院士数学讲座专辑

张景中◎著

不用极限的微积分

——张景中院士献给数学爱好者的礼物

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

不用极限的
微积分

——张景中院士献给
数学爱好者的礼物

张景中◎著

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社
北京

图书在版编目（C I P）数据

不用极限的微积分 / 张景中著. —北京：中国少年儿童出版社，2012.5
（中国科普名家名作·院士数学讲座专辑）
ISBN 978-7-5148-0637-3

Ⅰ.①不… Ⅱ.①张… Ⅲ.①微积分—少儿读物 Ⅳ.①0172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 074624 号

BUYONG JIXIAN DE WEIJIFEN
（中国科普名家名作·院士数学讲座专辑）

出版发行：中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出 版 人：李学谦
执行出版人：赵恒峰

策　　划：薛晓哲　　著　　者：张景中
特约编辑：方运加　　责任校对：杨　宏
责任编辑：常　乐　　责任印务：杨顺利
封面设计：缪　惟

社　　址：北京市朝阳区建国门外大街丙 12 号　　邮政编码：100022
总 编 室：010-57526071　　传　　真：010-57526075
发 行 部：010-57526568
h t t p：//www. ccppg. com. cn
E-mail：zbs@ccppg. com. cn

印刷：河北新华第一印刷有限责任公司

开本：880mm × 1230mm　1/32　　印张：10.5
2012 年 5 月第 1 版　　2012 年 5 月河北第 1 次印刷
字数：140 千字　　印数：8000 册

ISBN 978-7-5148-0637-3　　定价：22.00 元

致读者

学数学要会算、会用，还要明白道理。

在高中课程中，微积分的计算主要是求导数；应用主要是作曲线的切线和研究函数的增减性。这些事情可谓“知难行易”。比如“导数正则函数增”这个命题，学点微积分的人都会用，但能够讲清楚其中道理的极少。即使是学过微积分的理工科大学生，如果不是数学专业的，95%以上说不清这个道理。

数学的游戏规则是要讲道理。学到微积分就不讲道理了？当然不是。是因为这道理太复杂，花不起这个时间，付不起这个代价。微积分的基点和难点是极限概念，这几乎是两个世纪来的共识。但微积分的主要创建人牛顿和莱布尼兹，终其一生未能说清楚极

限；当时和以后一百多年的数学家也都说不清，可见其不简单。后来柯西等几位数学家，总算说清楚了极限，但至今被认为难懂。莫绍揆写过一本《论极限》，开头就指出极限是很难懂的概念。常庚哲和史济怀写的《数学分析教程》，这套在高等数学教育界享有盛誉的教材，开始126页的篇幅主要用来讲极限和连续函数，到了第三章127页才讲到导数的定义。可见微积分的道理确实不容易讲明白。

微积分的道理昨天说不清，今天很难懂，明天呢？永远难懂吗？数学家可不甘心！为把微积分变容易，中外都有人在干。林群就干了十几年。他的书《微积分减肥快跑》，正文才126页（每页约500字）。人家的书126页（每页约1000字）还没开始讲导数呢，他却能从导数讲到了微分方程！可贵的是重要的结论都证了，因缺少实数理论不能证的也交代清了，不失严谨。

林群在《微积分减肥快跑》中指出，“条条道路通罗马”，微积分的减肥方案不止一种。附录中还用

了宝贵的 4 页篇幅，介绍本书作者提出的一个不等式。这个不等式是又一条通向罗马的道路。

这条路风光如何？请看下面的景点介绍。

景点有大有小。全书 18 讲轻重不同。

第 1 讲从求瞬时速度问题出发引入传统的导数概念。与多数教材和通俗读物类似，不求严谨。这里着重说明极限方法困难所在。

第 2 讲真正开辟了新路。从一个极为平凡的想法出发，给出求瞬时速度问题的另一种解决方案。

“瞬时速度有时大于平均速度，有时小于平均速度”，从这个基本道理提炼出估值不等式，形成甲乙函数的概念，是本书的基本出发点。用估值不等式马上引出几个基本函数的乙函数，它们恰好都是对应甲函数的导数！

这一讲里推出 9 个命题。其中命题 2.3、命题 2.4 和命题 2.8 无关大局，初读可以不管或不管其推导过程；另外的 6 个命题，5 个分别计算了函数 $f(x)=C$、$f(x)=k\cdot x+C$、$f(x)=x^2$、$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 和 $f(x)=$

$\sqrt{x}$的乙函数，一个推出了“若乙函数恒为0，则甲函数为常数；若乙函数为常数$k\neq0$，则甲函数为一次函数$k\cdot x+C$；若乙函数为正，则甲函数递增……”等性质，比传统导数对应的计算和推导简单得多！

别忽视这一讲末尾的注记。它说明乙函数很不唯一，为后面第5讲留下伏笔。

第3讲讨论切线，这是导数的重要应用。其中提出了不依赖极限概念的切线定义，这是一般教材上见不到的内容。整体而言，这一讲可以轻松翻过。

第4讲讨论函数的增减性和最值。这也是导数的重要应用。这里从乙函数的观点来讲，更为严谨。其中关于3次多项式求乙函数的推导，关于乙函数区间可分性的推导，都可以先放过去。这也是可以轻松翻过的几页。

第5讲引进了“差商有界”的概念。这其实不新，就是所谓李普西兹条件。接着的几个命题及其推导，可以看看，不必深究。

第6讲揭示出乙函数和导数之间的关系，是本书

最重要的部分。这里揭示了林群不等式导数定义和乙函数的关系，推出了相当于传统的拉格朗日中值定理的“估值定理”，为《微积分减肥快跑》最后所说的“一块心病”提供了解决方案，顺便给出正弦函数求导的三种推导。

第7、第8两讲谈求导法则，其推导方法针对初等函数而不依赖极限，属于“立此存照”的内容。

第9、第10两讲谈对数函数和指数函数的求导公式，顺便也解决了一般幂函数求导问题，和传统教材比较，这里轻松得多。留下的逻辑缺口是$y=\dfrac{1}{x}$曲线下的曲边梯形面积的存在问题。这需要实数理论。

第11、第12两讲休整一下，总结了初等函数微分法。

第13讲讨论函数的凸性，又是导数的应用。比一般教材简明。

第14讲引进了泰勒公式，它被认为是“一元微分学的顶峰”。泰勒公式的余项有几种形式，本书只

给出最常用的拉格朗日余项形式的泰勒公式。通常教材的推导用到拉格朗日中值定理，林群巧妙地利用微积分基本公式推出余项的积分形式（应用起来相当于拉格朗日形式），这里只用了“导数正则函数增”。

第15讲给出了不用极限引入定积分的方法，并证明了微积分基本定理，即牛顿—莱布尼兹公式。这是本书又一个重要部分。

第16讲介绍黎曼积分的概念，交代了基于极限的黎曼积分和本书中不用极限的积分之间的等价关系。

第17讲里展示了微积分基本定理的部分应用。

最后，第18讲说明书中对数函数和指数函数的引入尚欠严谨，因为面积的存在性和反函数的存在性都要证明。如何证明？只要承认有上界的实数集合必有最小上界这条原理就可以了。

全书18讲，重点在第2、第6、第14和第15讲，其次就是第9、第10两讲。这6讲是骨架，其余12讲是肌肤。

本书可以看成是作者另一本书《直来直去的微积分》（科学出版社，2010）的通俗版本，设想的主要读者群是数学教师，特别是高中的数学教师。书中的内容远远超过了课程标准对有关部分的要求。课程标准里要求一碗水，这里是一桶水。老师有了这一桶水，在讲授微积分时为学生答疑解惑就绰绰有余了。

学习数学，贵在思考与创新。微积分发展历史上不少重要的进展，来自数学教学中的思考与创新。同一个问题的不同解决方案，是促进思考、启发创新的有效模式。将本书、教材以及《微积分减肥快跑》对照阅读，会发现一系列有思考价值的问题。这将使微积分的教学变得丰富多彩，有利于培养学生的开放性思维和创新意识，有助于教师提高专业素质，产生丰硕的教学研究成果。

2012 年 5 月

张景中

目录

Contents

开　篇

计算面积是最古老的数学问题之一. 但如何计算任意曲线包围的面积，直到 17 世纪初还是数学家面前的难题.

老问题没完全解决，新问题又层出不穷.

求作任意曲线的切线，求任意曲线的长度，这是来自几何的问题.

求变速运动物体的速度，求物体的重心，求液体对物体表面的压力，这是来自物理的问题.

判断各种函数的增减，求函数的最大值和最小值，这些问题既来自几何，又来自物理，也来自生活、工商业和许多科技领域，更是数学理论发展的需求.

数学历史上戏剧性的一幕出现了：微积分的创建，为上面几大类问题提供了巧夺天工的统一解决方案.

这是科学的大丰收，是人类精神的伟大胜利！

这场伟大胜利，奠基于无穷小方法或极限理论的建立与发展. 学习微积分就要先学极限，似乎已成定论.

无穷小方法或极限理论的繁琐，使微积分成为艰深的学问.

历史上一些数学大师相信，不借助于无穷小方法或极限理论也能把微积分说清楚. 拉格朗日为此写出其名著《解析函数论》. 但他们的愿望一直未能实现. 能严谨而简明地说清楚微积分的著作，因而长期未见出现.

我国数学家林群十几年来倡导微积分的改革，在此方向孜孜以求. 他所撰写的《微积分快餐》（科学出版社，2009）《微积分减肥快跑》（科学普及出版社，2011）等书，开创了绕过极限运算直接推导出微积分公式的新路. 本书则通过另一思路，试图实现拉格朗日等大师的梦想.

第1讲
探求瞬时速度大师引入导数

有句古话，叫做“强弩之末势不能穿鲁缟”．字面上是说射出的箭尽管开始很有力，也就是很快，但后来速度会慢下来，到了射程之末连细绢也穿不透了．当然，这是由于空气阻力的作用．

其实，强弩之末速度到底如何，还要具体分析．如果从高高的城门楼上射下来，像三国演义里陈宫向曹操射的一箭，由于重力，箭会越来越快；如果从下向上“弯弓射大雕”，初速再大，也会越高越慢；到了最高处回头下落，又会越来越快．

总之，箭的运动速度时时刻刻在变化，这在物理上叫做非匀速运动．求非匀速运动物体每时每刻的速

度，是物理学家关心的问题.

意大利物理学家伽利略（G. Galilei，1564—1642）研究了重力作用下物体的运动规律. 他经过反复实验，总结出小球在光滑斜面上滚下的距离 S 和所用的时间 t 之间有函数关系 $S=S(t)=at^2$，这个式子叫做小球的运动方程. 其中系数 a 和斜面坡度以及计量单位有关.

有了运动方程，在时间段 $[u,v]$ 上小球滚过的距离很好算，就是 $S(v)-S(u)=av^2-au^2$. 滚过这段距离的时间是 $v-u$，于是在时间区间 $[u,v]$ 上小球的平均速度就是

$$V_p=\frac{S(v)-S(u)}{v-u}=\frac{av^2-au^2}{v-u}=a(u+v).\tag{1-1}$$

知道了任意时间段上的平均速度，如何求任一时刻的速度，即所谓瞬时速度呢?

伽利略没能解决这个问题. 他遭遇到了概念上的困难.

要算速度，就要知道物体在一段时间走过的距离. 只看一个时刻，时间和走过的距离都等于0，通常的速度概念失去了意义!

英国科学家牛顿（Isaac Newton，1642—1727）设想，如果在（1－1）中让时刻v越来越接近u，即让时间区间缩小到非常非常接近于0，则右端的$a(u+v)$越来越接近$2au$. 所以时刻$t=u$的瞬时速度应当是$2au$.

例如，自由落体开始下落t秒时经过的距离为$\frac{1}{2}gt^2$，即$a=\frac{g}{2}$，这里$g=9.8(m/s^2)$是重力加速度，易算出下落3秒时其瞬时速度为$29.4(m/s)$. 这和物理学中按能量守恒定律算出来的结果一致.

为了强调要计算的是时刻$t=u$处的瞬时速度，记$v-u=h$，从而$v=u+h$，于是（1－1）成为

$$V_p=\frac{S(u+h)-S(u)}{h}=\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}$$

$$=\frac{2auh+ah^2}{h}=2au+ah. \qquad (1-2)$$

从上面的等式容易看出，不论h是正是负，当它

无限接近于 0 时，平均速度 $V_p=\dfrac{a(u+h)^2-au^2}{h}=2au+ah$ 就会无限接近于 $2au$. 因此，认为 $2au$ 是时刻 $t=u$ 的瞬时速度，直观上看是合理的.

能不能简单点，干脆在（1－2）中取 $h=0$ 呢？仔细看看，不行！原来 h 在等式中还要充当分母，所以不能为 0，只能接近于 0. 多么接近于 0 都可以，就是不能等于 0.

“当 h 无限接近于 0 时，$\dfrac{a(u+h)^2-au^2}{h}$ 就会无限接近于 $2au$” 这句话，用现代数学的极限符号表示，就是

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}=2au. \tag{1－3}$$

这个式子读作“当 h 趋于 0 时，$\dfrac{a(u+h)^2-au^2}{h}$ 的极限为 $2au$”，或简单地说“当 h 趋于 0 时，$\dfrac{a(u+h)^2-au^2}{h}$ 趋于 $2au$”.

牛顿这样得出的答案，数学上不够严谨，当时引