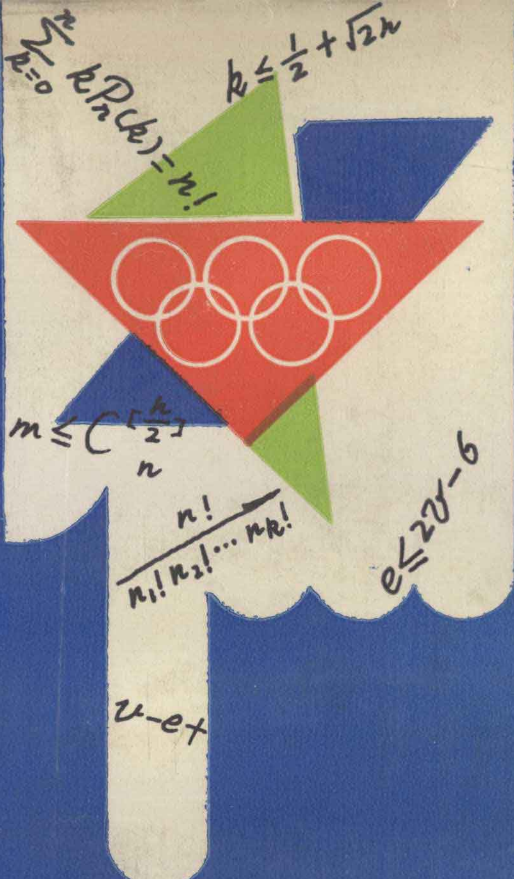


第一卷
上 册


熊 斌
刘诗雄
主 编



武汉大学
出版社


# 高中竞赛数学教程

# 高中竞赛数学教程

## 第 一 卷

### （上 册）

主编 熊 斌 刘诗雄
编著 （以姓氏笔画为序）
冯志刚 刘诗雄
董方博 裴光亚
熊 斌

武汉大学出版社

# 序　言

数学竞赛是当今中国教育界的热点之一。自1986年我国派出整队参加国际奥林匹克数学竞赛以来，连获佳绩，令世人侧目。国人在欢欣之余，不断升温，以至各级领导、各类学校都将它列入议事日程，此种“热”，在世界上也堪称独步。

关于“数学竞赛”在数学教育中的地位和作用，国际上是有争论的，1992年8月，在加拿大魁北克市举行的第七届国际数学教育会议上，就有一场特意设计的辩论会(Crossfire)，题目就是数学竞赛．会上，攻之者说“数学竞赛只为少数天才服务，题目怪偏，不反映数学的应用功能，在社会公众中带来不好影响。”辩之者称“数学竞赛是培养学生数学兴趣的重要途径，竞赛题思考性强，有助于创造性能力的培养，天才学生的选拔对整个国家的人才开发有利等等。”辩论没有统一的结论，但是多数人似乎赞成数学竞赛，问题是要组织得好，尽量使多数人受益，数学题目有很多档次，应该在不同水平上组织竞赛，吸收更多的人参加。

我想，这里还是用得到一句名言：“在普及的基础上提高，在提高的指导下普及。”我国的数学竞赛已取得巨大成绩，频夺奖牌之际，今后也许应在普及上多下些功夫，多从教育意义上着眼。

有念及此，恰闻熊斌、刘诗雄等先生编著《高中竞赛数学教程》一书，洋洋近百万字中，有一部分内容安排得和当今的数学教学进度同步，便于一般教师采用，这倒是一个进步。数学竞赛和日常教学相结合，该会更有生命力罢！

作者告诉我，此书非常全，又非常新，几乎囊括了历届的竞赛

题及世界各国近几年来的试题，可称数学竞赛的“百科全书”。以我国数学竞赛规模之大，水平之高，出这样一部“全书”，应该是合适的。

二位主要作者都是30岁上下的年青人，尤令人高兴，我国的数学竞赛专家，早期由华罗庚、苏步青等亲自领导. 近十年来则以中国科技大学等高校的一批教授为中坚。现在，欣喜地看到第三梯队也在成长。这是我国数学竞赛事业继续兴旺的标志之一。我想：他们的努力将会是跨世纪的，应该给予支持。我对数学竞赛可说是外行，但因希望中国数学竞赛继续取得成功，遂乐于作此序，并就教于方家。

张奠宙

1992.10.8. 于华东师大

# 前　言

数学奥林匹克是一项历史悠久的国际性智力竞赛活动。自1894年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕始，近百年来，开展数学竞赛的范围由欧洲而北美，而澳洲，而亚洲、非洲，不断扩大。尤为引人注目的是，在有着五千年光辉文明的中华大地，鼓励、支持和参加数学竞赛正在成为一种社会风尚。

悠久的历史，普遍的热情，广泛的参与，促成了数学奥林匹克的形式和内容日臻完善。一门奥林匹克数学(又称竞赛数学)正在发育成熟。奥林匹克数学是数学百花园中的一株奇葩，她把现代化的数学内容与趣味性的陈述、独创性的技巧有机地结合起来，充分展示数学的统一美、简洁美、对称美和奇异美。

作为一次甘冒失败风险的尝试，我们编写了这套《高中竞赛数学教程》。也许她过于早产，过于稚嫩。但我们还是抱着聊胜于无的想法将她献给我们所敬重的数学教育界的前辈、专家学者和年轻的同仁，献给跃跃欲试立志在数学奥林匹克赛场上一抖雄风的广大中学生朋友。

鉴于数学奥林匹克培训在我国已经形成的特点，《高中竞赛数学教程》的编写突出了以下两点：(1) 基础与提高并重，本书采用同一内容分“A”和“B”两部分的编写方法，“A”强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识，掌握中学数学以外的竞赛内容；“B”强调提高，帮助学生掌握奥林匹克数学的一些较难的内容和技巧。(2) 同步与超前结合。“A”内容顺序与中学数学内容同步，但在数学思想方法的渗透和思维能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；“B”则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加

强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握奥林匹克数学的内容，提高数学素养和综合解题的能力。

这套《高中竞赛数学教程》由熊斌、刘诗雄共同策划和主编。其中第二章、第四章、第五章、第七章、第八章、第九章、第十章、第十三章、第十四章由熊斌和冯志刚编写；第三章、第六章、第十六章、第二十章由裴光亚编写；第十五章、第十八章、第十九章由董方博编写；第一章、第十一章、第十二章、第十七章由刘诗雄编写。

正值《高中竞赛数学教程》出版之机，我们向热情为本书题写书名的全国政协副主席，我国数学竞赛创始人之一的著名数学家苏步青老前辈致以无比的敬意和谢忱；向支持和关心本书写作的数学家、数学教育家张奠宙教授致以崇高的谢意；我们要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造。

由于水平所限，书中若有不妥和差错，敬请专家和读者批评指正。作为抛砖引玉，我们热情地期待更多的优秀奥林匹克数学教材问世。

编　者

1992 年 9 月 1 日

# 目　　录

# 第一章　集　　合

对于集合我们并不陌生.我和你相见在“人”的集合里;全体正在参加数学竞赛训练的中学生构成一个集合.在19世纪德国数学家的集合里有一个光辉的名字——康托(George Cantor,1845—1918年),因为他竖起了集合理论的丰碑而光耀后世.至今,集合的理论和方法已渗透到了数学的每个领域,成为数学金字塔最重要的基础之一.

在这里,我们并不关心系统的集合理论,情有独钟的只是那些在数学竞赛中时常出现的集合问题,有些问题属于组合内容,但是作为一种准备,我们要在此作些简单介绍.

## A

## §1.1　集合的概念与运算

### 1. 元素与集合的关系

用描述法表示一个集合,基于下面的

**概括原则**　任给一个性质$P$,那么存在着一个集合$S$,它的元素恰好是具有性质$P$的一些对象.即

$$S=\{x|P(x)\},$$

其中$P(x)$是“$x$具有性质$P$”的一个缩写.

这个表示是强有力的,由此我们知道,判断一个对象$x$是否为集合$S$的元素,等价于判断$x$是否满足性质$P$.

**例1**　设集合$A=(-3,2)$.已知$x,y\in\mathbf{N},x>y,x^3+19y=y^3+19x$,判断$a=\log_{1/2}(x+y)$与集合$A$的关系.

**解** 因为 $x^3-y^3=19(x-y)$，且 $x,y\in\mathbf{N},x>y$，所以

$$x^2+x<x^2+xy+y^2=19<3x^2.$$

由 $\begin{cases}x^2+x<19,\\3x^2>19\end{cases}$ 及 $x\in\mathbf{N}$ 得 $x=3$. 从而知 $y=2$. 所以

$$-3<a=\log_{1/2}(3+2)=\log_{1/2}5<-2,$$

即 $a\in A$.

**例 2** 以某些整数为元素的集合 $P$ 具有下列性质：① $P$ 中的元素有正数，有负数；② $P$ 中的元素有奇数，有偶数；③ $-1\notin P$；④ 若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$. 试判断实数 0 和 2 与集合 $P$ 的关系.

**解** 由④知，若 $x\in P$，则 $kx\in P$ $(k\in\mathbf{N})$.

(1) 由①可知存在 $x,y\in P$，且 $x>0$，$y<0$. 从而 $xy\in P$(因 $x\in\mathbf{N}$). 另一方面，

$$-yx=|y|x\ (|y|\in\mathbf{N}),$$

故 $-yx\in P$. 由④，$0=(-yx)+xy\in P$.

(2) 反证法. 假若 $2\in P$，则 $P$ 中的负数全为偶数. 不然的话，当 $-2k-1\in P$ $(k\in\mathbf{N})$时，$-1=(-2k-1)+k\cdot2\in P$，与③矛盾. 于是由②知 $P$ 中必有正奇数. 设 $-2m,2n-1\in P$ $(m,n\in\mathbf{N})$，我们取适当正整数 $q$，使 $q\cdot|-2m|>2n-1$，则负奇数 $-2qm+(2n-1)\in P$. 前后矛盾. 故 $2\notin P$.

**例 3** 设 $S$ 为满足下列条件的有理数集合：① 若 $a\in S,b\in S$，则 $a+b\in S,ab\in S$；② 对任一个有理数 $r$，3 个关系 $r\in S$，$-r\in S$，$r=0$ 有且仅有一个成立. 证明：$S$ 是由全体正有理数组成的集合.

**证** 对任意的 $r\in\mathbf{Q},r\neq0$，由②知 $r\in S$，或 $-r\in S$ 之一成立. 再由①，若 $r\in S$，则 $r^2\in S$；若 $-r\in S$，则 $r^2=(-r)\cdot(-r)\in S$. 总之，对任意的非零 $r\in\mathbf{Q}$ 均有 $r^2\in S$.

取 $r=1$，则 $1=1^2\in S$. 由①，$2=1+1\in S,3=1+2\in S,\cdots$，可知全体正整数都属于 $S$.

设 $p,q\in\mathbf{N}$，由①，$pq\in S$. 又由前证知 $\frac{1}{q^2}\in S$，所以

$$\frac{p}{q}=pq\cdot\left(\frac{1}{q^2}\right)\in S.$$

因此，$S$ 含有全体正有理数.

再由②知，0 及全体负有理数不属于 $S$. 即 $S$ 是由全体正有理数组成的集合.

**2. 两个集合之间的关系**

在两个集合之间的关系中，我们感兴趣的是“子集”、“真子集”、“相等”这 3 种特殊关系. 这些关系是通过元素与集合的关系来揭示的，因而判断两个集合之间的关系通常可从判断元素与这两个集合的关系入手.

**例 4** 设函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,b\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 证明：$A\subseteq B$. (2) 当 $A=\{-1,3\}$ 时，求 $B$.

**证** (1) 设任意 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$. 而

$$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0,$$

故 $x_0\in B$. 所以 $A\subseteq B$.

**解** (2) 因 $A=\{-1,3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1,\\3^2+a\cdot 3+b=3,\end{cases}$$

解得 $a=-1,b=-3$. 故 $f(x)=x^2-x-3$. 由 $x=f(f(x))$ 得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0,$$

解得 $x=-1,3,\pm\sqrt{3}$. 所以，$B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

**例 5** $S_1,S_2,S_3$ 为非空整数集合，对于 1,2,3 的任意一个排列 $i,j,k$，若 $x\in S_i,y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.

(1) 证明：3 个集合中至少有两个相等.

(2) 3 个集合中是否可能有两个集无公共元素？

**证** (1) 若 $x\in S_i,y\in S_j$，则

$$y-x\in S_k,\ (y-x)-y=-x\in S_i,$$

所以每个集合中均有非负元素.

当 3 个集合中的元素都为零时,命题显然成立.

否则,设 $S_1,S_2,S_3$ 中最小正元素为 $a$,不妨设 $a\in S_1$. 设 $b$ 为 $S_2,S_3$ 中最小的非负元素,不妨设 $b\in S_2$. 则

$$b-a\in S_3.$$

若 $b>0$,则 $0\leqslant b-a<b$,与 $b$ 的取法矛盾. 所以 $b=0$.

任取 $x\in S_1$,因 $0\in S_2$,故 $x-0=x\in S_3$. 所以 $S_1\subseteq S_3$. 同理,$S_3\subseteq S_1$. 所以 $S_1=S_3$.

(2) 可能. 例如 $S_1=S_2=\{$奇数$\}$,$S_3=\{$偶数$\}$显然满足条件,但 $S_1$ 和 $S_2$ 与 $S_3$ 都无公共元素.

**例 6** 任何一组 $m$ 个非负数的几何平均数是它们的积的 $m$ 次方根.

(1) 对于哪些正整数 $n$,有 $n$ 个不同正整数的有限集合 $S_n$,使得 $S_n$ 的任何子集的几何平均数都是整数?

(2) 有没有不同正整数的无限集合 $S$,能使 $S$ 的任何有限子集的几何平均数都是整数?

**解** (1) $m$ 个非负数的积的 $m$ 次方根是整数的一个充分条件是:已知的 $m$ 个数都是非负数的幂,并且幂指数是 $m$ 的正整数倍数.

由于 $n$ 个不同正整数的集合 $S_n$ 的任意非空子集可以含有 1 个或 2 个,……,或 $n$ 个元素,只要这些元素是正整数的幂,并且幂指数是 $n!=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$ 或 $n!$ 的正整倍数,则它的任何子集的几何平均数就是整数.

因此,对于每一个正整数 $n$,都有满足题设的有限集 $S_n$,例如

$$S_n=\{1^{n!},2^{n!},\cdots,n^{n!}\}.$$

(2) 这样的无限集合 $S$ 不存在. 不然,设有不同正整数的无限集合 $S$,它的任何有限子集的几何平均数都是整数. 我们从这些数所含质因数的幂指数来寻找矛盾.

为此,定义质数 $p$ 在正整数 $a$ 中的指数为 $k$,记作 $e(p,a)=k$.

即 $p^k$ 能整除 $a$，而 $p^{k+1}$ 不能整除 $a$.

设 $a,b\in S$，且 $a\neq b$，则至少有一个质数 $p$，使得

$$e(p,a)\neq e(p,b).$$

依假设，对任意正整数 $m$，$S$ 有 $m$ 元子集 $\{a,n_1,n_2,\cdots,n_{m-1}\}$ 和 $\{b,n_1,n_2,\cdots,n_{m-1}\}$，它们的几何平均数是整数. 此时，质数 $p$ 在子集里各数中的指数的和应该是 $m$ 的倍数，即

$$e(p,a)+e(p,n_1)+\cdots+e(p,n_{m-1}),$$
$$e(p,b)+e(p,n_1)+\cdots+e(p,n_{m-1})$$

都应该是 $m$ 的倍数. 从而它们的差

$$e(p,a)-e(p,b)$$

也是 $m$ 的倍数. 由于 $m$ 是任意的，所以只有零才是任意正整数的倍数，即

$$e(p,a)-e(p,b)=0,$$

这与 $e(p,a)\neq e(p,b)$ 相矛盾.

### 3. 交集、并集、补集和差集

由交集和并集的定义，不难证明这两种集合运算的交换律和结合律. 利用文氏图，可以验证下面的两个结论：

(1) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(2) 摩尔根法则：$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

**例 7** 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$. 问

(1) 当 $a$ 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 $a$ 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 3 个元素的集合？

**解** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组：

(Ⅰ) $\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$

的解集. 由(Ⅰ)解得$(x,y)=(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$;由(Ⅱ)解得

$$(x,y)=(1,0),\ \left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right).$$

(1) 使$(A\cup B)\cap C$恰有两个元素的情况只有两种可能:

① $\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=0,\\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}$ ② $\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=1,\\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$

由①得$a=0$;由②得$a=1$.

故当$a=0$或1时,$(A\cup B)\cap C$恰有两个元素.

(2) 使$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得$a=-1\pm\sqrt{2}$. 故当$a=-1\pm\sqrt{2}$时,$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素.

**例8** 设$n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant15$,$A$,$B$都是$\{1,2,\cdots,n\}$的真子集,$A\cap B=\varnothing$,且$\{1,2,\cdots,n\}=A\cup B$. 证明:$A$或者$B$中必有两个不同数的和为完全平方数.

**证** 由题设,$\{1,2,\cdots,n\}$的任何元素必属于且只属于它的真子集$A,B$之一.

假设结论不真,则存在如题设的$\{1,2,\cdots,n\}$的真子集$A,B$,使得无论是$A$还是$B$中的任两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设$1\in A$,则$3\notin A$. 否则$1+3=2^2$,与假设矛盾,所以$3\in B$. 同样,$6\notin B$,所以$6\in A$. 这时$10\notin A$,即$10\in B$. 因$n\geqslant15$,而15或者在$A$中,或者在$B$中,但当$15\in A$时,因$1\in A$,$1+15=4^2$,矛盾;当$15\in B$时,因$10\in B$,$10+15=5^2$,仍然矛盾. 因此假设不真,即结论成立.

由于解决某些集合和组合问题的需要,我们引进下面的

**定义** 由属于集合$A$但不属于集合$B$的全体元素形成的集

合叫做集合 $A$ 对 $B$ 的**差集**，记作 $A\backslash B$. 即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

**例 9** 设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$，对于 $M$ 的任一 9 元子集 $S$，函数 $f(S)$ 取 1 至 20 之间的整数值. 求证：不论 $f$ 是怎样的一个函数，总存在 $M$ 的一个 10 元子集 $T$，使得对所有的 $k\in T$，都有

$$f(T-\{k\})\neq k \quad (T-\{k\} \text{即} T \text{对} \{k\} \text{的差集}).$$

**证** 如果一个 10 元子集 $T$ 具有性质：对任何 $k\in T$，均有 $f(T-\{k\})\neq k$，我们就称 $T$ 为"好集". 不是"好集"的 10 元子集称之为"坏集"，也就是说，如果 $T$ 为"坏集"，则在 $T$ 中必有一 $k_0$，使

$$f(T-\{k_0\})=k_0.$$

令 $S=T-\{k_0\}$，这是一个 9 元子集. 一方面 $f(S)=k_0$，另一方面 $T=S\cup\{k_0\}$，即

$$T=S\cup\{f(S)\}.$$

上式表示了"坏集"的结构，它可由某一个 9 元子集 $S$ 生成，即 $S$ 与 $\{f(S)\}$ 的并集构成了"坏集".

如果 $f(S)\in S$，那么 $S\cup\{f(S)\}$ 是一个 9 元子集，而不是 10 元子集，因此任一 9 元子集至多能按上式生成一个"坏集". 于是，

$$\text{“坏集”的个数} \leqslant 9 \text{ 元子集的个数} < 10 \text{ 元子集的个数},$$

这最后一个不等式成立是因为，每个 9 元子集可由包含它的 11 个 10 元素子集划去相应元素得到，而每个 10 元子集划去其中任一元素只能得到 10 个不同的 9 元子集.

由此可知，"好集"是存在的.

## 习题 1.1

### A 组

1. 选择题

(1) $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{3}}$ 的值是属于区间(　　).

(A) $(-2,-1)$　(B) $(1,2)$　(C) $(-3,-2)$　(D) $(2,3)$

(2) 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与 $N=\{u\mid u=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为(　　).

(A) $M=N$　(B) $M\not\subseteq N,N\not\subseteq M$　(C) $M\subset N$　(D) $M\supset N$

2. 填空题

(1) 已知 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}\}$,$N=\{x\mid x=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}\}$,则 $M$ 与 $N$ 的关系是__________.

(2) 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$,$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$,且 $C\subseteq B$,则实数 $a$ 的取值集合是__________.

3. 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$. 求证:

(1) 一切奇数属于 $M$;

(2) 偶数 $4k-2$ $(k\in\mathbf{Z})$不属于 $M$;

(3) 属于 $M$ 的两个整数,其积仍属于 $M$.

4. 设 $A$ 和 $B$ 是两个集合. 又设集合 $X$ 满足 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$,$A\cup B\cup X=A\cup B$. 求集合 $X$.

5. 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$,其中 $a_n(1\leqslant n\leqslant 5)$是正整数,且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,并满足 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$,$a_1+a_4=10$,又 $A\cup B$ 中所有元素的和为 234,求集合 $A$.

6. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$,$B=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$. 问当 $a$ 取什么实数时,$A\cap B=\varnothing$?

7. 设 $P=\{$不小于 3 的自然数$\}$,在 $P$ 上定义函数如下:

若 $n\in P$,$f(n)$表示不是 $n$ 的约数的最小自然数,例如 $f(7)=2$,$f(12)=5$,等等,现记 $f(n)$的值域为集合 $M$.

求证:$19\in M$,$88\notin M$.

## B　组

8. $x$ 轴上有 1988 个区间$[a_i,b_i]$ $(i=1,2,\cdots,1988)$,且每两个区间都有公共点,求证:这 1988 个区间有公共点.

9. $n$ 为正奇数,$x_{jk}$为整数,$1\leqslant j\leqslant n$,$1\leqslant k\leqslant n$,满足:

(1) $x_{jk}=x_{kj}$;　　(2) 对任意的 $j$,$\{1,2,\cdots,n\}\subseteq\{x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jn}\}$.

求证:$\{1,2,\cdots,n\}\subseteq\{x_{11},x_{22},\cdots,x_{nn}\}$.

10. 已知一族集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,具有性质:

(1) 每个 $A_i$ 含 30 个元素；

(2) 对每一对 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n,A_i\cap A_j$ 恰含一个元素；

(3) $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\varnothing$.

求使这些集合存在的最大的 $n$.

## §1.2 有限集元素的数目

解决一个有限集有多少个元素的问题有时比我们想象的要困难得多，因为一个有限集可以是概括地给出的，由它的元素所同时满足的性质来确定它的元素的个数常常需要用到较复杂的技巧. 本节只讨论一些简单的问题.

### 1. 有限集的阶

有限集 $A$ 的元素数目叫做这个集合的阶，记作 $|A|$（或 $n(A)$）.

**例 1** 设集合 $A=\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 2000,a=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{b\mid 1\leqslant b\leqslant 3000,b=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$. 求 $|A\cap B|$.

**解** 形如 $4k+1$ 的数可分为 3 类：

$$12l+1,12l+5,12l+9\ (l\in\mathbf{Z}),$$

其中只有形如 $12l+5$ 的数是形如 $3k-1$ 的数. 令

$$1\leqslant 12l+5\leqslant 2000\ (l\in\mathbf{Z}),$$

得 $0\leqslant l\leqslant 166$. 所以 $A\cap B=\{5,17,\cdots,1997\}$. 所以 $|A\cap B|=167$.

在这里我们采用了列举出集合的全部元素的办法来求其元素的数目. 当一个集合的元素较多或者集合元素的性质较复杂时，这个方法是很难奏效的，这时必须另辟蹊径.

**例 2** 给定集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n,2n+1\}$，试求一个包含元素最多的一个集合 $A$ 的子集 $B$，使 $B$ 中任意 3 个元素 $x,y,z$ 都有

$$x+y\neq z.$$

**解** 性质 $x+y\neq z$ 等价于 $y\neq z-x$. 故可设 $B$ 为这样的子