文都教育

2014

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学辅导讲义

文都考研命题研究中心 编

汤家凤 主编

名师亲自指点备考迷津

总结高数学科命题特点

全面归纳高数结论公式

精辟讲解典型例题习题

中国原子能出版社

文都教育

2014

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学辅导讲义

文都考研命题研究中心 编
汤家凤 主编

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义/文都考研命题研究中心编. —北京:中国原子能出版社,2013.2

ISBN 978-7-5022-5838-2

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①文… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 038993 号

全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)
责任编辑	侯茸方
特约编辑	李 焕
印 刷	北京市增富印刷有限责任公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	14.25 **字 数** 300 千字
版 次	2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-5838-2 **定 价** 28.00 元

网址:http://www.aep.com.cn **E-mail:atomep123@126.com**

发行电话:010-68452845

前　言

数学是全国硕士研究生入学统一考试工程类和经济类考生必考的一门课程，且数学课程分值为150分，与专业课的分值相同，数学考试的成败直接关系到整个考试的成败，而高等数学是数学试卷中分值最大的一门课程，其中高等数学在数学一、数学三试卷中的分值为82分，占总分的56%，在数学二试卷中的分值为116分，占总分的78%，所以高等数学的复习是整个考研数学复习的重中之重。

高等数学所涉及的内容非常多，知识体系系统性非常强，题型多，方法技巧性高，很多同学虽然在复习高等数学上花费了大量的时间，但收效甚微，甚至对数学产生惧怕心理。高等数学的复习要有正确的方法，抓好复习的几个关键环节，系统全面掌握高等数学的理论体系和方法体系，善于归纳和总结，通过努力可以很好地掌握这门课程。本书是根据作者十八年考研数学辅导的心得和教案精心总结而成的，使理论更加系统化、通俗化，便于掌握和记忆，对题型和方法进行了全面总结和概括。认真阅读此书，可使考生分析问题、解决问题的能力得到大幅度提高，尽快进入最佳学习状态，达到事半功倍的复习效果。

本书的特点有：

1. 每章给出考查要求，便于大家了解各个知识点的考查范围和要求达到的程度。

2. 对每章的基本理论都给出了系统的归纳和总结，理论部分包括基本概念、基本原理、基本公式，同时配备基础题，以加强对所学知识和原理的理解，对重要的原理给出了新的理论证明，对需要重点掌握的知识点给出了延伸解读。

3. 重点题型讲解部分给出每个部分的基本题型和综合题型，通过重点题型的掌握使大家对考查的重点和形式有非常深入的了解，更加适应考试要求，尤其重要的是，重点题型部分给出了很多带新视角的新题型，很多新的题型在过去的考试过程中证明也是命题者思考的方向。

本书适用于数学一、数学二、数学三，但对不同数学种类考试内容不同的部分给出了说明。

本书作者在若干年教学过程中，借鉴和参考了若干国内外的优秀著作，得到很多的收获和启发，作者对这些书的作者表示衷心感谢。

由于作者的水平有限，教学过程中及本书中仍然有很多地方需要改进和提高，恳请读者和广大同仁提出宝贵的批评和建议。

汤家凤

2013年2月于南京

挑战考研数学满分复习要点

重视基础，莫眼高手低。考研数学复习之初的任务和目标就是打好基础，在脑中建立扎实稳固的知识体系。基础是一切之根本，考研数学试题中大部分也都是考察考生对基础知识的掌握情况。不要因为某些定义定理看起来简单，便忽略过去不看，眼高手低说的就是这种行为，莫眼高手低就是不放过任何一个考点，即使那些你认为很简单的知识点，也要做到踏实认真复习。既然想要考试得满分，复习怎可不全面彻底？

勤动手，多动脑，做总结。数学的特点就是要算，要动手做题，要想牢固的掌握每类题型的解法，不动手动脑是不行的，不只是要勤动手多动脑，还要多做总结。虽说考研辅导书上都已经有很全面的总结，但还是要尝试自己根据做题经验做相关的总结。文都考研建议大家每复习完一个章节或做完一系列的例题习题后，自己要动手动脑做相关总结，并且记在复习笔记本里，总结完后再和辅导书上的总结进行比对，看自己总结的有何优缺点，然后再加以完善。这样不仅能加深对相关知识点的记忆理解，而且可以锻炼解题所需的逻辑思维。

很多考生报了考研数学的辅导班，因为这样可以少走弯路，节省复习时间并达到高效复习的效果。但要注意报了辅导班不代表就可以高枕无忧，这里建议考生在辅导班每次上课之前要做相应的预习，将《考研数学复习大全》里相关定义定理例题都先自习一遍，以免上课时老师讲的速度快跟不上影响听课效果；且在课后还要多做题来巩固所学，理解模糊的知识点要及时解决，不要堆积到最后。考研数学要考到满分并不是一件容易的事情，一分耕耘一分收获，一定要在平时多下苦功才能保证在最后考到高分甚至满分。

注：关于本书中的任何问题，均可发送邮件至邮箱qinxiaoyu2000@163.com反映，会有专人及时回复。

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师主编的《考研数学复习大全.数学一》《考研数学复习大全.数学二》《考研数学复习大全.数学三》《全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义》《全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义》《考研数学接力题典1800:通关、高分、夺冠必备》《考研数学绝对考场最后八套题.数学一》《考研数学绝对考场最后八套题.数学二》《考研数学绝对考场最后八套题.数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育集团特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育集团将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010—88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

北京世纪文都教育科技发展有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘　岩

2013年3月

文都图书邮购目录

序号	书名	开本	定价(元)	作者	出版时间	出版社
2014考研思想政治理论系列						
1	《报考知识全集及政治理论基干知识全集》	32开	13.80	徐之明	已出版	中国原子能
2	《考研思想政治理论高频考点与备考策略》	32开	12.80	蒋中挺	已出版	中国原子能、
3	《考研思想政治理论知识点精粹与课程导学》	32开	15.00	王向明	2013/03	中国时代经济
4	《考研思想政治理论历年真题详解》	16开	12.80	蒋中挺	2013/03	中国原子能
5	《考研思想政治理论历年真题精析》	16开	18.80	赵政	2013/03	中国时代经济
6	《考研思想政治理论七年真题精析》	16开	18.00	王向明	2013/03	中国时代经济
7	《考研思想政治理论核心考点精讲精练》	16开	40.00	任燕翔	2013/04	中国时代经济
8	《考研思想政治理论强化通关800题》	16开	29.80	蒋中挺	2013/06	中国原子能
9	《考研思想政治理论名师全教程》	16开	45.00	王向明	2013/06	中国时代经济
10	《考研思想政治理论高分必练1000题》	16开	32.00	王向明	2013/06	中国时代经济
11	《考研思想政治理论复习全书》	16开	42.00	蒋中挺	2013/06	中国时代经济
12	《考研思想政治理论客观题应试宝典》	64开	6.00	蒋中挺	2013/06	中国时代经济
13	《全国硕士研究生入学统一考试思想政治理论考试大纲导读》	32开	16.00	文都考研命题研究中心	2013/09	中国原子能
14	《考研思想政治理论形势与政策命题热点及核心预测》	32开	15.00	王向明	2013/10	中国时代经济
15	《考研思想政治理论主观题应试宝典》	32开	12.00	王向明	2013/10	中国时代经济
16	《形势与政策全集暨相关分析题预测》	32开	13.80	徐之明	2013/10	中国原子能
17	《考研思想政治理论形势与政策热点剖析及命题预测》	32开	12.00	蒋中挺	2013/10	中国原子能
18	《考研思想政治理论真题预测百分百》	32开	12.00	蒋中挺	2013/10	中国原子能
19	《考研思想政治理论冲刺考点必背》	32开	12.00	蒋中挺	2013/11	中国原子能
20	《考研思想政治理论绝对考场最后五套题》	8开	14.60	蒋中挺	2013/11	中国原子能
21	《政治理论终极预测4套卷》	16开	12.80	徐之明	2013/11	中国原子能
22	《考研思想政治理论冲刺模拟6套卷》	16开	16.00	王向明	2013/11	中国时代经济
2014考研英语系列						
23	《考研英语必考词汇突破全书》	16开	35.00	何凯文	已出版	中国时代经济
24	《考研词汇速记指南》	16开	40.00	刘一男	已出版	中国时代经济
25	《考研词汇速记指南(典藏版)》	16开	56.00	刘一男	已出版	中国时代经济
26	《考研英语长难句解密》	32开	10.00	何凯文	已出版	中国时代经济
27	《考研英语阅读同源外刊时文精析》	16开	36.00	何凯文	已出版	中国时代经济
28	《考研英语写作秘笈》	32开	12.00	文都考研命题研究中心	已出版	中国原子能
29	《考研英语高分策略:翻译与句型结构专项特训》	16开	19.80	李超	已出版	中国原子能
30	《考研英语写作高分攻略》	16开	18.00	何凯文	已出版	中国时代经济
31	《考研英语历年真题精析:命题剖析与复习指导》(英语一)	16开	32.00	文都考研命题研究中心	已出版	中国原子能
32	《考研英语高分策略:长难句与语法突破专项特训》	32开	18.00	程呈	已出版	中国原子能
33	《考研英语高分策略:完形填空与新题型专项特训》	16开	22.00	赵文通	已出版	中国原子能
34	《考研英语语法7天乐》	32开	25.00	韩苏	2013/03	中国时代经济
35	《考研英语阅读思路解析》	16开	26.00	何凯文	2013/03	中国时代经济
36	《考研英语历年真题全解析》	16开	25.00	何凯文	2013/04	中国时代经济
37	《全国硕士研究生入学统一考试英语考试大纲导读》	32开	18.00	文都考研命题研究中心	2013/09	中国原子能
38	《考研英语绝对考场最后六套题》(英语一)	8开	16.00	何凯文	2013/10	中国时代经济
2014考研数学系列						
39	《考研数学必备手册》	64开	5.00	文都考研命题研究中心	已出版	中国原子能
40	《考研数学复习大全》(数学一)	16开	58.00	汤家凤	已出版	中国时代经济

目　录

第一章　极限与连续

考查要求

1. 会求函数的复合函数.
2. 掌握函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等初等特性.
3. 理解数列及函数的极限的概念.
4. 熟练掌握无穷小及等价无穷小的概念与性质.
5. 了解极限的基本性质、运算性质,掌握极限的存在性质及重要极限.
6. 熟悉各种不定型极限的计算.
7. 了解连续与间断的概念,掌握函数间断点的判断与分类.
8. 熟练掌握闭区间上连续函数的性质.

第一节　函　数

一、基本概念

1. 函数 —— 设变量 x 的取值范围为 D,若对任意的 $x \in D$,按照某种对应关系总有唯一确定的值 y 与 x 对应,称 y 为 x 的函数,记为 $y = f(x)$,其中 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域.

2. 复合函数 —— 设 $u = \varphi(x)(x \in D_1)$, $y = f(u)(u \in D_2)$,且对任意的 $x \in D_1$ 有 $\varphi(x) \in D_2$,称 y 为 x 的复合函数,记为 $y = f[\varphi(x)]$.

3. 反函数 —— 设 $y = f(x)(x \in D)$ 为单调函数,其值域为 $\mathbf{R}$,对任意的 $y \in \mathbf{R}$,有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应,称 x 为 y 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$.

4. 基本初等函数 —— 称 $\begin{cases} x^a, \\ a^x(a > 0, a \neq 1), \\ \log_a x(a > 0, a \neq 1), \\ \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x, \\ \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x \end{cases}$ 为基本初等函数.

5. 初等函数 —— 由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子称为初等函数.

二、函数的初等特性

1. 有界性 —— 设 $y = f(x)(x \in D)$,若存在 $M > 0$,对任意的 $x \in D$,总有 $|f(x)| \leqslant M$,称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

2. 单调性 —— 设 $y = f(x)(x \in D)$,若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$,总有 $f(x_1) < f(x_2)$,称 $y = f(x)$ 在 D 上单调增加;若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$,总有 $f(x_1) > f(x_2)$,

称 $y=f(x)$ 在 D 上单调减少.

3. 奇偶性 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$，其中 D 关于原点对称，若 $f(-x)=-f(x)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上为偶函数.

【例】 设函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，

(1) 判断以上函数的奇偶性；

(2) 求以上函数的反函数.

【解】 (1) 显然 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

得函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(2) 由 $\begin{cases}y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\\ -y=\ln(-x+\sqrt{1+x^2}),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{1+x^2}=e^y,\\ -x+\sqrt{1+x^2}=e^{-y},\end{cases}$ 两式相减得 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$.

4. 周期性 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$，若存在 $T>0$，对任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $y=f(x)$ 的周期.

第二节　极　限

一、基本概念

1. 极限的定义

(1) 数列极限定义($\varepsilon-N$) —— 若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\varepsilon$，称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

(2) 函数当自变量趋于有限值的极限定义($\varepsilon-\delta$) —— 若对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

【注解】

(1) 在 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 中，$x\to a$ 应同时包含 $\begin{cases}x\to a^-,\\ x\to a^+.\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在与否与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有无定义无关，如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$，即函数在一点的极限情况与函数在该点有无定义无关.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 存在，称该极限为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限，记为 $f(a-0)$；若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，称该极限为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限，记为 $f(a+0)$. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 存在的充分必要条件是 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 都存在且相等.

(4) 以下几种情形考虑左右极限：

情形一：$a^{\frac{c}{x-b}}(a>0,x\to b)$.

【例 1】 极限 $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{2}{x-1}}$ 是否存在？

【解】　当 $x \to 1^-$ 时，$\dfrac{2}{x-1} \to -\infty$，则 $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{2}{x-1}} = 0$；

当 $x \to 1^+$ 时，$\dfrac{2}{x-1} \to +\infty$，则 $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{2}{x-1}} = +\infty$，于是 $\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{2}{x-1}}$ 不存在.

【例 2】　函数 $f(x) = \dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$，讨论极限 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 是否存在？

【解】　当 $x \to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x} \to -\infty$，则 $f(0-0) = 1$；

当 $x \to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x} \to +\infty$，则 $f(0+0) = -1$.

因为 $f(0-0) \neq f(0+0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在.

情形二：$\arctan\dfrac{1}{x-a}(x \to a)$，显然 $\lim\limits_{x\to a^-}\arctan\dfrac{1}{x-a} = -\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to a^+}\arctan\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{\pi}{2}$.

情形三：分段函数的极限，分段函数在分界点处的极限一般需要考虑左右极限.

【例 3】　设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \dfrac{e^{2x}-1-\sin x}{\arctan x}, & x < 0, \end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 是否存在？

【解】　由 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$，得 $f(0+0) = 1$；

由 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{2x}-1-\sin x}{\arctan x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} - \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，得 $f(0-0) = 1$，

因为 $f(0-0) = f(0+0) = 1$，所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$.

(3) 函数当自变量趋于无穷的极限定义($\varepsilon - X$)—— 若对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

2. 无穷小 —— 以零为极限的函数称为无穷小.

设 $\alpha \to 0, \beta \to 0, \alpha, \beta$ 为自变量某种趋向下的无穷小，则

(1) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = k(k \neq 0, \infty)$，称 β 为 α 的同阶无穷小，记为 $\beta = O(\alpha)$.

特别地，若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，称 β 为 α 的等价无穷小，记 $\alpha \sim \beta$.

二、无穷小的性质

1. 无穷小的基本性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小之积为无穷小，如 $x \to 0$ 时，x^2 为无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，则 $\lim\limits_{x\to0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

(3) 常数与无穷小之积为无穷小.

(4)(重要性质) $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 $\alpha \to 0$.

2. 等价无穷小的性质

(1)$\alpha \sim \alpha$.

(2) 若 $\alpha \sim \beta$,则 $\beta \sim \alpha$.

(3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$,则 $\alpha \sim \gamma$.

(4) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ 且 $\lim \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = A$,则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = A$.

(5)$\alpha \sim \beta$ 的充分必要条件是 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

3. $x \to 0$ 时常用的等价无穷小

(1)$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$.

(2)$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

(3) $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

【例 1】 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x \ln(1+x)}$.

【解】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x \ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$.

【注解】

不定型极限中,若出现几项相乘时,可以直接使用等价无穷小.

【例 2】 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x \ln(1+x)}$.

【解】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x \ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x)}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.

【例 3】 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x \arcsin x^2}$.

【解】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x \arcsin x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

【注解】

不定型极限中,若出现几项加减使用等价无穷小时,若达到精确度,则可以直接使用等价无穷小代替,否则不可以直接使用等价无穷小代替.例 2 中分母是 2 阶无穷小,分子使用等价无穷小也达到 2 阶,故分子可以直接使用等价无穷小代替;例 3 中分母是 3 阶无穷小,分子若使用等价无穷小只达到 1 阶,精确度不够,故分子不可直接使用等价无穷小.

【例 4】 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

【解】

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x} = e \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x} = e \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = e \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{e}{2}.$$

三、极限性质

(一) 极限的一般性质

1. 极限存在必然是唯一的

2. 极限的有界性

(1)(数列极限的有界性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,则数列$\{a_n\}$有界,反之不成立.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,取$\varepsilon_0=1$,根据数列极限的定义,存在$N>0$,当$n>N$时,$|a_n-A|<1$,从而$|a_n|<1+|A|$,取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|A|\}$,则对一切的$n$,总有$|a_n|\leqslant M$.

反之,取$a_n=(-1)^n$,显然数列$\{a_n\}$有界,但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

(2)(函数极限的局部有界性) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,则$f(x)$在$x=a$的去心邻域内有界.

证明 取$\varepsilon_0=1$,因为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,所以由极限定义,存在$\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,$|f(x)-A|<1$,故$|f(x)|\leqslant 1+|A|$.

3. 极限的保号性

(1) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$,则存在$\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,$f(x)>0(<0)$.

(口诀:极限正则去心邻域正;极限负则去心邻域负).

(2) 设$f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,且$\lim f(x)=A$,则$A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

(口诀:函数不负极限不负,函数不正极限不正).

4. 列与子列极限的关系

若列极限存在,则其任意子列极限也存在且相等,反之不成立.

【例1】 讨论$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^2}$的存在性.

【解】 取$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0(n\to\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n^2}=0$;

取$y_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}\to 0(n\to\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n^2}=1$.

则$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^2}$不存在.

【注解】

本题取$x\to 0$的两个不同的子列,沿两个不同子列极限不同,故极限不存在.

【例2】 求$\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})]$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln(1+\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2},$$

得$\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})]=\dfrac{1}{2}$.

【注解】

$n\to\infty$是$x\to\infty$的子列,因为沿着列极限存在,故子列极限也存在.

【例3】 设$f'(1)=0$,又$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(x-1)^3}=2$,问$x=1$是否为极值点?

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(x-1)^3}=2>0$,所以由极限保号性,存在$\delta>0$,当$0<|x-1|<\delta$时,

$\frac{f'(x)}{(x-1)^3}>0$，于是$\begin{cases}f'(x)<0, x\in(1-\delta,1),\\ f'(x)>0, x\in(1,1+\delta),\end{cases}$故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小点.

（二）运算性质

1. 四则运算性质

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

(2)$\lim f(x)g(x)=AB$；

(3)$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$.

2. 复合函数极限运算性质

(1) 设$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A, \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 且 $\varphi(x)\neq a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

证明　任取 $\varepsilon>0$，因为$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，所以存在 $\eta>0$，当 $0<|u-a|<\eta$ 时，$|f(u)-A|<\varepsilon$.

因为$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，所以对 $\eta>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$0<|\varphi(x)-a|<\eta$，于是对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

(2) 设$\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$.

【注解】

设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$，其中 $a_0b_0\neq 0$，

则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

（三）极限存在性质

准则一：夹逼定理

(1) 数列型：设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

(2) 函数型：设 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim f(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim g(x)=A$.

【例 1】　求$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$（$a,b,c$ 为非负常数）.

【解】　不妨设 a 为 a,b,c 中的最大数，则 $a^n\leqslant a^n+b^n+c^n\leqslant 3a^n$，于是

$$a\leqslant(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 3^{\frac{1}{n}}a.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=a$.

一般地，$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$.

【例 2】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geqslant 0)$.

【解】
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$