad \text{⑥}$$

在两个不等式中，如果每一个的左边都大于右边，如①和④，或者每一个的左边都小于右边，如②和③，象这样的两个不等式叫做**同向不等式**。如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，如①和②，象这两个不等式叫做**异向不等式**。

通常我们按不等式在字母取值范围内是否成立把不等式分作三类：

若在字母取值范围内不等式恒成立，这种不等式叫做**绝对不等式**，如①、⑤；

若在字母取值范围内有些值使不等式成立，而另外一些值使不等式不成立，这种不等式叫做**条件不等式**，如②、④；

若在字母取值范围内不等式恒不成立，这种不等式叫做**矛盾不等式**，如③、⑥。

不等式这一章的基本问题是绝对不等式的证明和条件不等式的求解。

为了解决这两个基本问题，我们要先学习不等式的性质。

习 题 一

A

1. 比较 $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)(x+6)$ 的大小 (其中 $x \in R$)。
2. 已知 a 是实数， a^4+1 与 $2a^2$ 谁大？
3. 若 $a > b$, $e > f$, $c > 0$ ，试比较 $f-ac$ 与 $e-bc$ 的大小。
4. 若 $m \in R$ ，试比较 $\left(\frac{m}{\sqrt{3}}+1\right)^3 - \left(\frac{m}{\sqrt{3}}-1\right)^3$ 与 2 的大小。
5. 若 $a > b > 0$, $c < d < 0$, $e < 0$ ，求证：

$$\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}.$$

6. 试说出下列不等式中哪些是绝对不等式，哪些是矛盾不等式，哪些是条件不等式：

(1) $a^2 < 0$;

(2) $a^2 < \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2$ 其中 $a > 0$;

(3) $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ 。

4.3 不等式的性质

在初中曾学过“等式”的一些性质，并根据对等式运算的需要做出了若干推论，现在整理如下：

性质1 $a=b \Leftrightarrow b=a$;

性质2 $a=b, b=c \Rightarrow a=c$; (传递性)

性质3 $a=b \Rightarrow a+m=b+m$; (等量加同量)

推论1 移项法则 (如何叙述?);

推论2 $\left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow a+c=b+d$;

推论3 $\left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow a-c=b-d$;

性质4 $a=b \Rightarrow am=bm$; (等量乘同量)

推论4 $\left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow ac=bd$;

推论5 $a=b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$;

推论6 $\left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;

推论7 $a=b \Rightarrow a^n=b^n$, ($n \in \mathbb{N}$);

推论8 $a=b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$, ($n \in \mathbb{N}$).

不等式与等式是有密切联系的. 类比等式的性质和推论, 可以得到不等式的一些性质, 并根据对不等式运算 (变形)

的需要可以做出若干推论 (最好你能独立想出这些结论和证明方法)。

性质定理1 $a > b \iff b < a$;

性质定理2 $a > b, b > c \implies a > c$; (传递性)

性质定理3 $a > b \implies a + m > b + m$;

推论1

$$a + m > b \implies a > b - m;$$

推论2

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right\} \implies a + c > b + d;$$

推论3

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ c < d \end{array} \right\} \implies a - c > b - d;$$

性质定理4 (i) $a > b, m > 0 \implies am > bm$;

(ii) $a > b, m < 0 \implies am < bm$;

推论4

$$\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \right\} \implies ac > bd;$$

推论5

$$\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ 0 < c < d \end{array} \right\} \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{d};$$

推论6

$$a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

$$0 > a > b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

推论7

$$a > b \geq 0 \implies a^n > b^n, \\ (n \in \mathbb{N});$$

推论8

$$a > b \geq 0 \implies \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \\ (n \in \mathbb{N}, \text{ 且 } n > 1);$$

推论9 当 a, b 都是正数时:

$$\frac{a}{b} > 1 \iff a > b;$$

$$\frac{a}{b} = 1 \iff a = b;$$

$$\frac{a}{b} < 1 \iff a < b.$$

以下研究这些定理的证明方法。

首先应明确: 四条性质定理在这个理论结构中是基础。
它们的证明应依据实数比大小的定义和实数加乘运算的法则。例如,

求证: 性质定理1 $a > b \iff b < a$ 。

证明: 先证“若 $a > b$, 则 $b < a$ ”。

$$\text{由 } a > b \implies a - b > 0,$$

$$\therefore -(a - b) < 0$$

$$\text{即 } b - a < 0,$$

$$\therefore b < a.$$

再证“若 $b < a$, 则 $a > b$ ”。

$$\text{由 } b < a \implies b - a < 0 \implies -(b - a) > 0,$$