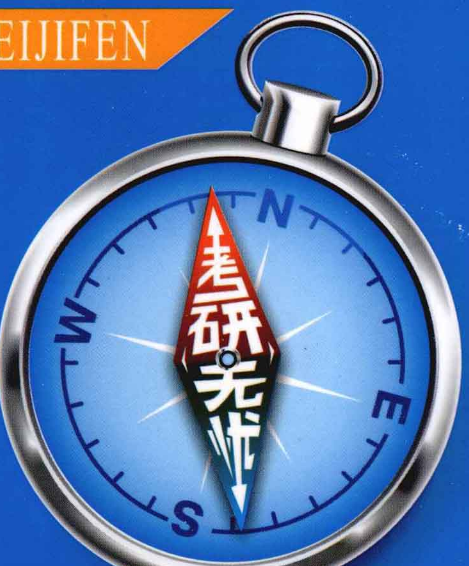
2014 新东方考研无忧数学培训教材

高等数学与微积分

GAODENG SHUXUE YU WEIJIFEN

汪诚义　编著



◎ 大纲变化权威解读

◎ 考试要点全面覆盖

◎ 解题思路深入剖析

◎ 答题技巧专业点拨

◎ 历年真题详尽解析

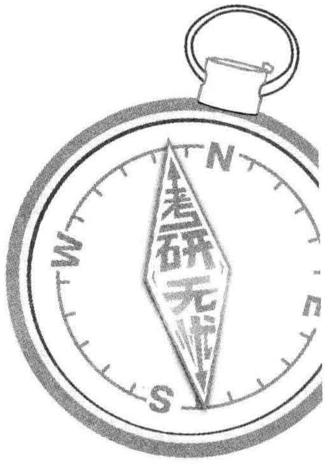
◎ 名校名师鼎力奉献

名师相伴　全程无忧

中央廣播電視大學出版社

2014新东方考研无忧数学培训教材

高等数学与微积分



汪诚义 ◎ 编著

名师相伴 全程无忧

中央廣播電視大學出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学与微积分 / 汪诚义编著. —北京：中央广播电视大学出版社，2013.4

2014 新东方考研无忧数学培训教材

ISBN 978-7-304-06057-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①微积分—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 059122 号

2014 新东方考研无忧数学培训教材

高等数学与微积分

汪诚义　编著

出版·发行： 中央广播电视大学出版社

电话： 营销中心 010-58840200　　总编室 010-68182524

网址： http://www.crtvup.com.cn

地址： 北京市海淀区西四环中路 45 号　　**邮编：** 100039

经销： 新华书店北京发行所

策划编辑： 李永强　　**责任校对：** 王　亚

责任编辑： 王　可　　**责任印制：** 赵联生

印刷： 北京宏伟双华印刷有限公司

版本： 2013 年 4 月第 1 版　　2013 年 4 月第 1 次印刷

开本： 787×1092　1/16　　**印张：** 24　　**字数：** 606 千字

书号： ISBN 978-7-304-06057-2

定价： 49.00 元

2014 新东方考研无忧数学培训教材编委会

序 FOREWORD

广大考研学子对“新东方”这个名字一定不会感到陌生。但大家看到新东方，首先想到的就是英语，毕竟新东方是从英语开始涉足考研培训领域的。1998 年，新东方历史上的第一个考研培训班在北京北四环边上的一家饭馆二楼开班。到 2012 年，全国每年选择新东方考研英语培训的学员已达 20 万人。

新东方的考研数学培训也已经开展了 10 年。2003 年，几位从北京大学和北京理工大学退休的老教授，加上数名中国科学院、北京航空航天大学等著名院校的博士，构成了新东方历史上第一支考研数学的教师团队。10 年来，这些老师兢兢业业，在新东方的讲台上挥洒着辛勤的汗水，培养了一批批考研数学的高分学子。到目前为止，新东方考研数学项目已经在北京、西安、杭州、沈阳等十余所新东方学校开始运作，从而服务了更多的考研学子。

有人说，数学的学习靠的是逻辑思维与推理，而语言学习更多依靠机械的记忆。这样的理解是有偏差的。不管是英语还是数学，都需要学习者的毅力和耐力，都需要基于理解基础之上的练习，而且是重复多次的练习。“Practice makes perfect” 这句英语中的谚语一样适用于数学的学习。

本套丛书是几位新东方考研数学名师多年教学经验的总结，这里面凝结了各位老师课堂教学的精华和心血，相信会对广大考研学子打好数学基础、冲击考研数学高分起到很好的促进作用。

最后，祝大家考研成功，金榜题名！

新东方教育科技集团国内项目管理中心　主任　郭威

北京新东方学校国内部　总监　周雷

前 言 PREFACE

编者曾在校内和社会上讲授考研数学二十多年，目前仍在第一线工作，在各类考研辅导班讲课。经过长期实践，编者对考研数学的考试大纲有深刻的理解，对历年命题有精辟的剖析。现把这些经验编辑成书，使参加考研的应试者乘上奔向考试的直通特快列车，在短时期内得到有效的数学训练，迅速提高应试水平，达到事半功倍的优异效果。

本书具有下面几个特点：

1. 贯彻“少而精”的原则

本书在深刻地理解考试大纲和精辟地剖析历年真题的基础上，突出重点，精选内容，由浅入深地分析，用较少的篇幅，达到全面复习、系统掌握的考研高水平要求。

2. 贯彻“数学体系与实战训练相结合”的原则

本书整体上按数学体系分章和节，但每一节又分为“（甲）内容要点”和“（乙）典型例题”两大部分。在内容要点中，既全面阐述考核点的有关内容，又对重点和难点进行深刻剖析。典型例题为各节的主体，全面体现考试题型中的重要方法和主要技巧，覆盖全部考试内容的实际要求。

3. 贯彻“循序渐进与融会贯通相结合”的原则

内容安排既按数学体系循序渐进，又结合考研命题综合性强的特点，不拘泥于大学数学授课的前后顺序，结合多个考核点加以融会贯通。例如，第一章第二节“极限”，把后面微分学和积分学中的方法都结合起来，集中在第一章讨论。这样就开阔了考生的思路，达到温故而知新的效果。

4. 贯彻“统筹兼顾与浑然一体相结合”的原则

本书把工科类和经济类中三种不同规格的考研数学要求加以统筹兼顾，又把基础班、强化班和冲刺班的不同要求统一成整体，满足考研应试者的各种要求。

本书是考研应试者备考不可缺少的工具书，也是在读大学本科生学习“高等数学”课程的重要参考书。

由于编者精力有限，书中的不足之处在所难免，望读者指正，以便再版时进一步完善。

汪诚义

考研数学基础班

班级编码	班级名称	课次	学费/元	上课时间	上课地点
VMEB1307	考研数学基础70人精品班（A班）	46	5280	2013-7-14 至 2013-8-5	海淀学清路校区
VMEB1308	考研数学基础70人精品班（B班）	46	5280	2013-8-7 至 2013-8-29	海淀学清路校区
VM1305	考研数学强化暑假走读班	40	1480	2013-7-15 至 2013-8-3	海淀学清路校区
VM1306	考研数学强化暑假走读班	40	1480	2013-8-6 至 2013-8-25	海淀魏公村校区
VMEB1312	考研数学强化暑假走读班（70人白金版）	46	5280	2013-8-5 至 2013-8-27	海淀学院路校区
ZVMEB1303	考研数学强化70人精品住宿班（A班）	46	6580	2013-7-16 至 2013-8-7	新东方住宿部(宾馆级住宿标准)
ZVMEB1304	考研数学强化70人精品住宿班（B班）	46	6580	2013-8-6 至 2013-8-28	新东方住宿部(宾馆级住宿标准)

考研英语暑假班

班级编码	班级名称	课次	学费/元	上课时间	上课地点
VC1329	考研英语强化暑假走读班	24	850	2013-7-8 至 2013-7-19	海淀魏公村校区
VCR1302	考研英语（二）强化暑假走读班	24	850	2013-8-18 至 2013-8-29	海淀学院路校区
VCJ1305	考研英语精讲精练暑假走读班	20	790	2013-8-5 至 2013-8-14	崇文珠市口校区
VCBEB1311	考研英语基础班（70人白金版）	20	3280	2013-7-14 至 2013-7-23	海淀学院路校区
VCEB1311	考研英语强化班（70人白金版）	24	3980	2013-7-24 至 2013-8-4	海淀学院路校区
VCJEB1303	考研英语精讲精练班（70人白金版）	20	3280	2013-7-25 至 2013-8-3	海淀学清路校区

考研政治暑假班

班级编码	班级名称	课次	学费/元	上课时间	上课地点
VCP1311	考研政治强化暑假走读班	24	720	2013-7-8 至 2013-7-19	海淀魏公村校区
VCPEB1301	考研政治强化班（70人白金版）	24	3980	2013-7-24 至 2013-8-4	海淀学院路校区

目录 CONTENTS

名师相伴全程无忧

第一章 函数、极限、连续

第一节 函 数

(甲) 内容要点

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个非空的实数集,如果有一个对应规则 f,对每一个 $x\in D$,都能对应唯一的实数 y,则这个对应规则 f 称为定义在 D 上的一个函数,记作 $y=f(x)$,称 x 为函数的自变量,y 为函数的因变量或函数值,D 称为函数的定义域,并把实数集

$$Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

2. 分段函数

如果自变量在定义域内取不同的值,函数不能用同一个表达式表示,而要用两个或两个以上的表达式来表示,则这类函数称为分段函数.

例如,

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 5x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数,它有两个分段点,分别为 $x=-1$ 和 $x=1$,它们两侧的函数表达式不同,因此,讨论函数 $y=f(x)$ 在分段点处的极限、连续、导数等问题时,必须分别先讨论左、右极限,左、右连续性和左、右导数.需要强调的是,分段函数一般不是初等函数,不能用“初等函数在定义域内皆连续”这个定理.

3. 隐函数

形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数,由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 $y=y(x)$ 称为隐函数,有些隐函数可以化为显函数(不一定是单值函数),有些隐函数则不能化为显函数.

4. 反函数

如果由 $y=f(x)$ 可以解出 $x=\varphi(y)$ 是一个函数(单值),则称它为 $f(x)$ 的反函数,记作 $x=$

$f^{-1}(y)$，有时也用 $y=f^{-1}(x)$ 表示.

二、基本初等函数

(1) 常值函数

$$y=C,\quad C\text{ 为常数}$$

(2) 幂函数

$$y=x^{\alpha},\quad \alpha\text{ 为常数}$$

(3) 指数函数

$$y=a^{x},\quad a>0,a\neq 1\text{ 为常数}$$
$$y=\mathrm{e}^{x},\quad \mathrm{e}=2.718\,2\cdots\text{为无理数}$$

(4) 对数函数

$$y=\log_{a}x,\quad a>0,a\neq 1\text{ 为常数}$$

常用对数

$$y=\log_{10}x=\lg x$$

自然对数

$$y=\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$$

(5) 三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x$$
$$y=\cot x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x$$

(6) 反三角函数

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x$$
$$y=\arctan x,\quad y=\operatorname{arccot} x$$

基本初等函数的概念、性质及其图像非常重要，影响深远. 例如，以后经常会用到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to0^{+}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to0^{-}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to0^{+}}\ln x$ 等，这就需要对 $y=\arctan x$，$y=\mathrm{e}^{x}$，$y=\ln x$ 的图像很清晰.

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

设

$$y=f(u),\quad \text{定义域为 } U$$
$$u=g(x),\quad \text{定义域为 } X\text{，值域为 } U^{*}$$

如果 $U^{*}\subset U$，则 $y=f(g(x))$ 是定义在 X 上的一个复合函数，其中，u 称为中间变量.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的、用一个分析表达式表示的函数称为初等函数.

四、考研数学中常出现的非初等函数

1. 用极限表示的函数

(1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}(x)$.

(2) $y=\lim\limits_{t\to x}f(t,x)$.

2. 用变上、下限积分表示的函数

(1) $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其中,$f(t)$连续,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$.

(2) $y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$,其中,$\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$可导,$f(t)$连续,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\varphi_2(x))\varphi'_2(x)-f(\varphi_1(x))\varphi'_1(x)$$

五、函数的几种性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$在 X 内有定义,若存在正数 M,使得对任意的 $x\in X$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 X 上为有界的.

2. 奇偶性

设区间 X 关于原点对称,若对任意的 $x\in X$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$在 X 上为奇函数;若对任意的 $x\in X$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$在 X 上为偶函数.奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 单调性

设 $f(x)$在 X 上有定义,若对任意 $x_1\in X$,$x_2\in X$,$x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$[$f(x_1)>f(x_2)$],则称 $f(x)$在 X 上为单调增加的(单调减少的);若对任意 $x_1\in X$,$x_2\in X$,$x_1<x_2$,都有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$[$f(x_1)\geqslant f(x_2)$],则称 $f(x)$在 X 上为单调不减的[单调不增的].

(注意:有些书上把这里的"单调增加"称为"严格单调增加";把这里的"单调不减"称为"单调增加".)

4. 周期性

设 $f(x)$在 X 上有定义,如果存在常数 $T\neq 0$,使得对任意 $x\in X$,$x+T\in X$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,称 T 为 $f(x)$的周期.

由此可见,周期函数有无穷多个周期.一般地,把其中的最小正周期称为周期.

(乙)典型例题

一、求函数的定义域

【例 1】 求函数 $f(x)=\ln[\ln(\ln x)]+\sqrt{100-x^2}$的定义域.

解 $\ln[\ln(\ln x)]$要有定义,可得 $x>\mathrm{e}$. $\sqrt{100-x^2}$要有定义,可得 $x^2\leqslant 100$,即$|x|\leqslant 10$.因此,$f(x)$的定义域为$(\mathrm{e},10]$.

【例 2】 求 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\ln|x-5|}$的定义域.

解 $\sqrt{x-\sqrt{x}}$要有定义,可得 $x\geqslant 1$ 和 $x=0$. $\frac{1}{\ln|x-5|}$要有定义,可得 $x\neq 5$,$x\neq 4$,$x\neq 6$.因此,y 的定义域为$\{0\}\cup[1,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$.

【例 3】 设 $f(x)$的定义域为$[-a,a]$($a>0$),求 $f(x^2-1)$的定义域.

解 要求$-a\leqslant x^2-1\leqslant a$,则 $1-a\leqslant x^2\leqslant 1+a$.

当 $a\geqslant1$ 时，由于 $1-a\leqslant0$，可得 $x^2\leqslant1+a$，则 $|x|\leqslant\sqrt{1+a}$.

当 $0<a<1$ 时，$1-a>0$，于是 $\sqrt{1-a}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{1+a}$，即 $\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}$ 或 $-\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant-\sqrt{1-a}$.

【例 4】 设 $g(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x\leqslant4,\end{cases}$ 求 $f(x)=g(2x)+g(x-1)$ 的定义域，并求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

解 $g(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，要求 $0\leqslant2x\leqslant4$，则 $0\leqslant x\leqslant2$；要求 $0\leqslant x-1\leqslant4$，则 $1\leqslant x\leqslant5$. 于是 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，并且

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=g(3)+g\left(\frac{1}{2}\right)=2+1=3$$

二、求函数的值域

【例 1】 求 $y=e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域.

解 先求出 y 的反函数，它的定义域就是原函数的值域.

$$\ln y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \text{即 } x^3-1=\frac{1}{\ln^3y}$$

可得 $x=\sqrt[3]{1+\frac{1}{\ln^3y}}$，它的定义域为 $y>0$ 且 $y\neq1$，所以原函数的值域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【例 2】 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant2\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数.

解 当 $x<-2$ 时，$y>3+8=11$，反函数为 $x=\sqrt[3]{3-y}$.

当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，$3\leqslant y=5-x\leqslant7$，反函数为 $x=5-y$.

当 $x>2$ 时，$y=1-(x-2)^2<1$，反函数为 $x=2+\sqrt{1-y}$.

因此，$y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$，反函数为

$$x=\begin{cases}2+\sqrt{1-y}, & y<1\\ 5-y, & 3\leqslant y\leqslant7\\ \sqrt[3]{3-y}, & y>11\end{cases}$$

【例 3】 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$.

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；

(2) 求 $f(x)$ 的值域.

(1) **证明** $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x)$（做变量替换 $t=u+\pi$）

可见，$f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) **解** 只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域. 为此，先找出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值和最小值.

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$，可得两个驻点分别为 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上没有不可导点，有两个端点

0 和 π，比较 $f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right),f\left(\frac{3\pi}{4}\right),f(\pi)$ 的函数值如下：

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\mathrm{d}t=1$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 $2-\sqrt{2}$，最大值为 $\sqrt{2}$. 因此，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域，即在 $(-\infty,+\infty)$ 内的值域为 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

三、求复合函数有关表达式

1. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$，求 $f(g(x))$

【例 1】 已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)-1}\right)$.

解
$$f(x)-1=\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}\text{，即}\frac{1}{f(x)-1}=x-1,\quad x\neq 1$$

于是

$$f\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)=f(x-1)=\frac{x-1}{x-1-1}=\frac{x-1}{x-2},\quad x\neq 1,x\neq 2$$

【例 2】 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(f(\cdots f(x)))=f_n(x)$（n 重复合）.

解
$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

若 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\Bigg/\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

根据数学归纳法可知，对正整数 n，

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解
$$f(f(x))=\begin{cases}4-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2\\ 0, & |f(x)|>2\end{cases}$$

当 $|x|>2$ 时，$|f(x)|=0$，所以 $f(f(x))=4-0=4$.

当 $|x|\leqslant 2$ 时，若 $|f(x)|=|4-x^2|\leqslant 2$，则要求 $2\leqslant x^2\leqslant 6$，故当 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 时，$|f(x)|\leqslant 2$，则 $f(f(x))=4-(4-x^2)^2$. 而当 $|x|<\sqrt{2}$ 时，$|f(x)|>2$，则 $f(f(x))=0$.

综上，

$$f(f(x))=\begin{cases}0, & |x|<\sqrt{2}\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2\\ 4, & |x|>2\end{cases}$$

2. 已知 $g(x)$和 $f(g(x))$，求 $f(x)$

【例 1】 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

解 令 $e^x+1=u$， $x=\ln(u-1)$，则

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+\ln(u-1)=u^2-u+\ln(u-1)$$

于是

$$f(x)=x^2-x+\ln(x-1)$$

【例 2】 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$且 $f(1)=0$，求 $f(x)$.

解 令 $e^x=t, x=\ln t$，因此，

$$f'(e^x)=f'(t)=\frac{\ln t}{t}$$

$$f(x)-f(1)=\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

由于 $f(1)=0$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

【例 3】 设 $f(\sqrt{x})=\sin x$，求 $f'(x)$.

解 由于 $f(\sqrt{x})=\sin(\sqrt{x})^2$，于是 $f(x)=\sin(x^2)$，则

$$f'(x)=2x\cos(x^2)$$

【例 4】 已知 $f(\sin x)=3-\cos 2x$，求证 $f(\cos x)=3+\cos 2x$.

证明
$$f(\sin x)=3-(1-2\sin^2 x)=2+2\sin^2 x$$

即

$$f(u)=2+2u^2$$

于是

$$f(\cos x)=2+2\cos^2 x=3+(2\cos^2 x-1)=3+\cos 2x$$

3. 已知 $f(x)$和 $f(g(x))$，求 $g(x)$

【例 1】 已知 $f(x)=\ln(1+x)$，$f(g(x))=x$，求 $g(x)$.

解 $g(x)=f^{-1}(x)$，实际上是求反函数的问题，

$$f(g(x))=\ln[1+g(x)]=x\text{，即 }1+g(x)=e^x$$

所以

$$g(x)=e^x-1$$

4. 有关复合函数方程

【例 1】 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$，求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x+1}{x-1}=u, x+1=ux-u, x(u-1)=u+1, x=\frac{u+1}{u-1}$，则

$$f(u)=3f\left(\frac{u+1}{u-1}\right)-\frac{2u+2}{u-1}$$

于是

$$f(u)=3[3f(u)-2u]-\frac{2u+2}{u-1}$$

所以

$$8f(u)=6u+\frac{2(u+1)}{u-1}$$

$$f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{u+1}{4(u-1)}$$

四、有关四种性质

【例 1】 设 $F'(x)=f(x)$,则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$为奇函数,则 $F(x)$为偶函数

(B) 若 $f(x)$为偶函数,则 $F(x)$为奇函数

(C) 若 $f(x)$为周期函数,则 $F(x)$为周期函数

(D) 若 $f(x)$为单调函数,则 $F(x)$为单调函数

解 (B)不成立,反例为 $f(x)=x^2, F(x)=\frac{x^3}{3}+1$.

(C)不成立,反例为 $f(x)=\cos x+1, F(x)=\sin x+x$.

(D)不成立,反例为 $f(x)=2x, F(x)=x^2$,在$(-\infty,+\infty)$内.

(A)成立.证明如下:$F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$f$ 为奇函数,

$$F(-x)=F(0)+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=F(0)+\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)$$
$$=F(0)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$$

于是 $F(x)$为偶函数.

【例 2】 求 $I=\int_{-1}^1 x[x^5+(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]\mathrm{d}x$.

解 $f_1(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$是奇函数,这是因为 $f_1(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-f_1(x)$. $f_2(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数,这是因为

$$f_2(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\ln 1-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f_2(x)$$

因此,$x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.于是

$$I=\int_{-1}^1 x^6\mathrm{d}x+0=2\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\frac{2}{7}$$

【例 3】 两个周期函数之和是否仍是周期函数?

解 不一定.举例如下:

(1) $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$.

$f_1(x)=\sin\frac{x}{2}$,周期为 4π;$f_2(x)=\cos\frac{x}{3}$,周期为 6π. 由于 4π 和 6π 的最小公倍数为 12π,所以 $f(x)$是以 12π 为周期的函数.

(2) $f(x)=\sin 2x+\cos\pi x$.

$f_1(x)=\sin 2x$,周期为 π;$f_2(x)=\cos\pi x$,周期为 2. 由于 π 和 2 没有最小公倍数,所以 $f(x)$不是周期函数.

(3) $f(x)=\sin 2x+(1-\sin 2x)$.